

УДК 532.5.013.4 : 538.3/4

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ТЕЧЕНИЕ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ  
ЖИДКОСТИ  
ПРИ ОКИСЛИТЕЛЬНО-ВОССТАНОВИТЕЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ  
НА ЭЛЕКТРОДАХ И РЕКОМБИНАЦИИ

ЖАКИН А. И., ТАРАПОВ И. Е.

Эксперименты показывают, что слабопроводящая жидкость в плоскопараллельной системе электродов при достаточно большой напряженности поля приходит в движение [1—5]. Потеря устойчивости вызывается образованием гомозарядов вблизи электродов и действием кулоновских сил на эти заряды. Образование объемного гомозаряда обычно связывают с окислительно-восстановительными электродными реакциями и объемной рекомбинацией ионов, образовавшихся на электродах [1—4].

В данной работе рассматривается устойчивость слабопроводящей жидкости в плоскопараллельной системе электродов с симметричным распределением объемного заряда. Методами теории ветвления решений строится стационарное течение, развивающееся после потери устойчивости, и исследуется его устойчивость.

**1. Постановка задачи.** Пусть расстояние между электродами равно  $2d$  и между ними поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ . Считаем, что жидкость несжимаема, а перенос зарядов в ней осуществляется двумя сортами одновалентных ионов положительного и отрицательного знаков, имеющих соответственно объемные плотности  $q_+$ ,  $q_-$  и подвижности  $b_+$ ,  $b_-$ . Будем пользоваться уравнениями движения в следующем виде [1, 2]:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \rho(\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}) &= -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} + q \mathbf{E} \quad (q = q_+ - q_-) \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi q, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \\ \pm \partial q_{\pm} / \partial t + \operatorname{div} (q_{\pm} b_{\pm} \mathbf{E} \pm q_{\pm} \mathbf{v}) &= \mp \alpha_p q_{\pm} q \end{aligned}$$

Здесь  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\epsilon$ ,  $\alpha_p$  — соответственно постоянные плотность, динамическая вязкость, диэлектрическая проницаемость и коэффициент объемной рекомбинации.

В уравнениях (1.1), описывающих движение зарядов, опущены диффузионные члены, т.е. сделано предположение  $D_{\pm} |\nabla q_{\pm}| \ll q_{\pm} b_{\pm} |E|$ , где  $D_{\pm}$  — коэффициенты диффузии положительных (при верхнем знаке) и отрицательных (при нижнем) зарядов. Это равенство в слабопроводящих жидкостях выполняется для достаточно больших напряженностей поля (порядка нескольких  $\text{кв/см}$ ) и небольших градиентов объемных зарядов (например, при отсутствии двойных слоев).

Введем декартову систему координат, поместив начало в середине слоя жидкости и направив ось  $x$  перпендикулярно поверхности электродов (фиг. 1). Тогда граничные условия для скорости и потенциала поля примут вид

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = 0 \quad (x = \pm d), \quad \varphi = U \quad (x = -d), \quad \varphi = 0 \quad (x = d)$$

Далее, для определенности считаем, что электрод  $x = -d$  является анодом:  $U > 0$ .

Одним из наиболее сложных вопросов ЭГД-устойчивости при электрохимических реакциях на поверхностях электродов является вопрос о граничных условиях для зарядов. Например, в [4] предполагалось, что плотности объемных зарядов на электродах должны задаваться:  $q_{\pm} = q_{0\pm}$  ( $x = \pm d$ ), причем  $q_{0\pm} = \text{const}$  и не зависят от напряженности поля (автономный уровень инжекции (см. [4])). При таком предположении возникает трудность в задании  $q_{0\pm}$  и, следовательно, в экспериментальной проверке критерия устойчивости.

