

Таким образом, проведенные исследования показывают, что, во-первых, кинетика химических реакций существенно влияет на характеристики нестационарного течения  $N_2O_4$ . При этом: а) в начальный момент времени, когда течение квазизаморожено, разогрев газа в зоне 3 для течения с учетом кинетики больше, чем для равновесной смеси, а охлаждение газа в зоне 5 меньше; б) в нестационарных потоках локальные расходные характеристики для смеси с учетом кинетики значительно отличаются от характеристик, рассчитанных для равновесно реагирующей смеси; в) кинетика химических реакций качественно видоизменяет картину нестационарных течений — происходит уменьшение температуры в зоне релаксации ударной волны, увеличение температуры в зонах между веером волн разрежения и контактными разрывом и между отраженной волной разрежения и стенкой.

Во-вторых, в релаксирующих газах контактный разрыв не является стабильным, а перепад температуры и плотности на разрыве асимптотически стремится к величине, соответствующей некоторым стабильным состояниям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. Гладков А. А., Полянский О. Ю., Агафонов В. П., Вертушкин В. К. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М.: Машиностроение, 1972.
3. Салганов Г. А. Неравновесные и нестационарные процессы в газодинамике однофазных и двухфазных сред. М.: Наука, 1979.
4. Нестеренко В. Б., Бубнов В. П., Котелевский Ю. Г. и др. Физико-химические и теплофизические свойства химически реагирующей системы  $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ . Минск: Наука и техника, 1976.
5. Белякин В. С., Горбунова Н. И., Шпильрайн Э. Э. О расчете времени химической релаксации газовых систем. В кн.: Диссоциирующие газы как теплоносители и рабочие тела энергетических установок, ч. 2. Минск, 1973.
6. Бажин М. А., Нестеренко В. Б. Показатель адиабаты смеси химически реагирующих газов. — Изв. АН БССР, Сер. физ.-энерг. н., 1969, № 3.
7. Салганов Г. А. Нестационарные течения перегретого и конденсирующегося пара. — 3 Konferencja naukowa Turbiny Sarowe Wielkiej Moeuy, Gdansk, 1974, Prace Inst. Maszyn Przeplywowych, 1976, № 70–72.
8. Салганов Г. А., Симаковский Г. П. Двумерные смешанные течения пересыщенной двухфазной среды с неравновесными фазовыми превращениями. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4.
9. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. — AIAA Paper, 1969, No. 354.
10. Жмакин А. И., Попов Ф. Д., Фурсенко А. А. Метод сглаживания при расчете разрывных течений газа. В кн.: Алгоритмы и мат. обеспечение для физических задач. Л., ФТИ, вып. 2, 1977.
11. Войнович П. А., Жмакин А. И., Попов Ф. Д., Фурсенко А. А. О расчете разрывных течений газа. Л., 1977 (АН СССР. Физ.-техн. ин-т им. А. Ф. Иоффе. Препринт № 561).
12. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

Минск, Москва

Поступила в редакцию  
10.XII.1979

УДК 533.601.13

#### ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ОКОЛО МАЛОГО ЭЛЕРОНА

МОЛЧАНОВ В. Ф.

Для предельного случая, когда отношение характерного размера крыла к характерному размеру элерона стремится к бесконечности, получено точное общее решение задачи линейной теории крыла, выраженное в квадратурах. Даны примеры расчетов распределения давления и шарнирных моментов прямоугольного и трапециевидного элеронов.

Рассмотрим в рамках линейной теории задачу об обтекании идеальной жидкостью тонкого бесконечного крыла, проекция которого в прямоугольной системе координат  $x, y, z$  занимает всю полуплоскость  $y=0, x>0$ , а проекция задней кромки

совпадает с осью  $z$ :

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial y} \varphi = v_n(x, z), \quad y=0, \quad x>0$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \varphi = 0, \quad y=0, \quad x<0$$

$$\lim \Delta\varphi/\sqrt{\Delta x} = 0, \quad \Delta x \rightarrow 0; \quad |\text{grad } \varphi| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \varphi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi = 0, \quad \varphi > 0$$

Здесь  $\varphi(x, y, z)$  – потенциал возмущенного потока,  $V_\infty = iu + kw$  – вектор скорости основного потока,  $i, k$  – единичные векторы по осям  $x, z$ ,  $v_n(x, z)$  – нормальная компонента скорости, направление нормали совпадает с направлением оси  $y$ ,  $\partial/\partial s = \cos \theta_0 \partial/\partial z - \sin \theta_0 \partial/\partial x$  – производная вдоль основного потока,  $\theta_0$  – угол между вектором  $V_\infty$  и осью  $z$ ,  $\Delta\varphi = \varphi(\Delta x, 0, z) - \varphi(0, 0, z)$ , второе условие – следствие непрерывности давления при переходе через вихревую плоскость, сходящую с задней кромки крыла [1], третье условие – постулат Жуковского, течение симметрично относительно плоскости  $y=0$ :  $\varphi(x, -y, z) = -\varphi(x, y, z)$ .

