

УДК 532.51.011

О ГЕНЕРАЦИИ ВИХРЕЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ

ДОВЖЕНКО В. А., ОБУХОВ А. М., ПОНОМАРЕВ В. М.

Исследование механизма генерации вихревых возмущений в двумерном потоке со сдвигом в последние годы привело к получению ряда конкретных результатов, допускающих сопоставление с экспериментом [1—5]. При этом выяснилось, что весьма удобной моделью основного потока является поле скоростей, возникающее под действием стационарной внешней силы, периодической по одной из декартовых координат («привод», обеспечивающий подвод энергии). В указанных выше работах показано, что достаточно вытянутые вдоль потока вихревые возмущения оказываются неустойчивыми — соответствующее критическое число Рейнольдса эффективно вычисляется в зависимости от продольного волнового числа. Стационарная величина амплитуды возмущения (в слабозакритическом режиме) также определяется, но уже в квадратичном приближении, на основе учета нелинейного взаимодействия небольшого числа «активных» мод.

Наиболее детальные расчеты формы вихревых возмущений, генерируемых в периодическом двумерном потоке, выполнены в [6]. Форма вторичного течения (в закритическом режиме) оказалась в хорошем согласии с результатами лабораторного эксперимента, выполненного с раствором медного купороса в прямоугольной кювете [7], причем возбуждение основного течения осуществлялось магнитогидродинамическим методом [8].

Представляет интерес, в особенности для геофизических приложений, рассмотрение двумерных гидродинамических систем с аксиальной симметрией. Теоретический анализ устойчивости аксиально-симметричного течения вязкой жидкости с заданным распределением азимутальной скорости в кольцевом канале был выполнен в работе [9]. Настоящая статья является развитием этого исследования и содержит сопоставление теоретических выводов о возможности генерации возмущений в аксиально-симметричном сдвиговом течении с результатами лабораторного эксперимента, осуществленного в Институте физики атмосферы [10].

Показано, что крупномасштабная структура вихревых возмущений хорошо описывается в рамках малопараметрической модели, а условия возникновения таких возмущений (критические значения чисел Рейнольдса) находятся в удовлетворительном согласии с теорией, развитой в [9].

1. Экспериментальное исследование движения жидкости в кольцевом канале проводилось на установке, позволяющей создавать регулируемое аксиально-симметричное внешнее силовое поле. Жидкость приводилась в движение магнитогидродинамическим методом. С этой целью через жидкость (водный раствор медного купороса с небольшой добавкой серной кислоты) в присутствии аксиально-симметричного магнитного поля пропускался радиальный электрический ток. Внешнее магнитное поле возбуждалось электромагнитом, выполненным в форме круглой болванки (высотой около 8 и диаметром 35 см) из мягкого железа с цилиндрическими пазами, в которые помещались обмотки. Интенсивность и распределение магнитного поля H по радиусу можно регулировать, варьируя питание обмоток.

Жидкость наливалась в цилиндрическую ванночку из оргстекла, которая устанавливалась на торец электромагнита. Помещенные в ванночку медные электроды, выполненные в виде цилиндрических колец, ограничивали рабочую кольцевую область. Вся система центрировалась относи-

тельно магнитной оси электромагнита. Более подробное описание установки и некоторые технологические детали приведены в [10].

Радиальное распределение силового поля задавалось в соответствии с моделью, применяемой в [9]

$$(1.1) \quad \mathbf{F} = \gamma g(z) J_1(r/R_1) \mathbf{i}_\varphi$$

где r — расстояние до оси, R_1 — основной масштаб длины, J_1 — функция Бесселя, $g(z)$ — некоторая весовая функция, учитывающая изменение магнитного поля по оси z .