Это условие можно получить, используя положения химической кинетики, что позволяет выразить  $q_{0\pm}$  через физические константы жидкости. Действительно, в слабопроводящих жидкостях технической степени чистоты (проводимость  $\sigma \sim 10^{-13} \text{ ом}^{-1} \text{ см}^{-1}$ ) перенос зарядов обычно определяется примесными ионами [3, 4]. Предположим, что эти ионы образуются на электродах за счет электрохимических реакций. Одним из возможных типов таких реакций могут быть окислительно-восстановительные, например восстановительная реакция на катоде  $X + M + e^- \rightarrow C^- + D$ , где X, M — молекулы примеси и жидкости,  $e^-$  — электрон. Если  $C^- = X^-$ , то в реакцию вступают только молекулы примеси, а жидкость является средой, в которой происходит реакция, и  $M = D$ . При  $C^- = M^-$  примесь является катализатором и  $X = D$ .

В общем случае такие реакции не обязательно должны быть окислительно-восстановительными, в них могут принимать участие несколько типов молекул примеси, например [6] на катоде:  $O_2 + 2H_2O + 4e^- \rightarrow 4OH^-$ .

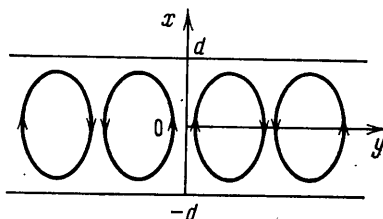
Не конкретизируя вид этих реакций, будем считать: 1) они одностадийные [6]; 2) восстановительная (окислительная) реакция на катоде (аноде) характеризуется константой скорости реакции  $k_-$  ( $k_+$ ); 3) медленной стадией прохождения тока являются электрохимические реакции, так что концентрации молекул примеси можно считать постоянными во всем объеме жидкости; 4) реакции протекают квазистационарно, т. е. все ионы, образующиеся в ходе реакций на электродах, уносятся миграционным потоком:  $j_{\pm} = b_{\pm} q_{\pm} E = e v_{\pm} k_{\pm} N_{\pm}$ . Из этих предположений следует, что граничные условия для плотностей зарядов будут иметь вид

$$(1.3) \quad q_{\pm} = e v_{\pm} k_{\pm} N_{\pm} / b_{\pm} E \equiv q_{0\pm} \quad (x = \mp d)$$

Здесь  $N_+$  ( $N_-$ ) — произведение концентраций молекул примеси, вступающих в реакцию на аноде (катоде),  $v_+$  ( $v_-$ ) — стехиометрический коэффициент положительного (отрицательного) иона. Из (1.3) видно, что автономность электрохимических реакций (постоянство  $q_{0\pm}$ ) будет выполняться, если константы скоростей реакций линейны по полю  $k_{\pm} = k_{\pm}^0 E$ . В этом случае  $q_{0\pm} = e v_{\pm} k_{\pm}^0 N_{\pm} / b_{\pm} = \text{const}$ . Далее, относительно скоростей разрядки отрицательных ионов на аноде (положительных на катоде) будем считать их бесконечными, так что двойные слои на электродах не образуются.

Перейдем к рассмотрению задачи об устойчивости и развитии стационарного течения жидкости. При этом будем предполагать равенство подвижностей и плотностей инжектируемых зарядов:  $b_+ = b_- = b$ ,  $q_{0+} = q_{0-} = q_0$ . Эти условия определяют симметричные распределения поля и объемного заряда в жидкости [1, 4].

