

УДК 532.517.4 : 536.46

**ИССЛЕДОВАНИЕ КВАЗИОДНОРОДНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО  
ДИФфуЗИОННОГО ГОРЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЯ  
ДЛЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ  
КОНЦЕНТРАЦИИ**

**КУЗНЕЦОВ В. Р., ЛЕБЕДЕВ А. Б., СЕКУНДОВ А. Н.,  
СМИРНОВА И. П.**

При описании турбулентного диффузионного горения плотность, температуру, полноту сгорания можно выразить через концентрацию пассивной примеси. Эти зависимости нелинейны, концентрация в турбулентном потоке пульсирует, поэтому при осреднении указанных параметров возникает ряд трудностей. Обычно фронт пламени расположен на краю струи, в области, где наблюдается перемежаемость и амплитуда пульсаций концентрации велика. Поэтому для правильного осреднения необходимо знать распределение плотности вероятности концентрации пассивной примеси  $P(z)$ . При расчетах турбулентных течений с горением нередко предполагается, что это распределение универсально зависит от средней концентрации и пульсаций концентрации, которые определяются из соответствующих уравнений. Такие предположения использовались, например, в [1—5]. Этот подход, несмотря на относительную простоту, имеет ряд недостатков. Во-первых, используемые аппроксимации плотности вероятностей не опираются на известные экспериментальные и теоретические данные. Во-вторых, и это самое главное, предполагается, что зависимость плотности от концентрации пассивной примеси не влияет на форму функции распределения плотности вероятности концентрации пассивной примеси.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы проанализировать, как влияет характер зависимости плотности от концентрации на форму  $P(z)$ , и выявить некоторые особенности воздействия пульсаций концентрации на характеристики диффузионного горения в канале.

1. Физически обоснованную модель распределения вероятности концентрации можно построить, если вывести уравнение для  $P(z)$  из уравнения диффузии. Используем методы, развитые в [6] при описании течения несжимаемой жидкости, для анализа течения среды с переменной плотностью. Рассмотрим уравнение диффузии

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho z}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j z}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} D \rho \frac{\partial z}{\partial x_\alpha}; \quad j, \alpha = 1, 2, 3$$

где  $u_j$  —  $j$ -компонента скорости,  $z$  — концентрация пассивной примеси,  $\rho$  — плотность,  $D$  — коэффициент диффузии.

Введем функцию  $\varphi = \exp(i\lambda z)$ , где  $\lambda$  — произвольное действительное число. Величина  $\langle \varphi \rangle$  — характеристическая функция распределения вероятности. Дифференцируя  $\varphi$  по  $t$  и используя уравнение диффузии (1.1) и неразрывности, получим

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} &= 0 \\ \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= i\varphi \lambda \rho \frac{\partial z}{\partial t} = i\lambda \varphi \left[ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} D \rho \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} - \rho u_j \frac{\partial z}{\partial x_j} \right] \end{aligned}$$

Слагаемые в правой части (1.2) можно преобразовать к виду

$$(1.3) \quad i\lambda\varphi u_j \frac{\partial z}{\partial x_j} = \rho u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

$$(1.4) \quad i\lambda\varphi \frac{\partial}{\partial x_\alpha} D\rho \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} D\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \lambda^2 \rho N_0 \varphi, \quad N_0 = D \left( \frac{\partial z}{\partial x_\alpha} \right)^2$$

где  $N_0$  — мгновенное значение скалярной диссипации.

Используя (1.2) — (1.4), после осреднения получим

$$(1.5) \quad \frac{\partial \langle \rho \varphi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho u_j \varphi \rangle}{\partial x_j} = \lambda^2 \langle N_0 \rho \varphi \rangle + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\langle D\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \right\rangle$$

При больших числах Рейнольдса последним слагаемым в правой части (1.5) можно пренебречь. В дальнейшем будем рассматривать стационарный процесс, поэтому  $\partial \langle \rho \varphi \rangle / \partial t = 0$ . Уравнение (1.5) не замкнуто, поскольку слагаемые вида  $\langle \rho u_j \varphi \rangle$  и  $\langle N_0 \rho \varphi \rangle$  не выражаются через  $\langle \rho \varphi \rangle$ . Используем для замыкания (1.5) соображения, сходные с указанными в [7, 8].