Принимая во внимание выражение для магнитогидродинамической силы в аксиальной системе

$$F_\varphi = \frac{1}{c} j_r H_z, \quad j_r = \frac{I}{2\pi Z_0 r}$$

получаем искомую модель для распределения нормальной (к плоскости торца электромагнита) составляющей магнитного поля H_z :

$$(1.2) \quad H_z = H_z^{(0)} g(z) J_1(r/R_1) \frac{r}{R_1}, \quad \gamma = \frac{H_z^{(0)} I}{2\pi c Z_0 R_1}$$

В этих формулах I — полная сила тока, пропускаемого через электроды, c — электродинамическая постоянная, Z_0 — высота слоя жидкости, координата z отсчитывается от дна кольцевого канала, $H_z^{(0)}$ — характерное значение магнитного поля на этом уровне.

Распределение магнитного поля, создаваемое электромагнитом, исследовалось одним из авторов установки, Ю. В. Новиковым, подтвердившим близость поля к расчетному (1.2) с весовой функцией

$$(1.3) \quad g(z) = \exp(-z/Z_1)$$

причем высота спадаания Z_1 составляла 22 мм.

Ламинарный режим движения вязкой жидкости для рассмотренной выше модели «разгонного» поля соответствует аксиально-симметричному решению уравнений Навье — Стокса для кольцевого канала со свободной поверхностью.

Если радиусы внутреннего и внешнего электродов R_i и R_o совпадают с узловыми линиями поля H_z

$$(1.4) \quad \frac{R_i}{R_1} = \lambda_{k'}, \quad \frac{R_o}{R_1} = \lambda_k$$

где λ_k — значение k -того корня функции Бесселя $J_1(\lambda)$ ($\lambda_0=0$), и если пренебречь центробежной силой V_φ^2/r , то это решение принимает вид

$$(1.5) \quad \mathbf{V} = \frac{\gamma}{\mu} b(z) J_1\left(\frac{r}{R_1}\right) \mathbf{i}_\varphi, \quad b'' - \frac{b}{R_1^2} + g = 0$$

Получим оценку точности этого решения при малой высоте слоя жидкости $H = \frac{Z_0}{R_1} \ll 1$.

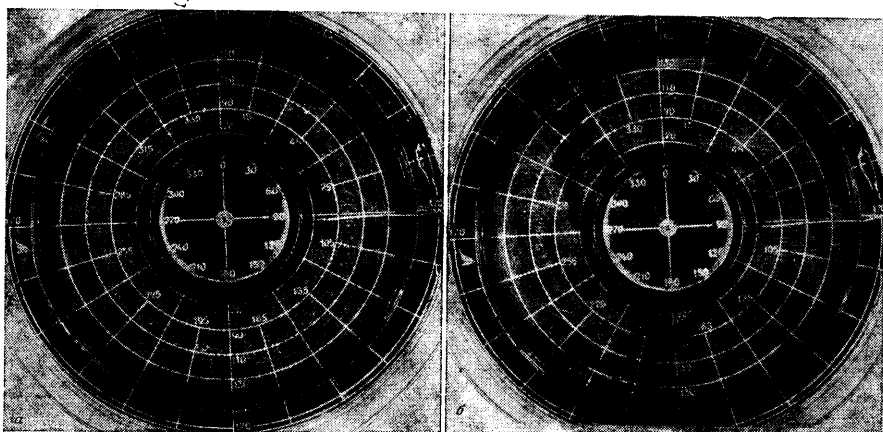
Полагая поправку к скорости (1.5) малой, пренебрежем нелинейными членами и производными по r в уравнениях движения. Тогда проекция уравнения движения на ось r дает

$$(1.6) \quad \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} + \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

При осевой симметрии течения уравнение неразрывности можно представить в виде

$$(1.7) \quad \int_0^{z_0} V_r dz = 0$$

На стенках канала выполняются условия прилипания. На свободной поверхности жидкости, ввиду того что вязкость воздуха на два порядка



Фиг. 1

меньше вязкости воды, можно считать, что касательные напряжения обращаются в нуль. Соответствующие граничные условия при $z=Z_0$ принимают вид

$$(1.8) \quad \frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 0$$

Для тонкого слоя жидкости можно пренебречь изменением давления поперек слоя, и из (1.6) получаем решение

$$(1.9) \quad V_r = \frac{\rho \gamma^2 J_1^2 \left(\frac{r}{R_1} \right)}{\mu^3 r} \left[\int_0^z ds \int_0^s b^2(t) dt + A(r) \frac{z^2}{2} + B(r) \right]$$

в котором $A(r)$ и $B(r)$ определяются из (1.7) и (1.8).