Прежде всего сформулируем задачу в безразмерных переменных, выбрав следующие единицы измерения: длины —  $d$ , заряда —  $q_0$ , напряжен-



Фиг. 1

ности  $-U/2d \equiv E_0$ , скорости  $-bE_0$ , давления  $-d/\eta b E_0$ , времени  $-\rho d^2/\eta$ . Сохраняя для безразмерных переменных прежние обозначения, из (1.1) — (1.3) получим

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \partial \mathbf{v} / \partial t + P_e^{-1} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + TCq\mathbf{E} \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi Cq, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \\ \pm P_e \partial q_{\pm} / \partial t + \operatorname{div} (q_{\pm} \mathbf{E} \pm q_{\pm} \mathbf{v}) &= \mp \gamma C q_{\pm} q_{\mp} \end{aligned}$$

$$(1.5) \quad \mathbf{v} = 0 \quad (x = \pm 1); \quad q_{+} = 1, \quad \varphi = 1 \quad (x = -1); \quad q_{-} = 1, \quad \varphi = 0 \quad (x = 1)$$

$$P_e = \frac{\eta}{\rho d b E_0}, \quad C = \frac{q_0 d}{\varepsilon E_0}, \quad T = \frac{\varepsilon d E_0}{\eta b}, \quad \gamma = \frac{\alpha_p \varepsilon}{b}$$

Здесь  $P_e$  — электрическое число Прандтля,  $T$  — критерий устойчивости,  $\gamma$  — параметр, характеризующий уровень рекомбинации,  $C$  — параметр, характеризующий отношение поля, индуцированного объемным зарядом, к внешнему полю. В дальнейшем будем предполагать малость параметра  $C$ .

**2. Равновесие и устойчивость состояния равновесия.** Равновесие жидкости описывается системой (1.4), (1.5) при  $\partial/\partial t \equiv 0$ ,  $\mathbf{v} \equiv 0$ . Разыскивая решение в виде следующих рядов по малому параметру  $C$ , получим

$$(2.1) \quad \begin{aligned} q_{(0)\pm} &= n_{(0)\pm} + C n_{(1)\pm} + C^2 n_{(2)\pm} + \dots \\ \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_{(0)} + C \mathbf{E}_{(1)} + C^2 \mathbf{E}_{(2)} + \dots \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} n_{(0)\pm} &= 1, \quad n_{(1)\pm} = \mp \gamma (x \pm 1), \quad \mathbf{E}_{(0)} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{E}_{(1)} = 0 \\ \mathbf{E}_0 &= \mathbf{E}_{(0)} + O(C^2), \quad q_{(0)} = q_{(0)+} - q_{(0)-} = -C \gamma x + O(C^2) \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до квадратичных членов по  $C$  поле в жидкости постоянно, а распределение объемного заряда линейно. Преобразуем систему уравнений (1.4) к виду, удобному для исследования при малых  $C$ . Представим поле  $\mathbf{E}$  в виде суммы внешнего поля, гармонический потенциал которого удовлетворяет условиям (1.5), и поля  $Ce$ , индуцированного объемным зарядом:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{(0)} + Ce$ . Далее, при малых  $C$  распределения объемных зарядов  $q_{\pm}$  также мало отличаются от равновесных  $q_{(0)\pm}$ , поэтому можно представить  $q_{\pm} = q_{(0)\pm} + \gamma C n_{\pm}$ . Эти равенства являются переходом к новым переменным  $e$ ,  $n_{\pm}$ . В новых переменных система уравнений (1.4) примет вид

$$(2.3) \quad \partial \mathbf{v} / \partial t + P_e^{-1} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + B n \mathbf{E}_{(0)} \quad (n = n_{+} - n_{-})$$

$$(2.4) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \pm P_e \frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} + \frac{\partial n_{\pm}}{\partial x} - v_x \pm \frac{\partial n_{\pm}}{\partial x} v_x = 0$$

где  $B = \gamma T C^2$ , а в выражении для кулоновской силы (2.3) и в правых частях (2.4) опущены члены, пропорциональные малому параметру  $C$ . Отметим связь электрического числа Прандтля и критерия  $B$ :  $P_e = rB$  ( $r = \eta^2 b / \rho \alpha_p q_0^2 d^4$ ). Граничные условия для системы (2.3), (2.4) имеют вид

$$(2.5) \quad \mathbf{v} = 0, \quad n_{+} = 0 \quad (x = -1); \quad \mathbf{v} = 0, \quad n_{-} = 0 \quad (x = 1)$$