Без второго и третьего условий поставленная задача была решена Зоммерфельдом [2]. Решение Зоммерфельда

$$(2) \quad \varphi_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{v_n(x_1, z_1)}{\pi^2 R} \arctg \frac{\sqrt{2x_1} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}}{R} dx_1 dz_1$$

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (z - z_1)^2 + y^2$$

Решение (2) было использовано Н. Е. Кочинным [1]. Положим

$$(3) \quad \varphi_2(x, y, z) = \varphi - \varphi_1$$

Постановка задачи для  $\varphi_2$ :

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2 = 0, \quad y=0, \quad x>0; \quad \frac{\partial}{\partial s} \varphi_2 = 0, \quad y=0, \quad x<0$$

$$\lim \Delta\varphi_2/\sqrt{\Delta x} = -A(z), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$A(z) = \lim \frac{\Delta\varphi_1}{\sqrt{\Delta x}} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \frac{2}{\pi^2} v_n(x_1, z_1) \frac{\sqrt{x_1}}{x_1^2 + (z - z_1)^2} dx_1 dz_1$$

$$|\text{grad } \varphi_2| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\Delta^2 \varphi_2 = 0, \quad y > 0$$

Решение (4) ищем в виде

$$(5) \quad \varphi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z_0) \varphi_0(x, y, z, z_0) dz_0$$

Постановка задачи для  $\varphi_0$ :

$$(6) \quad \frac{\partial}{\partial y} \varphi_0 = 0, \quad y=0, \quad x>0$$

$$\varphi_0 = 0, \quad y=0, \quad x<0, \quad z > z_0 - \frac{x}{\text{tg } \theta_0}$$

$$\varphi_0 = 1, \quad y=0, \quad x<0, \quad z < z_0 - \frac{x}{\text{tg } \theta_0}$$

$$|\text{grad } \varphi_0| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\Delta^2 \varphi_0 = 0, \quad y > 0$$

Из (6) следует, что  $\varphi_0$  является потенциалом обтекания крыла потоком, индуцированным прямолинейной вихревой нитью, выходящей из точки  $z_0$  задней кромки под углом  $\theta_0$  к ней. Положим  $z_0=0$ . Общий случай получится из этого случая сдвигом системы координат вдоль оси  $z$ . Так как в данной задаче отсутствует характерный размер, то потенциал  $\varphi_0$  не меняется при движении вдоль всякого луча, исходящего из начала координат.

Поэтому, введя сферическую систему координат  $R_1, \theta, \omega$ ,

$$z=R_1 \cos \theta, \quad x=R_1 \sin \theta \cos \omega, \quad y=R_1 \sin \theta \sin \omega$$

и замену  $r=\operatorname{tg} \theta/2$ , получим

$$\Delta^2 \varphi_0 = \frac{1}{4R_1^2 \cos^4 \theta/2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \omega^2} \right) = 0$$

Здесь выражение в больших скобках является двумерным оператором Лапласа, записанным в полярных координатах. Тем самым задача сведена к отысканию двумерного обтекания полубесконечной пластины  $\omega=0, 0 \leq r \leq \infty$  потоком, индуцированным дискретным вихрем, помещенным в точку  $\omega=\pi, r=r_0=\operatorname{tg} \theta_0/2$  с циркуляцией, равной двум. Решение задачи

$$(7) \quad \varphi_0 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{rr_0} \cos \omega/2}{r_0 - r}$$

Здесь должна выбираться такая ветвь функции, чтобы при  $r=r_0, \omega < \pi$  не было разрыва.

Перейдя к цилиндрической системе координат  $z, \rho, \omega$ , для чего достаточно выразить  $r$  через  $z$  и  $\rho$ , и осуществив сдвиг начала координат вдоль оси  $z$  на величину  $z_0$ , получим

$$(8) \quad r = (\sqrt{\rho^2 + (z-z_0)^2} - z + z_0) / \rho$$

Выражения (7), (8) дают решение задачи (6).