Ограничиваясь квадратичными членами в разложении $b(z)$ по степеням z , получаем из (1.5)–(1.9)

$$(1.10) \quad b(z) = z \left(Z_0 - \frac{z}{2} \right), \quad V_r = \text{Re} \frac{H^k J_1(r/R_1)}{2 r/R_1} S(\xi) V_\varphi$$

$$S(\xi) = -\frac{1}{210} (7\xi^4 - 28\xi^3 + 14\xi^2 + 28\xi - 16),$$

$$\xi = \frac{z}{Z_0}, \quad \text{Re} = \frac{\rho \gamma R_1^3}{\mu^2}$$

Таким образом, в достаточно тонком слое течение, обусловленное центробежной силой, является слабым. Очевидно, им можно пренебречь и при достаточно большой высоте слоя, если профиль скорости (1.5) слабо ме-

няется по высоте (например, при $g = \text{const}$) и центробежная сила в основном уравновешивается градиентом давления.

В основной серии экспериментов использовались электроды с радиусами $R_i = 56$ и $R_o = 150$ мм, что соответствует $k' = 1$ и $k = 3$ в (1.4) при $R_i = 14,7$ мм. Измеренное значение вязкости жидкости $\mu = 1,27 \cdot 10^{-2}$ П при плотности $\rho = 1,07$ г·см⁻³, $H_z^{(0)} = 240$ Э. Высота слоя жидкости в большинстве экспериментов составляла 10 мм.

При достаточно малой величине тока в канале возникает осесимметричное течение, образованное двумя встречными соприкасающимися потоками жидкости. При превышении критической величины тока I_* , зависящей от высоты слоя жидкости, осесимметричное течение становится неустойчивым и в поле течения возникает система вихрей. На фиг. 1, а и б приведены фотографии закритического течения при значениях полного тока $I = 30$ и 60 мА соответственно. Экспериментальное значение критического тока при $Z_o = 10$ мм $I_* \approx 20$ мА.

Для указанных выше условий $Re \approx 10^3$ и оценка (1.10) дает во внешней части потока при $\xi > 1/2$ соотношение $|V_r| < 0,1 |V_\varphi|$.

При теоретическом анализе устойчивости течений, моделируемых указанным выше методом, оказываются существенными эффекты трения жидкости о стенки канала [7] и изменение спектра допускаемых возмущений поля скорости по сравнению с рассматриваемым в работах [1–5].

Ниже приводится исследование устойчивости осесимметричного режима течения, отвечающего описанной выше модели с учетом вертикального распределения скорости, близкого к реальному, и строится малопараметрическая модель, позволяющая описать крупномасштабную структуру течения в закритическом режиме.

2. Движение жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса с условиями прилипания на стенках и обращения в нуль касательных напряжений на свободной поверхности

$$(2.1) \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} (-\nabla p + \mathbf{F} + \mu \Delta \mathbf{V}), \quad \text{div } \mathbf{V} = 0$$

$$(2.2) \quad \mathbf{V} = 0 \quad (z = 0); \quad \mathbf{V} = 0 \quad (r = R_i, R_o)$$

$$(2.3) \quad W = 0, \quad \frac{\partial V_r}{\partial z} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = Z_o)$$

Осевая и радиальная компоненты электромагнитной силы в эксперименте малы и при анализе движения не учитываются.