Найдем корреляцию  $\langle N_0 \rho \varphi \rangle$ . Так как из-за перемежаемости значения  $z=0$  и  $z=1$  наблюдаются с отличной от нуля вероятностью, то из рассмотрения структуры течения можно предположить, что

$$(1.6) \quad P(z) = \gamma_0 \delta(z) + \gamma_1 \delta(z-1) + \gamma P_i^\circ(z)$$

Здесь  $\delta$  — дельта-функция,  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma$  — вероятности наблюдения концентраций 0, 1 и промежуточных концентраций соответственно,  $P_i^\circ$  — нормированная функция распределения плотности вероятностей концентрации пассивной примеси по турбулентной жидкости, т. е. по областям, в которых наблюдаются пульсации концентрации.

При очень больших числах Рейнольдса статистические характеристики  $N_0$  зависят от наиболее мелких вихрей, а статистические характеристики концентрации определяются энергосодержащими вихрями. Тогда на основании теории Колмогорова — Обухова [10—11] можно предположить, что характеристики энергосодержащих и наиболее мелких вихрей и, следовательно, величины  $\rho\varphi$  и  $N_0$  статистически независимы. Из этой гипотезы следует, что  $N_0$  не зависит от концентрации. Справедливость принятой гипотезы в случае  $\rho = \text{const}$  подтверждена экспериментально в [12]. Обозначим  $N_i = \langle N_0 \rangle_i$ . Тогда из (1.6) имеем

$$(1.7) \quad \langle N_0 \rho \varphi \rangle = \gamma \int \varphi \rho N_0 P_i^\circ dz = \gamma N_i \int \varphi \rho P_i^\circ dz = \gamma N_i \langle \varphi \rho \rangle_i$$

В дальнейшем будет рассматриваться поток с однородными параметрами в поперечном направлении и слабо изменяющимися параметрами в направлении оси  $x$ . В этом случае можно пренебречь диффузией вещества и корреляция  $\langle \rho u_j \varphi \rangle$  упрощается к виду  $\langle u_j \rangle \langle \rho \varphi \rangle$ .

С учетом этих допущений из (1.5), используя обратное преобразование Фурье, получим

$$(1.8) \quad \frac{\partial \rho P \langle u_j \rangle}{\partial x_j} = \gamma \frac{\partial^2}{\partial z^2} N_i \rho P_i^\circ$$

Несмотря на сделанные упрощения, интегрирование этого уравнения сопряжено с существенными математическими трудностями — оно принадлежит к обратному параболическому типу и является четырехмерным. Однако в некоторых частных случаях удается найти решение уравнения (1.8) и оценить ряд важных эффектов.

2. Рассмотрим один из таких типов течения — диффузионное горение в однородном турбулентном потоке. Пусть в канал постоянного сечения раздельно подаются горючее и окислитель в виде системы большого числа близко расположенных струй, в которых уровень турбулентности и турбулентной вязкости очень велики. Поэтому течение быстро становится статистически однородным по сечению. Поля средних параметров течения поперек канала выравниваются, однако пульсации скорости и концентрации остаются.

Проанализируем предельный случай, считая, что в начальном сечении горючее и окислитель распределены по сечению канала отдельными «кусками» и концентрация  $z$  принимает случайным образом только два значения: 0 или 1. В начале канала полнота сгорания ( $\eta = 1 - \langle \rho c \rangle / \langle \rho z \rangle$ , где  $c$  — концентрация топлива) равна нулю. При удалении от начального сечения на границах раздела отдельных «кусков» горючего и окислителя возникают слои смешения, где наблюдаются все промежуточные концентрации. По мере развития процесса ширина этих слоев смешения растет и полнота сгорания увеличивается. На бесконечном удалении от начального сечения все пульсации затухнут и концентрация будет во всех точках потока равна среднemasсовой.