Устойчивость равновесия будем изучать по отношению к бесконечно малым нормальным возмущениям [1], считая, что все возмущенные величины пропорциональны множителю  $\exp(\lambda t + iky)$ , а их амплитуды зависят только от поперечной координаты  $x$ . Тогда для амплитуд возмущений из (2.3) — (2.5) получим

$$(2.6) \quad \lambda \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + B n \mathbf{E}_{(0)}, \quad \nabla \equiv \left( \frac{d}{dx}, ik, 0 \right), \quad \Delta \equiv \frac{d^2}{dx^2} - k^2$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \nabla \cdot v &= 0, \quad \pm \lambda P_e n_{\pm} + \partial n_{\pm} / \partial x - v_x = 0 \\ v &= 0, \quad n_{\pm} = 0 \quad (x = -1); \quad v = 0, \quad n_{\pm} = 0 \quad (x = 1) \end{aligned}$$

Принимая принцип смены устойчивости [4, 7] и исключая давление в (2.6), получим из (2.6), (2.7) следующую краевую задачу на собственные значения относительно  $B$ :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Delta^2 v_x - k^2 B (n_+ - n_-) &= 0, \quad dn_+ / dx = dn_- / dx = v_x \\ v_x = dv_x / dx &= 0 \quad (x = \pm 1); \quad n_+ = 0 \quad (x = -1), \quad n_- = 0 \quad (x = 1) \end{aligned}$$

Задача (2.8) имеет точное решение

$$\begin{aligned} v_x(x, k) &= k^2 B \int_{-1}^1 G(x, s, k) ds, \quad B = B(k) = \left[ k^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(x, s, k) ds dx \right]^{-1} \\ n_+(x, k) &= \int_{-1}^x v_x(x, k) dx, \quad n_-(x, k) = - \int_x^1 v_x(x, k) dx \end{aligned}$$

где  $G(x, s, k)$  — функция Грина дифференциального оператора  $\Delta^2$  при граничных условиях  $v_x = dv_x / dx = 0$  ( $x = \pm 1$ ), которая положительна в квадрате  $-1 \leq x, s \leq 1$ , симметрична и для  $x \geq s$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} G(x, s, k) &= \frac{\text{sh}^2 2k (\varphi_1(x) \psi_1(s) - \varphi_2(x) \psi_2(s))}{2k^3 (\text{sh}^2 2k - 4k^2)} \\ \varphi_1(x) &= \text{sh} k(x+1) [\text{cth} 2ka_1 + k(x-1)] - \text{ch} k(x+1) [a_1 + (x-1)a_2] \\ \varphi_2(x) &= \text{sh} k(x+1) [2 \text{cth} 2k + (x-1)a_3] - (x-1) \text{ch} k(x+1) \\ \psi_1(s) &= k(s+1) \text{ch} k(s+1) - \text{sh} k(s+1), \quad \psi_2(s) = k^2(s+1) \text{sh} k(s+1) \\ a_1 &= 1 + 2k \text{cth} 2k, \quad a_2 = k \text{cth} 2k + \frac{2k^2}{\text{sh}^2 2k}, \quad a_3 = \text{cth} 2k - \frac{2k}{\text{sh}^2 2k} \end{aligned}$$

Критическое значение критерия устойчивости  $B_*$  и наиболее опасная (критическая) длина волны  $l_* = 2\pi d / k_*$  определяются из условия  $B_* = \min_{k>0} B(k) = B(k_*)$ . На фиг. 2 изображена нейтральная кривая, разделяющая области устойчивости и неустойчивости. Минимум достигается при  $k_* = 2,4$  и равен  $B_* = 12$ . Данный критерий в несколько другой форме приводится также в [4].