Перейдем в системе (2.1) к безразмерным переменным

$$(2.4) \quad r' = \frac{r}{R_i}, \quad z' = \frac{z}{R_i}, \quad t' = \frac{\gamma R_i}{\mu} t,$$

$$\mathbf{U} = \frac{\mu}{\gamma R_i^2} \mathbf{V}, \quad p' = \frac{\mu^2}{\rho \gamma^2 R_i^4} p$$

Опуская ниже штрихи у безразмерных переменных, представим с учетом (1.1) и (1.3) уравнения движения в виде

$$(2.5) \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \left[\exp\left(-\frac{z}{H_1}\right) J_1(r) \mathbf{i}_\varphi + \Delta \mathbf{U} \right]$$

$$\text{div } \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{U} = 0 \quad (z = 0); \quad \mathbf{U} = 0 \quad (r = \lambda_{k'}, \lambda_k)$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial z} = \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} = 0, \quad U_z = 0 \quad (z=H)$$

$$H = \frac{Z_0}{R_1}, \quad H_1 = \frac{Z_1}{R_1}, \quad \text{Re} = \frac{\rho \gamma R_1^3}{\mu^2}$$

Пренебрегая эффектами, обусловленными центробежной силой, получаем выражение для скорости основного течения

$$(2.6) \quad \mathbf{U} = \mathbf{u}_0 = b(z) J_1(r) \mathbf{i}_\varphi$$

$$b(z) = \frac{H_1^2}{H_1^2 - 1} \left[\exp\left(-\frac{z}{H_1}\right) - \frac{\text{ch}(H-z)}{\text{ch} H} + \frac{1}{H_1} \frac{\exp(-H/H_1) \text{sh} z}{\text{ch} H} \right]$$

Представляя решение уравнений (2.5) в виде $\mathbf{U} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}$, получаем уравнения для возмущений поля скорости

$$(2.7) \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L\mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{u}$$

$$\text{div} \mathbf{u} = 0, \quad L\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0 \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}_0$$

Для решения (2.7) используем разложение поля скорости по системе функций задачи на собственные значения

$$(2.8) \quad \Delta \mathbf{u}_\alpha + k_\alpha^2 \mathbf{u}_\alpha = -\nabla p_\alpha, \quad \text{div} \mathbf{u}_\alpha = 0$$

с описанными выше граничными условиями.

Легко видеть, что эта система функций ортогональна в энергетической норме

$$(2.9) \quad (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_{\alpha'}) = \int_V \mathbf{u}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_{\alpha'} d\tau = N_\alpha^2 \delta_{\alpha\alpha'}$$

Для коэффициентов C_α в разложении $\mathbf{u} = \sum_\alpha C_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ из (2.7) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию возмущений в линейном приближении

$$(2.10) \quad N_\alpha^2 \left[\frac{dC_\alpha}{dt} + \frac{k_\alpha^2}{\text{Re}} C_\alpha \right] + \sum_{\alpha'} W_{\alpha\alpha'} C_{\alpha'} = 0$$

$$W_{\alpha\alpha'} = \int L\mathbf{u}_\alpha \bar{\mathbf{u}}_{\alpha'} d\tau$$

Для расчета устойчивости основного течения (2.6) используется урезанная система уравнений, получаемая из (2.10) отбрасыванием уравнений, описывающих развитие мелкомасштабных мод. Количество учитываемых крупномасштабных мод определяется из условия, что увеличение их числа в 2 раза практически не влияет на величину инкрементов роста неустойчивых возмущений.

3. В силу малой толщины слоя жидкости будем, как и в чисто двумерной модели [9], описывать поле возмущений на каждом уровне функцией

тока $\Psi(r, \varphi, z)$ (ее можно рассматривать как z -компоненту векторного потенциала скорости), пренебрегая динамическими эффектами, связанными с наличием вертикальной составляющей скорости u_z . В этом случае вместо (2.8) рассмотрим уравнения с граничными условиями, следующими из (2.1) и (2.2):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Delta \Omega_\alpha + k_\alpha^2 \Omega_\alpha &= 0, \quad \Omega_\alpha = -\Delta_2 \Psi_\alpha \\ u_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad \Delta_2 = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial r} = 0 \quad (r = \lambda_{k'}, \lambda_k) \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \Psi_\alpha = \Omega_\alpha = 0 \quad (z=0); \quad \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial z} = 0 \quad (z=H)$$

