МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1981

УДК 532.516

ОБ ОБТЕКАНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ СФЕР

БЕРДИЧЕВСКИЙ А. Л.

Рассматривается задача о стоксовом течении вязкой несжимаемой жидкости через периодическую решетку непроницаемых сфер с линейным трением на границе. Получено решение, а также выражение для силы сопротивления с учетом членов порядка $c^{5/3}$ по сравнению с единицей включительно (c — объемная концентрация сфер). Предложенный алгоритм позволяет получать решение с любой нужной степенью точности. В качестве предельных решение содержит случаи идеального скольжения и прилипания на поверхностях сфер. В задаче с условием прилипания построена асимптотически точная оценка силы сопротивления снизу, справедливая при любых значениях концентрации c.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерную область V, покрытую решеткой с направляющими векторами $b\overset{i}{\tau}_{(1)}, b\overset{i}{\tau}_{(2)}, b\overset{i}{\tau}_{(3)}$, где b — максимальный шаг решетки (латинские индексы пробегают значения 1; 2; 3; все величины рассматриваются в декартовой системе координат). Каждому узлу решетки $bn^p\overset{i}{\tau}_{(p)}$ (n^p — целочисленный вектор, по повторяющимся верхнему и нижнему индексам предполагается суммирование) поставим в соответствие ячейку B_n — параллелепипед с центром в узле, образованный векторами $b\overset{i}{\tau}_{(1)}, b\overset{i}{\tau}_{(2)}, b\overset{i}{\tau}_{(3)}$. Введем ячеечные координаты y^i, которые меняются в параллелепипеде B с центром в точке $y^i=0$, образованном векторами $\overset{i}{\tau}_{(1)}, \overset{i}{\tau}_{(2)}, \overset{i}{\tau}_{(3)}$. Координаты x^i в ячейке B_n связаны с ячеечными координатами соотношением

$$x^i=\overset{i}{x}_{(n)}+by^i,\quad \overset{i}{x}_{(n)}\equiv bn^p\overset{i}{\tau}_{(p)}$$

Векторы обратной решетки будем обозначать через $\tau_i^{(p)}$ (номер вектора обратной решетки (p) пишется сверху). Они определены равенствами $\tau_j^{(p)}\overset{i}{\tau}_{(p)}=\delta_j^i$, $\overset{i}{\tau}_{(p)}\tau_i^{(q)}=\delta_p^q$, где δ_k^l — символ Кронекера.

В ячейках B_n, не пересекающихся с границей ∂V области V, расположим сферы A_n радиуса a, центры которых совпадают с узлами решетки, так что в ячеечных координатах областям A_n соответствует сфера $A\subset B$ радиуса $\alpha\equiv a/b$.

Рассмотрим функционал D:

$$D=\frac{1}{2}\int\limits_{V-\Sigma A_n}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j}+\frac{\partial u^j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)d^3x+\sum_n\eta\int\limits_{\partial A_n}u^iu_id^2x \tag{1.1}$$

Здесь d^3x и d^2x — элементы объема и площади соответственно, ∂A_n — граница области A_n.

Вариационная задача $D\to\inf$, где нижняя грань вычисляется по всем полям скорости u^i, удовлетворяющим ограничениям

$$\frac{\partial}{\partial x^i}u^i=0\quad x^i\in V-\Sigma A_n,\quad u^i\nu_i=0,\quad x^i\in\partial A_n,$$
$$u^i=h^i(x)\quad x^i\in\partial V$$

соответствует задаче об определении поля скорости u^i вязкой (с вязкостью $\mu=1$) несжимаемой жидкости, текущей в области $V-\Sigma A_n$, с линейным трением на границах областей A_n. Здесь ν^i — единичная нормаль на ∂A_n, внешняя к A_n.

Случай $\eta\to\infty$ соответствует условию прилипания, $\eta=0$ — условию идеального скольжения. Задачу при промежуточных значениях $0<\eta<\infty$ можно интерпретировать как задачу об обтекании пузырей в присутствии поверхностно-активных веществ, скорость переноса которых на поверхность пузырей лимитируется процессами адсорбции — десорбции [1].