Эта модель, с одной стороны, является тем крайним случаем горения в канале, когда все основные характеристики течения (скорость, плотность, полнота сгорания и т. д.) определяются только пульсациями концентрации. С другой стороны, эта задача позволяет проследить эволюцию  $P(z)$  в процессе смешения и выяснить эффекты влияния сжимаемости.

Предполагая, что продольным переносом примеси можно пренебречь, из (1.8) получим

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho u P}{\partial x} = -\langle N_0 \rangle \frac{\partial^2 \rho P_i^0}{\partial z^2}$$

где ось  $x$  направлена вдоль оси канала. Найдем уравнения для определения величин  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $P_i^0$ . Введем вспомогательную функцию  $f(z)$ :

$$(2.2) \quad f(z)\chi(z) = \rho P_i^0(z), \quad \chi = H(z) - H(z-1)$$

где  $H(z)$ ,  $H(z-1)$  — функции Хевисайда. Подставляя (1.6) и (2.2) в (2.1), получим

$$(2.3) \quad \left( \frac{\partial \gamma_0 \rho u \delta(z)}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_1 \rho u}{\partial x} \delta(z-1) + \frac{\partial \gamma u f \chi}{\partial x} \right) = \\ = -\langle N_0 \rangle \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \chi + 2 \frac{\partial f}{\partial z} (\delta(z) - \delta(z-1)) + f(\delta'(z) - \delta'(z-1)) \right\}$$

где штрих обозначает производную по  $z$ .

Умножая левую и правую части (2.3) на произвольную бесконечно дифференцируемую функцию  $\Phi(z)$ , получим после интегрирования по  $z$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ :

$$(2.5) \quad \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \gamma f u}{\partial x} + \langle N_0 \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right\} \Phi dz = - \left\{ \rho(0) \frac{\partial \gamma_0 u}{\partial x} + \right. \\ \left. + \langle N_0 \rangle \frac{\partial f(0)}{\partial z} \right\} \Phi(0) - \left\{ \rho(1) \frac{\partial \gamma_1 u}{\partial x} - \langle N_0 \rangle \frac{\partial f(1)}{\partial z} \right\} \Phi(1) + \\ + \langle N_0 \rangle \left\{ \frac{\partial \Phi(0)}{\partial z} f(0) + \frac{\partial \Phi(1)}{\partial z} f(1) \right\}$$

Отсюда ввиду произвольности функции  $\Phi(z)$  получим

$$(2.6) \quad \frac{\partial \gamma f u}{\partial x} = -\langle N_0 \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$(2.7) \quad \rho(0) \frac{\partial \gamma_0 u}{\partial x} = -\langle N_0 \rangle \frac{\partial f(0)}{\partial z}, \quad \rho(1) \frac{\partial \gamma_1 u}{\partial x} = \langle N_0 \rangle \frac{\partial f(1)}{\partial z}$$

$$(2.8) \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0$$

Соотношения (2.6), (2.7) являются уравнениями для определения  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ ,  $P_i^\circ$ , а (2.8) — граничными условиями на  $P_i^\circ$ . Соотношения (2.7) являются строгим следствием общего уравнения (2.1). Поясним смысл этих соотношений. Величины  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ , входящие в (2.7), дают относительный объем областей, в которых концентрация примеси строго равна нулю или единице. Эти области заняты нетурбулентной жидкостью. Ясно, что соотношения (2.7) характеризуют изменение относительного объема нетурбулентной жидкости, происходящее вследствие того, что траектории жидких частиц всегда входят в завихренную жидкость. По этой причине объем турбулентной жидкости всегда возрастает. В развиваемой теории (т. е. в рамках предположения о статистической независимости пульсаций концентрации и градиента концентрации) это изменение пропорционально «потоку» плотности вероятности  $\langle N_0 \rangle \partial P / \partial z$ .