Представляя решение (3.1) в виде $\Psi_\alpha = K(z) \psi_\alpha(r, \varphi)$, $\Omega_\alpha = K(z) \omega_\alpha(r, \varphi)$, получаем уравнения

$$(3.3) \quad \Delta \omega_\alpha + h_\alpha^2 \omega_\alpha = 0, \quad \omega_\alpha = -\Delta \psi_\alpha$$

$$(3.4) \quad K'' + f^2 K = 0, \quad k_\alpha^2 = h_\alpha^2 + f^2$$

Решение (3.3) имеет вид [9]

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \omega_\beta(r, \varphi) &= \omega_\beta(r) \exp(in\varphi), \quad \psi_\beta(r, \varphi) = \psi_\beta(r) \exp(in\varphi) \\ \omega_\beta(r) &= A_\beta J_n(h_\beta r) + B_\beta Y_n(h_\beta r) \\ \psi_\beta(r) &= \frac{1}{h_\beta^2} [\omega_\beta(r) + C_\beta (h_\beta r)^n + D_\beta (h_\beta r)^{-n}] \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь J_n и Y_n — функции Бесселя первого и второго рода соответственно, параметр h_β и коэффициенты A_β , B_β , C_β , D_β определяются из граничных условий при $r = \lambda_{k'}, \lambda_k$.

Удовлетворяющее граничным условиям решение (3.4)

$$(3.6) \quad K_m = \sin f_m z, \quad f_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{H}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Система функций (3.2) нумеруется индексом $\alpha = \{m, n, j\}$, где индекс $j = 1, 2, 3, \dots$ нумерует функции (3.5) при фиксированном n в порядке возрастания h_β , $\beta = \{n, j\}$.

Для коэффициентов взаимодействия в (2.10) получаем выражения

$$(3.7) \quad \begin{aligned} W_{\alpha\alpha'} &= S_{mm'} V_{\beta\beta'} \\ V_{\beta\beta'} &= 2\pi i \delta_{nn'} n \int_{\lambda_{k'}}^{\lambda_k} J_1(r) [\omega_\beta(r) - \psi_\beta(r)] \bar{\psi}_{\beta'}(r) dr \\ S_{mm'} &= \int_0^H b(z) \sin f_m z \sin f_{m'} z dz \end{aligned}$$

Коэффициенты взаимодействия $V_{\beta\beta'}$ возникают в двумерной задаче и использовались для расчета устойчивости в [9], для $S_{mm'}$ получаем с уче-

том (2.6)

$$S_{mm'} = \frac{HH_1^2}{H_1^2 - 1} \left\{ (-1)^{m-m'} \exp\left(-\frac{H}{H_1}\right) [L_-(1) + L_+(1) - L_-(H_1) - L_+(H_1)] - \frac{H_1 \operatorname{sh} H + \exp(-H/H_1)}{\operatorname{ch} H} \times \right. \\ \left. \times [L_-(1) - L_+(1)] + L_+(H_1) - L_-(H_1) \right\} \\ L_-(\xi) = \frac{1}{(H/\xi)^2 + (m-m')^2 \pi^2}, \quad L_+(\xi) = \frac{1}{(H/\xi)^2 + (m+m'+1)^2 \pi^2}$$

Для глубокого слоя жидкости ($H \rightarrow \infty$) при слабо меняющейся по высоте силе ($H/H_1 \rightarrow 0$) $S_{mm'} \rightarrow 1/2 H \delta_{mm'}$ и уравнения (2.10) разделяются по индексу m . В этом приближении трение жидкости о дно сосуда не играет существенной роли и анализ устойчивости дает результаты [9]. В частности, при $k'=1$ и $k=3$ критическое число Рейнольдса Re_* определяется возмущениями с волновым числом $n=3$.