Подставив (7), (8) в (5) и (5) в третье условие задачи (4), получим уравнение для  $\Gamma(z_0)$ :

$$(9) \quad \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(z_0) \delta r_0^{\delta/2} / \sqrt{|z-z_0|} dz_0 = A(z)$$

$$\delta(z_0 - z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z_0 > z \\ -1 & \text{при } z_0 < z \end{cases}$$

Общее решение уравнения (9) дается следующим выражением:

$$(10) \quad \Gamma(z_0) = - \frac{\sin \theta_0}{2\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} r_0^{\delta/2} / \sqrt{|z-z_0|} \frac{d}{dz} A(z) dz$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно представить  $A(z)$  в виде ряда или интеграла Фурье. Например, если  $A(z) = \sin \lambda z$ , то из (10) получим

$$\Gamma(z_0) = - \frac{\sin \theta_0}{4} (\lambda \pi)^{1/2} (r_0^{-1/2} - r_0^{1/2}) \sin \lambda z_0 + (r_0^{-1/2} + r_0^{1/2}) \cos \lambda z_0$$

Подставив этот результат в (9), получим тождество.

Формулы (10), (8), (7), (5), (3), (2) и выражение для  $A(z)$  из (4) дают общее решение задачи (1). Тождественными преобразованиями оно приводится к следующему виду:

$$(11) \quad \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} v_n(x_1, y_1) \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{\pi^2 R_2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x_1} \sqrt{\sqrt{x_2^2 + y^2} + x_2}}{R_2} dt dx_1 dz_1$$

$$R_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + y^2$$

$$x_2 = x + t \sin \theta_0, \quad z_2 = z - t \cos \theta_0$$

$$\frac{\partial}{\partial s_1} = \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial z_1} - \sin \theta_0 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

Здесь интеграл по переменной  $t$  может быть выражен через элементарные функции.

Из (11), уравнения Бернулли и условия симметрии течения относительно плоскости  $y=0$  получается выражение для перепада давления на крыле

$$(12) \quad \Delta p = -2|V_\infty| \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} v_n(x_1, z_1) \frac{\partial}{\partial s_1} \frac{1}{\pi^2 R} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{x_1 x}}{R} dx_1 dz_1$$

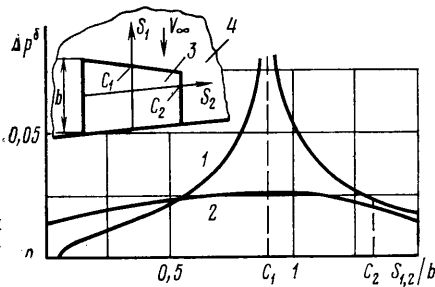
$$R^2 = (x-x_1)^2 + (z-z_1)^2$$

Здесь  $\Delta p = p_+ - p_-$  — перепад давления,  $p_+$ ,  $p_-$  — давления на верхней и нижней сторонах крыла.

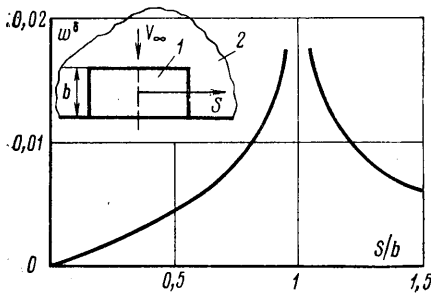
На основе формулы (12) проведены расчеты производных перепада давления  $\Delta p^\delta$  и коэффициента шарнирного момента элерона  $m^\delta$  по углу отклонения элерона  $\delta$ , выраженного в градусах. На фиг. 1 приведены результаты расчета  $\Delta p^\delta$  вдоль прямых  $S_1$  и  $S_2$  (линии 1, 2 соответственно), трапецевидного элерона, имеющего удлинение  $\lambda_* \sim 1,5$ , сужение  $\eta_* \approx 1,4$ , угол стреловидности оси вращения, расположенной на передней кромке элерона,  $\lambda_* \sim 8^\circ$ ,  $c_1$  — точка пересечения прямой  $S_1$  с осью шарнира элерона,  $c_2$  — точка пересечения прямой  $S_2$  с концевой хордой элерона, 3 — элерон, 4 — крыло. При вычислении коэффициента шарнирного момента за единицу

длины принималась средняя аэродинамическая хорда элерона, рассчитанная по перпендикуляру к оси вращения. Для данного элерона  $m^\delta \sim 0,0068$ .