Остановимся на физическом смысле граничных условий (2.8). Рассмотрим мгновенное распределение  $z$  по поперечной координате на отрезке  $0 < y < H$  ( $H \rightarrow \infty$ ). В силу статистической однородности имеем

$$P_i^\circ(z) dz = \lim_{H \rightarrow \infty} H^{-1} \sum dy$$

где  $dy$  — длина отрезков, на которых выполняется условие  $z_1 < z < z_1 + dz$ . Отсюда имеем  $P_i^\circ = M \langle |\partial z / \partial y| \rangle_i^{-1}$ , где  $M$  — средняя плотность корней уравнения  $z(y) = z_1$ . Из этого уравнения видно, что  $P_i^\circ(0) = 0$  либо при  $M = 0$ , что физически бессмысленно, либо при  $\langle |z_y'|^{-1} \rangle_i = 0$ , где  $z_y' = \partial z / \partial y$ . Таким образом, уравнения (2.8) означают, что при переходе из нетурбулентной жидкости в турбулентную концентрация меняется скачкообразно. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными из [13], где приведены результаты измерений «замороженного» распределения температуры в нагретой плоской струе. На приведенных в этой работе осциллограммах отчетливо видно скачкообразное изменение температуры на краю струи.

Уравнение (2.1) принадлежит к обратному параболическому типу. В связи с этим начальные условия следует задавать не при  $x = 0$ , а при  $x = \infty$ , т. е. в сечении, в котором процесс смешения закончился. Тогда «начальные» условия имеют вид

$$(2.9) \quad x = \infty: \quad u = u^\circ, \quad \langle z \rangle = z^\circ, \quad \langle \rho \rangle = \rho(z^\circ), \quad P_i^\circ = \delta(z - z^\circ), \quad \gamma_0 = \gamma_1 = 0$$

В соотношениях (2.9) параметр  $z^\circ = \langle \rho z \rangle / \langle \rho \rangle$  характеризует среднemasсовую концентрацию пассивной примеси, а  $\langle z \rangle$  — осредненную по времени концентрацию. Параметр  $z^\circ$  в рассматриваемом случае одинаков во всех сечениях, а  $\langle z \rangle$  изменяется. «Начальные» условия (2.9), поставленные из физических соображений, вообще говоря, могут не удовлетворять уравнениям (2.6), (2.7). Однако, как это будет показано далее, условия (2.9) в рассматриваемом случае справедливы.

Из уравнения неразрывности имеем

$$(2.10) \quad u \langle \rho \rangle = \rho(z^\circ) u^\circ, \quad u = \rho(z^\circ) u^\circ / \langle \rho \rangle$$

Решение уравнения (2.6) с граничными и начальными условиями (2.7), (2.8) имеет вид [14]

$$(2.11) \quad \rho P_i^{\circ}(z) = 2\langle \rho \rangle \sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi k z^{\circ} \sin \pi k z \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 \tau}{2}\right)$$

Из (2.7), (2.9) получаем

$$(2.12) \quad \gamma_0 = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(0)} \left\{ 1 - z^{\circ} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k z^{\circ}}{k} \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 \tau}{2}\right) \right\}$$

$$(2.13) \quad \gamma_1 = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(1)} \left\{ z^{\circ} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k z^{\circ}}{k} (-1)^k \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 \tau}{2}\right) \right\}$$

$$\rho(0) = \langle \rho \rangle|_{z=0}, \quad \rho(1) = \langle \rho \rangle|_{z=1}$$

$$(2.14) \quad \tau = \int_0^{\infty} \frac{2\langle \rho \rangle N_i}{\rho(z^{\circ})} \frac{dx}{u^{\circ}}$$

Характер связи (2.14) между формальной переменной  $\tau$  и расстоянием  $x$  определяет индивидуальные особенности отдельных течений.

Используя следующее условие нормировки:

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma \int_0^1 P_i^{\circ} dz = 1$$

получим

$$(2.15) \quad \langle \rho \rangle = \left\{ \frac{1-z^{\circ}}{\rho(0)} + \frac{z^{\circ}}{\rho(1)} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\pi^2 k^2 \frac{\tau}{2}\right) \frac{\sin \pi k z^{\circ}}{k} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(-1)^k}{\rho(1)} - \frac{1}{\rho(0)} \right] + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\pi^2 k^2 \frac{\tau}{2}\right) \sin \pi k z^{\circ} \int_0^1 \frac{\sin \pi k z}{\rho(z)} dz \right\}^{-1}$$

Зависимости (2.11)–(2.13) дают решение поставленной задачи.