При $H \sim 1$ и $H_1 \sim 1$ начальные возмущения с $n=3$ также остаются наиболее опасными, а величина критического числа Рейнольдса оказывается сильно зависящей от H . В этих условиях преобладающую роль играет трение жидкости о дно канала, которое приводит к увеличению Re_* по сравнению с двумерным случаем более чем на порядок. Зависимость $Re_*(H)$ при фиксированных значениях параметра H_1 приведена на фиг. 2, где также показаны точками экспериментальные значения критического числа Рейнольдса. Хорошее согласие теоретических и экспериментальных значений Re_* подтверждает предположение о том, что развитие неустойчивости определяется «плоскими» движениями жидкости.

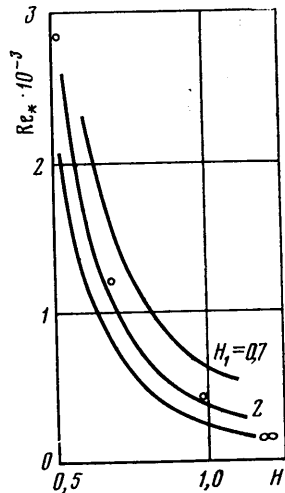
4. Для количественного описания закритического режима течения построим малопараметрическую модель развития неустойчивости, учитывая только взаимодействие основного потока с модами, отвечающими заданному волновому числу n . Можно показать, что в данном случае, как и в [9], основной вклад в собственную функцию линеаризованной задачи (2.10), соответствующую неустойчивым возмущениям поля скорости, вносят моды наиболее крупных масштабов. Поэтому в простейшем варианте модели следует учесть моды с $m=0$ и $j=1$ и 2. Расчеты показывают, что в этом приближении величина критического числа Рейнольдса оказывается завышенной примерно на 20–30%. Для достижения точности Re_* в 1% при $H \sim 1$ и $H_1 \sim 1$ необходимо учитывать моды с $0 \leq m \leq M$ и $1 \leq j \leq N$, где M и N порядка 10.

Представим поле скорости в виде

$$(4.1) \quad U = \Omega u_0 - C_1 u_{0n1} + \bar{C}_1 \bar{u}_{0n1} + C_2 u_{0n2} + \bar{C}_2 \bar{u}_{0n2}.$$

Ниже индексы $m=0$ и n фиксированы и потому опускаются. Из (2.7) получаем методом Галеркина систему уравнений

$$(4.2) \quad N_0^2 \left[\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\theta}{\operatorname{Re}} (\Omega - 1) \right] + W_0 (C_1 \bar{C}_2 - \bar{C}_1 C_2) = 0 \\ N_1^2 \left[\frac{dC_1}{dt} + \frac{k_1^2}{\operatorname{Re}} C_1 \right] + \Omega (W_{11} C_1 + W_{12} C_2) = 0$$



Фиг. 2

$$N_2^2 \left[\frac{dC_2}{dt} + \frac{k_2^2}{\text{Re}} C_2 \right] + \Omega (W_{21} C_1 + W_{22} C_2) = 0$$

$$\theta = \int_0^H g(z) b(z) dz \bigg/ \int_0^H b^2(z) dz, \quad W_0 = W_{12} - W_{21}$$

Система (4.2) имеет устойчивое при $\text{Re} < \text{Re}_*$ решение $\Omega = 1$, $C_1 = C_2 = 0$, которое при $\text{Re} > \text{Re}_*$ переходит в устойчивое решение

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\text{Re}_*}{\text{Re}}, \quad C_1 = A e^{i\delta t}, \quad C_2 = f e^{i\gamma} C_1 \\ A &= \frac{\sqrt{(\text{Re} - \text{Re}_*) \text{Re}_*}}{k_1 \text{Re}} \sqrt{-\frac{w_{12}}{2w_0}} \\ \text{Re}_* &= \left(\frac{w_{12} w_{21}}{k_1^2 k_2^2} - \frac{(w_{11} - w_{22})^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} \right)^{-1/2} \\ f &= -\frac{k_1^2}{w_{12}} \sqrt{\frac{(w_{11} - w_{22})^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2} + \frac{1}{\text{Re}_*^2}}, \quad \text{tg } \gamma = \frac{k_1^2 + k_2^2}{\text{Re}_* (w_{11} - w_{22})} \\ \frac{\delta}{\Omega} &= \frac{k_1^2 w_{22} + k_2^2 w_{11}}{k_1^2 + k_2^2}, \quad w_0 = \frac{iW_0}{\theta N_0^2}, \quad w_{ij} = \frac{iW_{ij}}{N_i^2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Решению (4.3) соответствует функция тока на поверхности $z = H$