2. Осреднение. Асимптотика решения при $b\to0$ имеет вид [2]

$$u^i=w^i(x,y)+b\psi^i(x,y)+O(b^2) \tag{2.1}$$

Здесь функции $w^i(x,y)$ и $\psi^i(x,y)$ мало меняются по аргументу x и определены во всей области V, а по аргументу y — периодичны с периодами $\tau^i_{(1)},\ \tau^i_{(2)},\ \tau^i_{(3)}$.

Задачей осреднения является выделение таких искомых функций, которые, описывая течение, являлись бы маломеняющимися на расстояниях порядка b. В качестве таких функций естественно брать среднеобъемные $\langle u^i\rangle_{B-A}$:

$$\langle u^i\rangle_{B-A}=\frac{1}{|B-A|}\int\limits_{B-A}u^id^3x$$

(объем области $B-A$ обозначается $|B-A|$). Очевидно, что с точностью до малых порядка b $\langle u^i\rangle_{B-A}=\langle w^i\rangle_{B-A}$. Введем обозначения

$$w^i=v^i(x)+\varphi^i(x,y),\qquad v^i(x)\equiv\langle w^i\rangle_{B-A} \tag{2.2}$$

Подставляя формулы (2.1) и (2.2) в выражение (1.1) и ограничиваясь главным приближением по b, получим

$$\begin{gathered}D=\sum_n\frac{1}{b^2}(D_nb^3|B|)\\ D_n=\frac{1}{2|B|}\int\limits_{B-A}w^{(i|j)}w_{(i|j)}d^3y+\frac{\eta b}{|B|}\int\limits_{\partial A}w^iw_id^2y\\ w^{i|j}\equiv\frac{\partial w^i}{\partial y^j},\quad w^{(i|j)}\equiv w^{i|j}+w^{j|i}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Зафиксируем v^i и будем искать $\varphi^i(x,y)$. В пределах одной ячейки v^i — постоянные, поэтому в каждой ячейке получим одну и ту же задачу: минимизировать функционал I:

$$I=\frac{1}{2|B|}\int\limits_{B-A}\varphi^{(i|j)}\varphi_{(i|j)}d^3y+\frac{\eta'}{|B|}\int w^iw_id^2y;\quad \eta'\equiv\eta\cdot b \tag{2.4}$$

по всем периодическим функциям φ^i, удовлетворяющим ограничениям

$$\varphi_{|i}{}^{i}=0,\quad y^i\in B-A,\quad (v^i+\varphi^i)\nu_i=0,\quad y^i\in\partial A,\quad \langle\varphi^i\rangle_{B-A}=0 \tag{2.5}$$

Минимизирующий элемент функционала I является периодической функцией y, которая линейно зависит от v^i как от параметров и через них зависит от x. Таким образом, минимальное значение функционала (2.4) есть квадратичная форма $\Phi=D_{ij}v^iv^j$, постоянные коэффициенты которой зависят только от геометрии области $B-A$ и константы $\eta'=\eta\cdot b$. При малых b сумма в (2.3) становится интегральной и для осредненного функционала $\langle D\rangle$ получаем

$$\langle D\rangle=\int\limits_V\frac{1}{b^2}D_{ij}v^iv^jd^3x \tag{2.6}$$

Из условия существования следующего члена разложения в (2.1) аналогично [2] можно показать, что функции $v^i(x)$ удовлетворяют ограничению, имеющему форму уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(v^i(1-c))=0,\quad c=|A|/|B| \tag{2.7}$$

Уравнения Эйлера функционала (2.6) имеют вид закона Дарси

$$\frac{2}{b^2}D_{ij}v^j=(1-c)\frac{\partial P}{\partial x^i} \tag{2.8}$$

где $P(x)$ — множитель Лагранжа при ограничении (2.7), имеющий смысл среднего давления. Отметим, что осредненное уравнение не содержит производных от средней скорости v^i. Это не позволяет ставить для v^i краевые задачи с условиями типа $v^i=h^i$ на границе ∂V области V. Для постановки краевой задачи в представлении (2.1) следует сохранить второе слагаемое. Тогда в функционал (2.6) добавятся слагаемые, содержащие квадрат градиентов скорости v^i. Эти слагаемые будут иметь нулевой порядок по b и, следовательно, будут малы везде в V, кроме тонкого пограничного слоя в окрестности границы ∂V. Таким образом, вдали от границы ∂V области V можно пользоваться уравнениями (2.8).