Проанализируем характер решения (2.11)–(2.13) в двух предельных случаях:  $x \approx 0$  и  $x = \infty$ . При  $x = \infty$  из (2.12), (2.13) имеем  $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ ,  $\gamma = 1$ . Тогда из (2.14), используя уравнение для пульсаций концентрации [4], которое в данном случае имеет вид  $u_0 d(z'^2)/dx = -N_i$ , получим  $\tau \approx (z'^2) \approx 0$ . Поскольку амплитуда пульсаций концентрации мала, то можно считать, что граничные условия (2.8) ставятся не при  $z=0$  и  $1$ , а при  $z = \pm \infty$ . Тогда, следуя [14], получим

$$(2.16) \quad P_i^{\circ} = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle z'^2 \rangle}} \exp\left\{-\frac{(z-z^{\circ})^2}{2 \langle z'^2 \rangle}\right\}$$

Таким образом, при малых амплитудах пульсаций решение (2.1) есть нормальный закон, что хорошо согласуется с экспериментальными данными [15].

Рассмотрим другой предельный случай  $x \approx 0$ ,  $\gamma \rightarrow 0$ , т. е. случай, когда практически все течение состоит из отдельных «кусков» с концентрациями  $z=0$  и  $1$ . Для корректности приведенных выше рассуждений необходимо показать, что  $\tau \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$  и интеграл (2.14) расходится. Это возможно, если скалярная диссипация будет неограниченно возрастать. Для упрощения анализа перейдем в систему координат, движущуюся вместе с потоком. С течением времени на границе областей  $z=0$  и  $1$  возникнут слои смещения и характерная толщина этих слоев будет возрастать. Рассмотрим такой интервал времени, когда толщина этих слоев соответствует инерционному интервалу спектра турбулентности [16]. Тогда  $N$  определяется временем

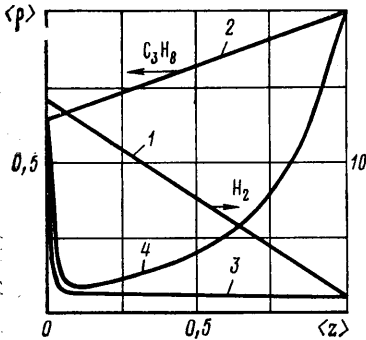
$t \sim u/x$ , диссипацией энергии турбулентности и разностью концентраций на границе слоев смешения, которая в данном случае равна единице. Из соображений размерности заключаем, что  $N = \text{const}/t \sim u/x$ , откуда видно, что условие  $\tau \rightarrow \infty$  выполняется. Асимптотические выражения для  $P_i^\circ(z)$  и  $\gamma$  можно в случае  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0$  найти из (2.11)–(2.13)

$$(2.17) \quad \rho P_i^\circ = 2\langle \rho \rangle \sin \pi z^\circ \sin \pi z \exp\left(-\pi^2 \frac{\tau}{2}\right)$$

$$\gamma = 1 - \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(0)} \left\{ (1-z^\circ) - \frac{2}{\pi} \sin \pi z^\circ \exp\left(-\pi^2 \frac{\tau}{2}\right) \right\} -$$

$$- \frac{\langle \rho \rangle}{\rho(1)} \left\{ z^\circ - \frac{2}{\pi} \sin \pi z^\circ \exp\left(-\pi^2 \frac{\tau}{2}\right) \right\}$$