$$\Psi_s = \frac{\text{Re}_*}{\text{Re}} b(H) J_0(r) + 2A [\psi_1(r) \cos(n\varphi + \delta t) + f \psi_2(r) \cos(n\varphi + \delta t + \gamma)] \quad (4.4)$$

В лабораторной системе отсчета это течение имеет периодическую структуру по углу φ и времени t . В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $-\delta/n$, движение жидкости стационарно и соответствующая функция тока имеет вид

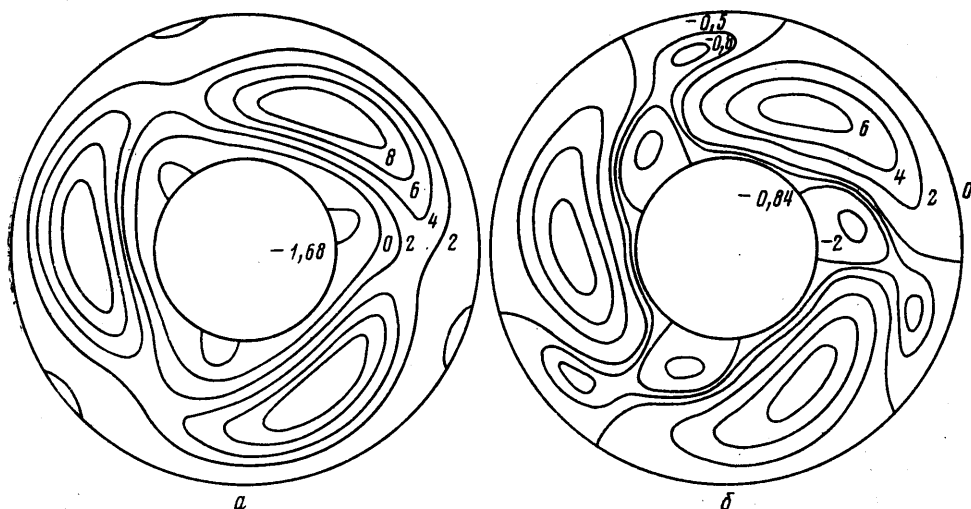
$$\Psi_r = \Psi_s(\delta=0) - \frac{\delta r^2}{2n} \quad (4.5)$$

Однако ввиду малости δ ($\delta \sim 10^{-4}$) для рассматриваемого течения различие между (4.4) и (4.5) при соответствующем выборе момента времени t незначительно.

Течение, описываемое функцией тока (4.4), показано на фиг. 3 для $n=3$ (на кривых указаны значения $\Psi_s \cdot 10^2$). Отношение Re/Re_* на этих фигурах выбрано в соответствии с величиной отношения полного тока к его критическому значению для фотографий на фиг. 1. $\text{Re}/\text{Re}_* = 1,5$ на фиг. 3, а и 3,0 на фиг. 3, б.

Видно, что функция тока (4.4) хорошо воспроизводит крупномасштабную структуру течения, наблюдаемую в эксперименте. При слабой надкритичности в поле течения возникают три вихря, обтекаемые основным потоком. С увеличением отношения Re/Re_* появляется еще шесть вихрей с противоположным направлением вращения — по три у внутренней и внешней стенок. Интенсивность вихрей у внешней стенки относительно мала, и поэтому на фотографиях они часто не проявляются.

Заметим, что находящейся внутри кольцевой области узловой линии внешнего поля $r=R^*$ отвечает значение $k=2$ ($R^* = \lambda_2 R_1$). Вблизи этой ли-



Фиг. 3

нии находится точка перегиба V_ϕ для соответствующего ламинарного течения, где и начинает проявляться прежде всего неустойчивость Кельвина — Гельмгольца.