Значения коэффициентов D_{ij} определятся из задачи о минимуме функционала I. Уравнения для определения минимизирующего элемента φ^i найдем, варьируя функционал I при ограничениях (2.5):

$$\begin{aligned}&\Delta\varphi^i-\nabla^i p+\lambda^i=0,\quad y^i\in B-A\\&\eta' e_{ijk}w^j\nu^k=e_{ijk}\varphi^{(l|j)}\nu^k\nu_l,\quad y^i\in\partial A\\&[\varphi_i]_s=[-p\delta_{ij}+\varphi_{(i|j)}]_s\nu^j_{(s)}=0,\quad y^i\in\partial B\end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь e_{ijk} — абсолютно антисимметричный объект ($e_{123}=1$), через $[F(y)]_s$ обозначена разница $[F(y)]_s=F(y^i+\overset{i}{\tau}_{(s)})-F(y^i)$, а $\overset{i}{\nu}_{(s)}$ — внешняя нормаль на грани ячейки B, описываемой уравнением $\overset{i}{\tau}_{(s)}\,y_i=-{}^1/_2$.

Множитель Лагранжа $p(y)$ при первом ограничении (2.5) можно интерпретировать как давление, а постоянный вектор λ^i — множитель Лагранжа при последнем ограничении (2.5) — как силу, необходимую, чтобы «продавить» жидкость через ячейку периодической решетки.

3. Гармонический периодический прообраз функции $Q(y)$. Для построения точного решения задачи (2.9), (2.5) введем периодическую (с периодами $\tau^i_{(1)}$, $\tau^i_{(2)}$, $\tau^i_{(3)}$) функцию S, имеющую в узлах решетки с координатами y_n^i (n — номер узла) особенности вида $^1/_2|y-y_n|$ ($|y-y_n|\equiv\equiv\sqrt{(y_i-y_{in})(y^i-y_n^i)}$). Функция S есть периодическое решение уравнения $\Delta S=Q$, где Q — периодическая функция, везде, кроме узлов решетки, удовлетворяющая уравнению $\Delta Q=4\pi/|B|$.

В узлах решетки с координатами y_n^i функция $Q(y)$ имеет особенность $1/|y-y_n|$. Формулой

$$Q=P(y)-{}^1/_2\gamma_{ij}y^iy^j+Q_0$$

функция Q связана с введенной в [3] гармонической функцией $P(y)$ и постоянным тензором γ_{ij}, зависящим только от геометрии решетки.

Представление функций Q и S рядами Фурье дано в [4], однако более удобным является представление, в котором явно выделены все особенности. Оно может быть получено по схеме, использованной в [3] при построении функции $P(y)$. Представление $S(y)$ в виде ряда по особенностям дается формулой

$$S=\frac{|y|}{2}+\frac{1}{2}\zeta_{ij}y^iy^j-\frac{1}{4!}\gamma_{ijkl}\,y^iy^jy^ky^l+\frac{1}{2}\Sigma_n'(|y-y_n|)_{\Delta 4}$$