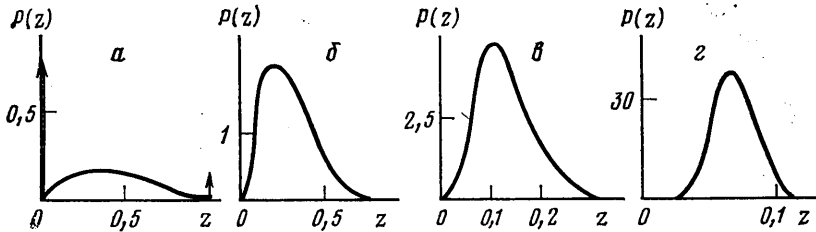
Используя соотношения (2.11)–(2.13), можно представить функцию распределения и все скалярные характеристики течения в зависимости только от двух параметров:  $z^\circ$  и  $\tau$ . С другой стороны, очевидно, что параметр  $\tau$  можно заменить на любой момент  $P(z)$ , если связь такого момента с  $\tau$  однозначна. Например, удобно в качестве такой альтернативы  $\tau$  использовать величину  $\theta = (\langle \rho z^2 \rangle - \langle \rho \rangle z^\circ) / (2\langle \rho \rangle)$ , которая является мерой уровня пульсаций концентрации и в явном виде не зависит от других особенностей турбулентности (диссипации, скорости и т. д.). При этом индивидуальные особенности различных течений характеризуются соотношением параметров  $z$  и  $\theta$ , определяющих функцию  $P(z)$ .



Фиг. 1

3. При анализе результатов расчета прежде всего остановимся на характере изменения плотности по длине канала.

Выбор  $\langle \rho \rangle$  в качестве одного из наиболее характерных параметров течения связан с тем, что единственное отличие задачи о смешении инертных потоков и течений при наличии диффузионного горения (предполагается, что скорость химической реакции бесконечно велика) заключается в различной зависимости плотности от концентрации пассивной примеси [1, 2–5, 17]. На фиг. 1 для горящих в воздухе пропана и водорода при-

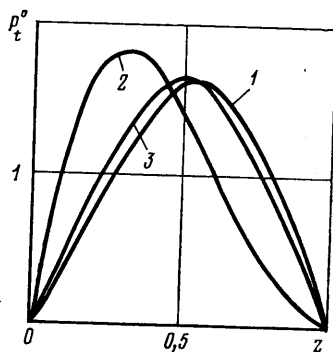


Фиг. 2

ведены зависимости  $\langle \rho \rangle$  от  $\langle z \rangle$  для двух предельных случаев:  $\tau = 0$  и  $\tau = \infty$ . Для этих двух предельных случаев относительный уровень пульсаций концентрации  $\theta^\circ = \sqrt{2\theta}/z^\circ$  равен 0 ( $\tau = 0$ ) и максимальному значению  $\theta_m^\circ$  ( $\tau = \infty$ ). При  $\tau = \infty$  зависимость  $\langle \rho \rangle$  от  $\langle z \rangle$  является линейной

(кривые 1 и 2 — водород и пропан соответственно). При  $\tau=0$  значения  $\langle \rho \rangle$  совпадают с  $\rho(z^0)$  (кривые 3, 4 — водород и пропан соответственно). Данные фиг. 1 свидетельствуют о том, что для  $z^0$ , близких к  $z_s$  ( $z_s$  — стехиометрическая концентрация), при изменении пульсаций от нуля до максимального значения плотность увеличивается примерно в 7,5 раза.

Рассмотрим влияние эффектов переменности плотности на вид  $P(z)$ . На фиг. 2 приведено изменение функции распределения плотности вероятностей концентрации пассивной примеси в зависимости от  $z$  при горении водорода в воздухе при  $z^0=z_s$  и различных уровнях пульсаций:  $a - \theta^0=4,95, \gamma_0=0,868, \gamma_1=0,026, b - \theta^0=4,25, \gamma_0=0,368, \gamma_1=7 \cdot 10^{-7}, c - \theta^0=2,1, \gamma_0=0,149, \gamma_1=0, z - \theta^0=0,35, \gamma_0=0, \gamma_1=0$ . Если уровень пульсаций концентрации близок к максимальному,  $P(z)$  описывается суперпозицией двух  $\delta$ -функций при  $z=0$  и 1 и синусоидального распределения (2.17). С уменьшением уровня пульсаций концентрации коэффициенты  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  при  $\delta$ -функциях на границах интервала (0, 1) уменьшаются. При этом возрастает максимальное значение  $P(z)$  внутри интервала (0, 1). Этот максимум смещается в сторону меньших значений концентрации, а сама функция распределения становится существенно несимметричной. При дальнейшем уменьшении уровня пульсаций концентрации функция распределения плотности вероятностей концентрации пассивной примеси описывается законом, близким к нормальному, причем максимум этой функции смещается к значению  $z=z^0$ . Сходный характер изменения  $P(z)$  в зависимости от  $\theta^0$  наблюдается и при горении пропана в воздухе.