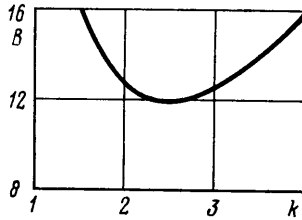
Таким образом, в предположении, что граница устойчивости определяется из условия  $\lambda = 0$ , собственная функция задачи (2.6), (2.7), отвечающая наиболее опасному возмущению при заданном направлении волнового вектора, единственна и имеет вид

$$(2.9) \quad \begin{aligned} v_* &= (v_{x*}(x) \cos k_* y, v_{y*}(x) \sin k_* y, 0), \quad n_{\pm*} = n_{\pm}(x, k_*) \cos k_* y \\ p_* &= p(x, k_*) \cos k_* y, \quad v_{x*} = v_x(x, k_*), \quad v_{y*} = v_y(x, k_*) = - \frac{1}{k_*} \frac{dv_x}{dx} \end{aligned}$$

Отметим некоторые свойства решения (2.9), которые в дальнейшем будут использованы. Из вида задачи (2.8) следует, что  $v_x(x, k)$  является четной:  $v_x(x, k) = v_x(-x, k)$ , а  $n_{\pm}(x, k)$  — нечетные функции. Поэтому все четные производные от  $v_x(x, k)$  являются четными функциями, нечетные производные — нечетными. Далее,  $v_x(x, k)$  на интервале  $-1 \leq x \leq 1$  положительна.

**3. Построение стационарного течения при закритических значениях критерия устойчивости.** При закритических значениях критерия устойчи-

ности  $B > B_*$  состояние покоя жидкости нарушается, и через некоторое время в жидкости развивается стационарное течение. Математически это означает, что стационарная задача (2.3)–(2.5) помимо тривиального решения, которое неустойчиво, допускает устойчивое нетривиальное решение.



Фиг. 2

ние. Вычислим это решение, считая, что параметр надкритичности  $\mu = (B - B_*)^{1/2}$  мал. Решение, согласно [7, 8], ищем в виде рядов по степеням малого параметра  $\mu$ :

$$(3.1) \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i v_i, \quad p = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i p_i, \quad n_{\pm} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i n_{i\pm}$$

Подставляя эти выражения в (2.3)–(2.5), получим последовательность краевых задач

$$(3.2) \quad \begin{aligned} A(v_i, n_i) - \nabla p_i &= F_i, \quad \text{div } v_i = 0, \quad \partial n_{i\pm} / \partial x - v_{xi} = H_{i\pm} \\ F_1 &= 0, \quad F_2 = P_{e*}^{-1} (v_1 \nabla) v_1, \quad F_3 = P_{e*}^{-1} [(v_2 \nabla) v_1 + (v_1 \nabla) v_2] - n_i E_{(0)} \\ F_i &= P_{e*}^{-1} \sum_{m+n+2j=i} (-1)^j (v_m \nabla) v_n - n_{i-2} E_{(0)}, \quad (i \geq 4) \\ H_{1\pm} &= 0, \quad H_{i\pm} = \mp \sum_{m+n=i} \frac{\partial n_{m\pm}}{\partial x} v_{xn} \quad (i \geq 2) \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} A(v_i, n_i) &= \Delta v_i + B_* n_i E_{(0)}, \quad n_i = n_{i+} - n_{i-} \\ v_i &= 0 \quad (x = \pm 1), \quad n_{i+} = 0 \quad (x = -1), \quad n_{i-} = 0 \quad (x = 1) \\ &(i = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

В дальнейшем ограничимся определением главных членов в разложении (3.1) (процедура определения последующих членов приведена, например, в [7, 8]). Решение для  $v_1, v_2$  ищем в виде

$$(3.4) \quad \begin{aligned} v_1 &= \beta_1 v_*, \quad p_1 = \beta_1 p_*, \quad n_{1\pm} = \beta_1 n_{\pm*} \\ v_2 &= \beta_1^2 w + \beta_2 v_*, \quad p_2 = \beta_1^2 g + \beta_2 p_*, \quad n_{2\pm} = \beta_1^2 \rho_{\pm} + \beta_2 n_{\pm*} \end{aligned}$$

где (3.4) – собственное решение (2.9) задачи (3.2), (3.3) при  $i=1$ ;  $w, g, \rho_{\pm}$  – частное решение (3.2), (3.3) при  $i=2$ ;  $\beta_1, \beta_2 = \text{const}$ .