где $(|y-y_n|)_{\Delta 4}$ — разложение функции $|y-y_n|$ в ряд Тейлора в точке $y^i=0$, в котором отброшены члены до y^4 включительно, а постоянные тензоры ζ_{ij} и γ_{ijkl} зависят только от геометрии решетки и определяются равенствами

$$\gamma_{ijkl}=\tau_l^{(n)}\gamma_{ijk(n)},\qquad \gamma_{ijk(n)}\equiv[S^*_{ijk}(y)]_n$$

$$\gamma_{ijk(n)}=2S^*_{ijk}\left(\frac{1}{2}\tau_{(n)}\right);\quad S^*_{ijk}(y)\equiv\frac{1}{2}|y|_{|ijk}+\frac{1}{2}\sum_n{}'\,(|y-y_n|_{|ijk})_{\Delta 1}$$

$$\zeta_{ij}=\tau_j^{(n)}\zeta_{i(n)},\qquad \zeta_{i(n)}\equiv-[S_i^*]_n,\qquad -\zeta_{i(n)}=2S_i^*({}^1/_2\tau_{(n)})$$

$$S_i^*\equiv{}^1/_2|y|_i-\frac{1}{3!}\gamma_{ijkl}y^jy^ky^l+\sum_{n=3}^{\infty}{}'\,(|y-y_n|_{|i})_{\Delta 3}$$

Разложение функции $S(y)$ в окрестности нуля имеет вид

$$S(y)\equiv\frac{1}{2}|y|+S'(y)$$

$$S'(y)=\frac{1}{2}\zeta_{ij}y^iy^j-\frac{1}{4!}\gamma_{ijkl}y^iy^jy^ky^l+\sum_{n=3}^{\infty}S_{i_{[2n]}}y^{i_1}\dots y^{i_{2n}}$$

$$S_{i_{[k]}}\equiv S_{|i_{[k]}}(0)$$

Если решетка обладает кубической симметрией, то

$$\zeta_{ij}={}^1/_3\,Q_0\delta_{ij};\quad \gamma_{ijkl}=\gamma O_{ijkl}-{}^1/_5\left(\gamma+\frac{4\pi}{3|B|}\right)\delta_{(ij}\delta_{kl)}$$

$$\delta_{(ij}\delta_{kl)}\equiv\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk};\quad \gamma=\frac{2\pi}{|B|}+\frac{5}{6}\gamma_{ijkl}O^{ijkl}$$

Для трех типов Браве кубических решеток γ имеет следующие значения: простая кубическая решетка $\gamma=2{,}7884(4\pi/3|B|)$, объемноцентрированная решетка $\gamma=0{,}8594(4\pi/3|B|)$, гранецентрированная решетка $\gamma=0{,}76275(4\pi/3|B|)$.

4. Решение задачи на ячейке. Из уравнений (2.9) и (2.5) следует, что давление p удовлетворяет уравнению Лапласа и, следовательно, как любая нечетная гармоническая, растущая не сильнее линейной на бесконечности функция, удовлетворяющая последнему уравнению в (2.9), представляется в виде ряда по производным от функции Q — фундаментальному периодическому решению уравнения Лапласа

$$p(y)=\sum_{n=0}^{\infty} h^{i[2n+1]}Q_{|i_{[2n+1]}} \tag{4.1}$$

Симметричные постоянные тензоры $h^{i[2n+1]}$, вообще говоря, могут задаваться с большим произволом: добавление величин вида $C\delta_{kl}\delta^{i_{2n}i_{2n+1}}h^{i[2n-1]kl}$ не меняет ряда (4.1). Поэтому без ограничения общности на постоянные $h^{i[2n+1]}$ можно наложить такие требования, что их свертка по любым двум индексам есть ноль

$$h^{i[2n-1]kl}\delta_{kl}=0 \tag{4.2}$$

Поле скорости φ^i будем искать в виде суммы $\varphi^i=w_1{}^i+w_2{}^i$, где $w_1{}^i$ является произвольным решением системы уравнений (4.3), а $w_2{}^i$ — решением системы уравнений (4.4) — (4.5)

$$\Delta w_1{}^i-p^{|i}+\lambda^i=0,\quad w^i{}_{1|i}=0,\quad \langle w_1{}^i\rangle_{B-A}=0 \tag{4.3}$$

$$[w_1{}^i]_s=[-p\delta^{ij}+w_1{}^{(i|j)}]_s\nu_{j(s)}=0$$

$$\Delta w_2{}^i=0,\quad w^i_{2|i}=0,\quad \langle w_2{}^i\rangle_{B-A}=0 \tag{4.4}$$

$$[w_2{}^i]_s=[w_2{}^{(i|j)}]_s\nu_{j(s)}=0$$

$$(v^i+\varphi^i)\nu_i=0;\quad \eta' e_{ijk}\nu^k(\varphi^j+v^j)=e_{ijk}\varphi^{(j|l)}\nu^k\nu_l,\quad y^i\in\partial A \tag{4.5}$$