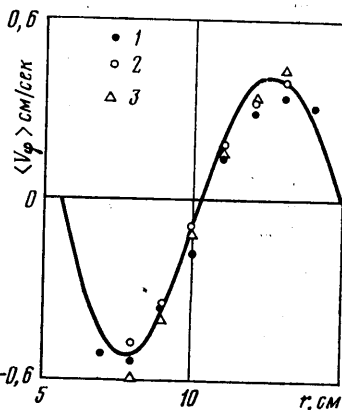
По траекториям, образованным метящими частицами на фотографиях, определялось распределение скорости на внешней поверхности жидкости, что позволяет получить также количественное сопоставление результатов, следующих из модели, с экспериментальными данными.

Согласно рассматриваемой модели, поле скорости в закритическом режиме течения можно разделить на поля скорости, соответствующие основному потоку и возбужденным модам, с помощью осреднения по углу ϕ . После такого осреднения из (4.4) получаем

$$\langle u_\phi \rangle = \frac{\text{Re}_*}{\text{Re}} b(H) J_1(r)$$

Размерная же величина скорости оказывается не зависящей от тока

$$(4.6) \quad \langle V_\phi \rangle = \frac{\mu}{\rho R_1} \text{Re}_* b(H) J_1(r)$$



Фиг. 4

Сравнение теоретической зависимости $\langle V_\phi \rangle$ от радиуса с экспериментальными данными для $I=30, 40$ и 50 мА приведено на фиг. 4 (кривые 1—3 соответственно). Таким образом, в рассматриваемом диапазоне чисел Рейнольдса эксперимент подтверждает стабилизацию основной (питающей) моды.

В пределах точности эксперимента амплитуда возбужденной моды пропорциональна квадратному корню из превышения числа Рейнольдса над критическим значением, что следует из (4.3) и неоднократно указывалось в ряде теоретических работ.

На описанной выше аксиальной установке можно получить моды с более высоким индексом симметрии, меняя диаметры внешнего и внутреннего электродов (при сохранении среднего диаметра), т. е. работая с более

узкими каналами. Таким образом, удавалось получать возбуждение мод с последовательным увеличением n на 1 до $n=12$.

Лабораторное моделирование аксиально-симметричных сдвиговых течений открывает широкие возможности изучения не только качественных, но и количественных закономерностей возникновения и развития вихревых возмущений — начального этапа формирования квазидвумерного турбулентного потока.

Авторы выражают искреннюю благодарность своим коллегам Е. Б. Гледзеру и Ф. В. Должанскому за участие в обсуждении полученных результатов, И. М. Яворской за полезные замечания, а также Г. Г. Дементьеву и Ю. В. Новикову за разработку и наладку экспериментальной установки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 1140.
2. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 453.
3. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М.: Наука, 1974, 160 с.
4. Кляцкин В. И. К нелинейной теории устойчивости периодических течений.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 263.
5. Непомнящий А. А. Об устойчивости вторичных течений вязкой жидкости в неограниченном пространстве.— ПММ, 1976, т. 40, вып. 5, с. 886.
6. Белоцерковский С. О., Мирабель А. П., Чусов М. А. О построении закритического режима для плоского периодического течения.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 1, с. 11.
7. Бондаренко Н. Ф., Гак М. З., Должанский Ф. В. Лабораторная и теоретическая модели плоского периодического течения.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1979, т. 15, № 10, с. 1017.
8. Бондаренко Н. Ф., Гак М. З. Применение магнитогиродинамических эффектов в электролитах для моделирования вихревых гидродинамических процессов.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 2, с. 207.
9. Пономарев В. М. Об устойчивости одного класса осесимметричных течений несжимаемой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1, с. 3.
10. Довженко В. А., Новиков Ю. В., Обухов А. М. Моделирование процесса генерации вихрей в аксиально-симметричном азимутальном поле магнитогиродинамическим методом.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1979, т. 15, № 11, с. 1199.

Москва

Поступила в редакцию
18.XII.1979