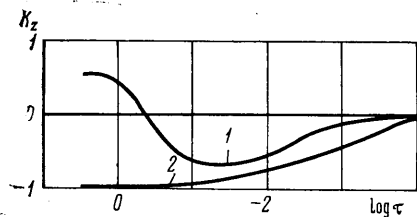
Фиг. 3

На фиг. 3 приведены зависимости функций распределения плотности вероятностей концентрации пассивной примеси в турбулентной жидкости в зависимости от  $z$  при максимальном уровне пульсаций ( $\gamma=0$ ) для случая горения водорода (кривая 1), пропана (кривая 2) в воздухе, а также распределение плотности вероятностей при течении в канале жидкости с постоянной плотностью (кривая 3). Эти данные свидетельствуют о том, что распределение плотности вероятностей концентрации в несжимаемой жидкости и в среде с переменной плотностью заметно различаются. Расчеты средней плотности, проведенные с использованием решения уравнения для  $P(z)$  и аппроксимаций для  $P(z)$  из [2, 3], в которых влияние переменности плотности не учитывалось, показали значительное расхождение.

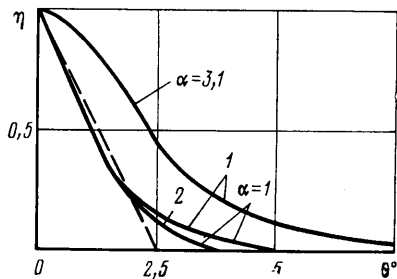
Использование функции распределения плотности вероятностей концентрации пассивной примеси позволит не только определить средние значения параметров течения, но также вычислить различные корреляции, связанные с пульсациями концентрации. В частности, при большом уровне пульсаций в уравнении диффузии важную роль приобретает корреляция  $\langle \rho'z' \rangle$ . На фиг. 4 показано изменение этой корреляции в виде зависимости величины  $K_z = \langle \rho'z' \rangle / (\langle \rho \rangle \langle z \rangle) = z^0 / \langle z \rangle - 1$  от параметра  $\tau$  (кривые 1 и 2 —  $K_z$  при горении пропана и водорода соответственно). При  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $K_z = -0,95$  для горящего водорода и  $K_z = 0,5$  для горящего пропана. Видно, что при умеренных значениях пульсаций величина  $\langle \rho'z' \rangle$  велика и ее надо учитывать в уравнении диффузии.

Рассмотрим влияние пульсаций концентрации на степень завершенности процесса горения. Оказалось, что при уменьшении интенсивности

пульсаций концентрации относительная плотность монотонно уменьшается, а полнота сгорания растет. На фиг. 5 приведены зависимости  $\eta$  от уровня пульсаций концентрации для случая горения пропана в воздухе при  $\alpha=1$  и горения водорода в воздухе при  $\alpha=1$  и 3,1 (кривые 1 и 2 — горение водорода и пропана в воздухе соответственно). Оказалось, что при завершении процесса горения в случае  $\alpha=1$  изменение уровня пульсаций концентрации на 2,5% приводит к изменению полноты сгорания на 1%. При увеличении  $\alpha$  влияние пульсаций концентрации на степень завершенности процесса горения уменьшается.



Фиг. 4



Фиг. 5

При малом уровне пульсаций концентрации пассивной примеси ( $\tau \rightarrow 0$ )  $P(z)$  описывается нормальным законом (2.16). В этом случае при  $|\alpha-1| \ll 1$ , линеаризуя соотношение для полноты сгорания, можно получить

$$(3.18) \quad \theta^\circ = \left( \frac{1-\alpha}{2} + \varphi \right) \sqrt{\frac{2\pi s}{1+s}}, \quad \varphi = 1 - \eta$$

где  $s$  — стехиометрический коэффициент.