Одним из решений системы уравнений (4.3) является

$$w_1{}^i=\sum_{n=}^{\infty}\{h^{j[2n+1]}(S^i_{|j_{[2n+1]}}-\langle S^i_{|j_{[2n+1]}}\rangle_{B-A})-$$
$$-h^{ij[2n]}(Q_{|j_{[2n]}}-\langle Q_{|j_{[2n]}}\rangle_{B-A})\},\quad \lambda^i=h^i\frac{4\pi}{|B|} \tag{4.6}$$

Построим решение системы уравнений (4.4) — (4.5). Общее решение уравнения $w^i_{2|i}=0$ задается формулой

$$w_2{}^i=e^{ijk}\psi_{j|k} \tag{4.7}$$

где $\psi_j(y)$ — произвольная вектор-функция. Отметим, что изменение на любой потенциальный вектор $\varphi_{|j}$ не меняет $w_2{}^i$. Подставляя (4.7) в первое уравнение (4.4), получим $e_{ijk}\Delta\psi^{j|k}=0$. Следовательно, $\Delta\psi^j=\theta(y)^{|j}$, где $\theta(y)$ — произвольная функция. Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы $\Delta\varphi=\theta$. Тогда, переопределив ψ^j: $\psi^j\to\psi^j+\varphi^{|j}$, для новой функции ψ^j получим уравнение $\Delta\psi^j=0$.

Общим нечетным, периодическим (или растущим на бесконечности не быстрее линейной функции) решением этого уравнения является функция

$$\psi^j = \sum_{n=0}^{\infty} k^{ji[2n+1]} Q_{|i_{[2n+1]}}$$

Следовательно, общим решением системы уравнений (4.4) является

$$w_2{}^i = e^{ipq} \sum_{n=0}^{\infty} k_p^{\cdot j[2n+1]} (Q_{|j_{[2n+1]}q} - \langle Q_{|qj_{[2n+1]}} \rangle_{B-A}). \tag{4.8}$$

Без ограничения общности на симметричные по индексам j постоянные тензоры $k^{pj[2n+1]}$ аналогично (4.2) можно наложить требования

$$k_p^{\cdot pj[2n]} = 0, \quad k^{p\cdot kj[2n-1]}_{\ \ k} = 0 \tag{4.9}$$

Уравнениями для определения постоянных тензоров $h^{j[2n+1]}$ и $k^{pj[2n+1]}$ служат краевые условия (4.5). Подставляя (4.8) и (4.6) в (4.5) и производя разложение полученных равенств по сферическим гармоникам, получим систему алгебраических уравнений для определения $k^{pj[2n+1]}$ и $h^{j[2n+1]}$ (в силу громоздкости эта система не выписывается). Можно показать, что для малых α (α всегда не больше $^1/_2$)

$$h^{j[2m+1]} = O(\alpha^{4m+1}), \quad k^{jr[2m+1]} = O(\alpha^{4m+3})$$

Для решеток, обладающих кубической симметрией, с точностью до малых порядка α^6 система принимает вид

$$\alpha^3 v^i = e^{\cdot i}_{\cdot pq} k^{pq} + h^i \alpha^2 \left(1 + {}^2/_3 Q_0 \alpha + \frac{c}{5} + \frac{c^2}{10}\right) \frac{1}{(1-c)}$$

$$(\eta^* + 6) k^{tl} = e^{ltj} \left\{ \eta^* \alpha^3 v_j + \alpha^2 h_j \left(\eta^* \left(-{}^1/_2 - {}^2/_3 Q_0 \alpha - \frac{9}{10} c + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{5} c^2 \right) + \frac{3c}{5} \right) \frac{1}{(1-c)} \right\}$$