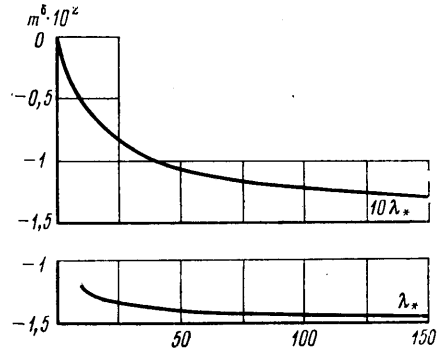
На фиг. 2, где 1 — элерон, 2 — крыло, приведен результат расчета на поверхности прямоугольного элерона и на прилегающих к нему частях крыла производной поперечной компоненты скорости  $w^\delta$  вдоль линии  $S$ . На боковых кромках  $w^\delta$  обращается в бесконеч-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ность. На фиг. 3 приведен результат расчета производной коэффициента шарнирного момента прямоугольного элерона при различных значениях удлинения  $\lambda_*$ . В этом случае  $m^\delta$  выражается в элементарных функциях

$$m^\delta = \frac{2}{45\pi\lambda_*} \left( \left( \frac{\lambda_*^3}{6} + \frac{2}{3}\lambda_* \right) \operatorname{arctg} \frac{2}{\lambda_*} + \frac{4}{15} \ln \left( \frac{\lambda_*^2}{4} + 1 \right) + \frac{11}{15} \lambda_*^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{3} \lambda_* - \frac{4\pi}{15} + \frac{8}{15} (1-\lambda_*^4) \frac{a+b}{r_1 \sqrt{r_1}} + \frac{8}{15} (1-3\lambda_*^2) \frac{a-b}{\sqrt{r_1}} \right)$$

$$a = \frac{1}{2 \cos \beta/2} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{r_1} \cos \beta/2}{r_1 - 1}$$

$$b = \frac{1}{4 \sin \beta/2} \ln \frac{1+r_1+2\sqrt{r_1} \sin \beta/2}{1+r_1-2\sqrt{r_1} \sin \beta/2}$$

$$r_1 = \sqrt{1+\lambda_*^2}, \quad \beta = \arctg \lambda_*$$

При  $\lambda_* \rightarrow \infty$ ,  $m^{\delta} \rightarrow -2/135$ .

Этот предельный случай соответствует плоскому течению около элерона.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане.— Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1949, с. 351.
2. Sommerfeld A. Über verzweigte Potentiale im Raum.— London Math. Soc., 1897, v. 28, p. 395.

Москва

Поступила в редакцию  
12.XI.1979

УДК 533.7

### ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ДИССОЦИИРУЮЩЕМ ГАЗЕ

ГЕРАСИМОВ Г. Я.

На основе метода Чепмена — Энскога разрабатывается математический аппарат кинетической теории для исследования явлений переноса в разреженных газах с учетом равновесной реакции диссоциации. Проводится оценка вклада диссоциационных интегралов столкновений в коэффициенты переноса. Результаты оценки показывают, что наличие диссоциационных столкновений в газе не оказывает заметного влияния на коэффициенты сдвиговой вязкости, теплопроводности и диффузии. С другой стороны, влияние равновесной реакции диссоциации на коэффициент объемной вязкости должно быть значительным.

1. Рассмотрим диссоциирующий газ, состоящий из двухатомных гомоядерных молекул и атомов. Обозначим их соответственно индексами 2 и 1. Предположим, что сечения столкновений, приводящих к диссоциации, сравнимы по порядку величины с сечениями упругих и неупругих столкновений. В этом случае квазиравновесное распределение характеризуется локальным химическим равновесием, а плотности компонент газа  $n_p$  ( $p=1; 2$ ) связаны друг с другом уравнением химического равновесия. Таким образом, в диссоциирующем газе величины  $n_p$  зависят от температуры  $T$  и полного числа атомов (как свободных, так и связанных) в единице объема газа  $N$ .

Введем функцию распределения  $f_{pi}(\mathbf{v}_p, E_{pi}, \mathbf{r}, t)$  частиц сорта  $p$ , находящихся в  $i$ -м квантовом состоянии, с внутренней энергией  $E_{pi}$ . Отсчет внутренней энергии молекул будем вести от основного состояния, полагая, что после диссоциации молекулы энергия диссоциации  $D$  распределяется поровну между образовавшимися атомами.

Определим с помощью  $f_{pi}$  полную плотность атомов  $N$ , среднemasсовую скорость  $\mathbf{v}_0$  и энергию на грамм вещества  $U$ :

$$(1.1) \quad N(\mathbf{r}, t) = \sum_{p,i} \alpha_p \int f_{pi} d\mathbf{v}_p = \sum_p \alpha_p n_p, \quad \alpha_1=1, \quad \alpha_2=2$$

$$(1.2) \quad \rho \mathbf{v}_0(\mathbf{r}, t) = \sum_{p,i} m_p \int \mathbf{v}_p f_{pi} d\mathbf{v}_p, \quad \rho = \sum_p m_p n_p$$

$$(1.3) \quad \rho U(\mathbf{r}, t) = \sum_{p,i} \int \left( \frac{1}{2} m_p V_p^2 + E_{pi} + w_p \right) f_{pi} d\mathbf{v}_p$$

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_0, \quad w_1 = 0,5D, \quad w_2 = 0$$