Эта зависимость нанесена на фиг. 5 пунктиром. Оказалось, что линейное соотношение (3.18) хорошо согласуется с точным решением вплоть до значений пульсаций  $\theta^\circ \approx 1,5$ .

В заключение отметим, что полученные здесь функции распределения плотности вероятностей концентрации пассивной примеси хотя и найдены для простейшего случая одномерного течения, более информативны и описывают большее число особенностей поведения  $P(z)$ , чем различные приближенные зависимости, обычно применяемые при исследовании турбулентного диффузионного горения [1–5]. К тому же анализ опытных данных для  $P(z)$  в неоднородных течениях (струя, факел горения [18, 19]) показал, что полученные в данной работе  $P(z)$  близки к этим опытным данным. Поэтому при расчетах двумерных течений можно предположить, что функция распределения плотности вероятностей концентрации  $P(z, z^\circ, \theta^\circ)$  не сильно отличается от функции распределения плотности вероятностей концентраций в двумерных течениях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Влияние пульсаций концентрации на диффузионное горение. — В кн.: Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение гетерогенных и газовых систем. Черноголовка, 1977, с. 57.
2. Khalil E. E., Spalding D. B., Whitelaw J. H. The calculations of local flow properties in two-dimensional furnaces. — Int. J. Heat and Mass Transfer, 1975, v. 18, № 6, p. 775.



3. *Lockwood F. C., Naguib A. S.* The prediction of the fluctuations on the properties of free, round-jet, turbulent, diffusion flames.— *Combustion and Flame*, 1975, v. 24, № 1, p. 109.
4. *Лебедев А. Б.* Применение уравнения для пульсаций концентрации при расчете турбулентных течений струйного типа.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1978, № 5, с. 46.
5. *Spralding D. B.* Concentration fluctuations in round turbulent free jet.— *Chem. Eng. Sci.*, 1971, v. 26, № 1, p. 95.
6. *Кузнецов В. Р.* Вероятность концентрации пассивной примеси в турбулентных потоках с поперечным сдвигом.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1972, № 5, с. 85.
7. *Кузнецов В. Р.* Смешение до молекулярного уровня и развитие химической реакции в турбулентном потоке.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1977, № 3, с. 32.
8. *Dorazo C.* A probabilistic approach to turbulent flame theory.— *Acta Astronaut.*, 1976, v. 3, № 9—10, p. 853.
9. *Безуглов В. А.* Измерение скорости переноса концентрации.— *Тр. 20-й Науч. конф. Моск. физ.-техн. ин-та. Сер. Аэрофиз. и прикл. матем. Ч. 1. Долгопрудный*, 1974. Долгопрудный, 1975, с. 147.
10. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— *Докл. АН СССР*, 1941, т. 30, № 4, с. 299.
11. *Обухов А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока.— *Докл. АН СССР*, 1941, т. 32, № 1, с. 22.
12. *Кузнецов В. Р., Расцупкин В. И.* Распределение вероятностей и условное осреднение в турбулентных потоках.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1977, № 6, с. 31.
13. *Uberoi M. S., Singh P. I.* Turbulent mixing in a two-dimensional jet.— *Phys. Fluids*, 1975, v. 18, № 7, p. 764.
14. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
15. *Miyawaki O., Tsujikawa H., Uraguchi Y.* Turbulent mixing in multi-nozzle injection tubular mixer.— *J. Chem. Eng. Japan*, 1974, v. 7, № 1, p. 52.
16. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Т. 1—2. М.: Наука, 1965—1967.
17. *Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П.* Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1977, № 1, с. 30.
18. *Kennedy I. M., Kent J. H.* Laser scattering measurements in turbulent diffusion flames.— *AIAA Pap.*, 1980, № 206, 4 p.
19. *La Rue J. C., Libby P. A.* Temperature fluctuations in the plane turbulent wake.— *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, № 11, p. 1956.

Москва

Поступила в редакцию  
24.VII.1979