где $\eta^* \equiv \eta'\alpha$. Разрешая ее, получим

$$h^i = \alpha v^i (1-c) \frac{{}^3/_2 \eta^* + 3}{\{\eta^* (1 + Q_0 \alpha + c - {}^3/_{10} c^2) + 3(1 + {}^2/_3 Q_0 \alpha + {}^3/_{10} c^2)\}} \tag{4.10}$$

Вычислим диссипацию энергии в единице объема ячейки. Подставляя (4.8) и (4.6) в (2.4), получим $\Phi = h_i v^i 4\pi (1-c)/|B|$.

Для решеток, обладающих кубической симметрией, согласно (4.10), полная диссипация в ячейке равна

$$|B|\Phi = 6\pi\alpha v^2 (1-c)^2 \times \tag{4.11}$$

$$\times \frac{\eta^* + 2}{\eta^* (1 + Q_0' c^{1/3} + c - {}^3/_{10} c^2) + 3(1 + {}^2/_3 Q_0' c^{1/3} + {}^3/_{10} c^2)}$$

Из формулы (3.12) видно, что при $c \to 0$ главная поправка к формуле Ламба ([5], стр. 755) имеет порядок $c^{1/3}$ и должна учитываться даже при малых концентрациях. Значения постоянной Q_0' для трех типов Браве кубических решеток приведены, например, в [6] и мало отличаются от —1,76 (значения для простой кубической решетки).

При $\eta^* \to \infty$ формула (4.11) фактически совпадает с формулой, полученной в [4] (различие в $(1-c)^2$ связано с различными определениями средней объемной скорости v^i; в работе [4] в качестве среднеобъемной рассматривается скорость осредненная по всей ячейке B, а не по области $B-A$, занятой жидкостью). При $\eta^*=0$ формула (4.11) дает значение диссипации периодической решетки пузырей (в «очищенной» жидкости). Сила, действующая на каждый пузырек в решетке, определяется по формуле $F=b|B|\Phi/v$.

5. Оценка силы сопротивления. Оценку силы сопротивления периодической решетки сфер можно получать аналогично оценкам работы [3].

Действительно, поскольку Φ является минимальным значением функционала I на множестве функций, удовлетворяющих ограничениям (2.5), оценкой Φ сверху является значение функционала I на любой функции этого множества.

Для получения аналогичных оценок Φ снизу следует построить функционал I^*, двойственный к I [7]: $\sup I^*=\Phi=\inf I$.

Можно проверить, что если в качестве I^* взять функционал

$$I^*=-\frac{1}{|B|}\int\limits_{B-A}2\sigma^{ij}\sigma_{ij}\,d^3y-\frac{1}{|B|}\int\limits_{\partial A}(\eta'\rho^i\rho_i+(4\sigma^{ij}-2p\delta^{ij})v_i\nu_j)^2d^2y \tag{5.1}$$

рассматриваемый на множестве функций σ^{ij}, ρ^i, p и λ^i, удовлетворяющих ограничениям

$$\begin{aligned}&-2\sigma_{|j}^{ij}+p^{|i}-\lambda^i=0, && y^i\in B-A\\ &[2\sigma^{ij}-p\delta^{ij}]_s\nu_{j(s)}=0, && y^i\in\partial B\\ &(-2\sigma^{ij}+p\delta^{ij}+\eta'\rho^i\nu^j)\nu_j(\delta_i^k-\nu^k\nu_i)=0, && y^i\in\partial A\end{aligned} \tag{5.2}$$

то верхняя грань I^* на этом множестве равна Φ и достигается на функциях σ^{ij}, ρ^i, равных $\sigma^{ij}={}^1/_2\varphi^{(i|j)}$, $\rho^i=w^i$, где φ^i и w^i, а также $p(y)$ и λ^i — точные решения задачи о минимуме функционала I.

Подставляя в выражение (5.1) произвольные σ^{ij}, ρ^i, p и λ^i, удовлетворяющие ограничениям (5.2), будем получать оценки Φ снизу.