Рассмотрим сопряженную к (3.2), (3.3) при  $i=1$  задачу

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \Delta W - \nabla \pi - (c_+ + c_-) E_{(0)} &= 0, \quad \partial c_{\pm} / \partial x \mp B_* W_x = 0 \\ \text{div } W &= 0, \quad W = 0 \quad (x = \mp 1), \quad c_+ = 0 \quad (x = 1), \quad c_- = 0 \quad (x = -1) \end{aligned}$$

Тогда условие разрешимости задач (3.2), (3.3) для любых  $i$  имеет вид

$$(3.6) \quad \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi/k_*} (F_i W + H_{i+} c_+ + H_{i-} c_-) dy dx = 0$$

С учетом (3.4), (2.9) находим частное решение (3.2), (3.3) при  $i=2$

$$(3.7) \quad w = (w_x(x) \cos 2k_* y, w_y(x) \sin 2k_* y, 0)$$

$$w_x(x) = \int_{-1}^1 G(x, s, 2k_*) \left[ \frac{d}{ds} \left( -v_{x*} \frac{d^2 v_{x*}}{ds^2} + \left( \frac{dv_{x*}}{ds} \right)^2 \right) P_{e*}^{-1} - \right. \\ \left. - 2k_*^2 B_* \left( \int_{-1}^s v_{x*} ds - \int_s^1 v_{x*} ds \right) \right] ds, \quad w_y = -\frac{1}{2k_*} \frac{dw_x}{dx}, \quad g = f(x) \cos 2k_* y$$

$$\rho_+ = \int_{-1}^x (w_x \cos 2k_* y - v_{x*}^2 \cos^2 k_* y) dx$$

$$\rho_- = - \int_x^1 (w_x \cos 2k_* y + v_{x*}^2 \cos^2 k_* y) dx$$

Здесь  $G(x, s, 2k_*)$  — функция Грина дифференциального оператора  $(d^2/dx^2 - 4k_*^2)^2$  и граничных условий  $w_x = dw_x/dx = 0$  ( $x = \pm 1$ ). Решение сопряженной задачи (3.5) имеет вид

$$(3.8) \quad W = v_*, \quad c_+ = -B_* \int_x^1 v_{x*} dx \cos k_* y, \quad c_- = -B_* \int_{-1}^x v_{x*} dx \cos k_* y$$

Можно проверить, что при  $i=2$  условие разрешимости (3.6) выполняется тождественно. При  $i=3$  с учетом (3.8), (3.7) получим

$$\int_0^{2\pi/k_*} \int_{-1}^1 \left[ ((v_2 \nabla) v_1 + (v_1 \nabla) v_2) v_* P_{e*}^{-1} - \left( \frac{\partial n_{2+}}{\partial x} v_{x1} + \frac{\partial n_{1+}}{\partial x} v_{x2} \right) c_+ + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial n_{2-}}{\partial x} v_{x1} + \frac{\partial n_{1-}}{\partial x} v_{x2} \right) c_- \right] dx dy = \int_0^{2\pi/k_*} \int_{-1}^1 n_1 v_{x*} \cos k_* y dx dy$$

откуда получаем следующее выражение для  $\beta_1$ :

$$\frac{1}{\beta_1^2} = \int_{-1}^1 \left( \frac{d^2 w_x}{dx^2} - 4k_*^2 w_x \right) \frac{dx}{4k_*^2} - \frac{3}{4} B_* \int_{-1}^1 v_{x*}^3 dx - \\ - B_* \int_{-1}^1 v_{x*} w_x \left( \int_{-1}^x v_{x*} dx - \int_x^1 v_{x*} dx \right) dx$$