Приведем оценку для случая $\eta'\to\infty$. При этом очевидно, что в (5.1) ρ_i следует положить равным нулю, а в (5.2) отбросить ограничение на ∂A.

Рассмотрим следующие пробные функции σ^{ij}, ρ^i, p и λ^i:

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{2}\varphi_{(i|j)},\qquad p=h^jQ_{|j},\qquad \lambda^i=4\pi h^i/|B| \tag{5.3}$$

$$\varphi_i=h^jS_{|ij}-h_iQ+k^jQ_{|ij}$$

Легко видеть, что функции (5.3) удовлетворяют модифицированным ограничениям (5.2). Подставляя (5.3) в (5.1), для решеток, обладающих кубической симметрией, получим

$$\Phi\geqslant\frac{6\pi\alpha}{|B|}\{G_1v^ih_i/\alpha+G_2h^ih_i/\alpha^2+G_3h^ik_i/\alpha^4+G_4k^ik_i/\alpha^6\}+2\int\limits_A\sigma'^{ij}\sigma_{ij}'\,d^3y \tag{5.4}$$

$$G_1=-\frac{4(1-c)}{3},\quad G_3=\left\{\frac{8}{3}-\frac{16}{15}c-\frac{8}{135}p\left(\gamma^*+\frac{12\pi}{5|B|}\right)\alpha^8\right\}$$

$$G_4=-8,\qquad \gamma^*=\gamma-\frac{2\pi}{|B|} \tag{5.5}$$

$$G_2=\left\{-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}Q_0\alpha-\frac{4}{15}c+\frac{2}{5}c^2+\frac{4c}{45}\gamma^*\alpha^3+\frac{2}{81}\gamma^{*2}\alpha^6-\right.$$
$$\left.-\frac{4}{21\cdot45}\left(\gamma^*+\frac{12\pi}{5|B|}\right)p\alpha^8\right\}$$

Здесь σ'^{ij} — тензор-функция, которая получится, если в (5.3) вместо $S(y)$ и $Q(y)$ использовать соответственно

$$S'(y)-\frac{1}{2}\zeta_{ij}y^iy^j+\gamma_{ijkl}y^iy^jy^ky^l/4!\ \text{ и }\ Q'-Q_0+\gamma_{ij}y^iy^j/2.$$

В (5.5) p есть постоянная, значения которой для трех типов кубических решеток даны в [6].

Поскольку последнее слагаемое в (5.4) не отрицательно, его отбрасывание лишь ослабляет неравенство. Правая часть получающегося соотношения достигает максимума, когда

$$h_i=-\alpha v_i\frac{2G_1G_4}{4G_2G_4-G_3^2},\qquad k_i=-\alpha^3v_i\frac{G_1G_3}{4G_2G_4-G_3^2}$$

При этом оценка (5.4) принимает вид

$$|B|\,\Phi\geqslant 6\pi\alpha v^iv_i\frac{G_1^2G_4}{G_3^2-4G_2G_4} \tag{5.6}$$

Выражение (5.6) является искомой оценкой, справедливой при всех значениях объемной концентрации шаров c. При малых концентрациях с точностью до малых порядка c^2 правая часть (5.6) совпадает с асимптотически точным значением Ф (4.11) и оценка принимает вид

$$|B|\,\Phi\geqslant 6\pi\alpha v^iv_i(1-c)^2(1+Q_0'c^{1/3}+c)^{-1}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Бердичевский В. Л.* Об осреднении периодических структур.— ПММ, 1977, т. 41, вып. 6.
3. *Бердичевский А. Л., Бердичевский В. Л.* Обтекание идеальной жидкостью периодической системы тел.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6.
4. *Hasimoto H.* On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres.— J. Fluid Mech., 1959, v. 5, No. 2.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.— Л.: Гостехиздат, 1947.
6. *Бердичевский А. Л.* Об эффективной теплопроводности сред с периодически расположенными включениями.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 6.
7. *Бердичевский В. Л.* Об одном вариационном принципе.— Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 6.

Москва

Поступила в редакцию
25.XII.1979