Численные расчеты с использованием ЭВМ показали, что при  $P_{e*} = 0$  будет  $\beta_1 = 0$  и с увеличением  $P_{e*}$  коэффициент  $\beta_1$  монотонно растет. Таким образом, после потери устойчивости развивается стационарное тече-

ние, поле скоростей которого при малой надкритичности можно выразить как

$$(3.9) \quad \mathbf{v}(x, y) = \beta_1 (B - B_*)^{1/2} (v_{x*}(x) \cos k_* y, v_{y*}(x) \sin k_* y, 0)$$

На фиг. 1 изображены линии тока поля (3.9). Отметим, что отношение длин сторон образующихся электроконвективных ячеек близко к наблюдавшимся в экспериментах [5] и составляет  $l_*/2 : 2d = 0,65$ .

**4. Устойчивость течения.** Для того чтобы жидкость после потери устойчивости равновесия переходила в стационарный режим течения (3.1), необходима его устойчивость. Покажем, что течение (3.1) устойчиво по отношению к бесконечно малым нормальным возмущениям. Для доказательства воспользуемся схемой [7, 8]. Представляя возмущенное состояние суммой основного течения (3.1) и возмущенного:  $\mathbf{v} + \mathbf{u}(x, y)e^{\delta t}$ ,  $p + h(x, y)e^{\delta t}$ ,  $n_{\pm} + q_{\pm}(x, y)e^{\delta t}$ , из (2.3)–(2.5) для возмущений получим следующую линеаризованную задачу на собственные значения относительно декремента  $\delta$ :

$$(4.1) \quad \delta \mathbf{u} + P_e^{-1} [(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla h + \Delta \mathbf{u} + B(q_+ - q_-) \mathbf{E}_{(0)} \\ \pm \delta P_e q_{\pm} + \partial q_{\pm} / \partial x - u_{x\pm} \pm q_{\pm} v_{x\pm} \pm n_{\pm} u_x = 0, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

$$(4.2) \quad \mathbf{u} = 0 \quad (x = \mp 1), \quad q_+ = 0 \quad (x = -1), \quad q_- = 0 \quad (x = 1)$$

Решение ищем в виде рядов

$$(4.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_* + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \mathbf{u}_i, \quad q_{\pm} = n_{\pm*} + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i q_{i\pm}, \\ h = p_* + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i h_i, \quad \delta = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \delta_i$$

Подставляя (4.3) в (4.1), (4.2) и учитывая разложения (3.1), получим последовательность задач для определения  $\delta_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ). Из условия разрешимости находим  $\delta_1 = 0$ , а для  $\delta_2$  получаем следующее выражение:

$$\delta_2 = -3 \left\{ 1 + 2P_e B_* \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^x v_{x*} dx \int_x^1 v_{x*} dx \right] dx \right\}^{-1}$$

откуда с учетом положительности  $v_{x*}$  следует отрицательность декремента  $\delta_2$ , т. е. устойчивость течения (3.1).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болога М. К., Гросу Ф. П., Кожухарь И. А. Электроконвекция и теплообмен. Кипшинев. Штиинца, 1977.
2. Остроумов Г. А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979.
3. Gallagher T. J. Simple dielectric liquids. Oxford, Clarendon Press, 1975.
4. Lacroix J. C., Atten P. Double injection with recombination: EHD linear and non linear stability study. J. Electrostatics, 1978, v. 5, p. 453.
5. Стишков Ю. К. Наблюдение изотермической конвекции в электрическом поле плоского конденсатора. Электронная обработка материалов, 1972, № 1.
6. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
7. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости. М.: Наука, 1976.
8. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами. В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1970.

Харьков

Поступила в редакцию  
25.XII.1979