

Проиллюстрируем действие правила площадей на примере присоединенной массы для тела, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости. Выражения для присоединенных масс имеют вид [7]

$$\lambda_{ih} = -\rho \iint_S \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_h dS$$

Поскольку потенциалы  $\varphi_i$  и их производные непрерывно зависят от формы тела, то для величин  $\lambda$  справедливо (2) и применимо правило площадей. На фиг. 2 показано относительное изменение присоединенной массы поступательного движения  $\lambda_{11}$  для трехосного эллипсоида, когда отношение осей, перпендикулярных направлению движения, изменялось в несколько раз (за исходное тело был взят шар).

Другие примеры (для коэффициентов сопротивления, теплообмена и уноса массы, параметров в следе) даны в [1–5]. Как видно из фиг. 2 и результатов [1–5], правило площадей дает хорошую точность не только для малых  $\epsilon$ , но и в гораздо более широкой области.

Подчеркнем еще раз, что правило площадей применимо к задачам разной физической и математической природы. Условием его использования является доказательство (или предположение о справедливости) равенства (2) и дифференцируемость исследуемых функций.

Авторы благодарны Ю. Б. Лифшицу за полезные замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. О сопротивлении тел, близких к телам вращения. — Инж. ж., 1961, т. 1, № 3.
2. Дворецкий В. М., Иванов М. Я., Коняев Б. А., Крайко А. Н. О правиле «эквивалентности» для течений идеального газа. — ПММ, 1974, т. 38, № 6.
3. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975.
4. Апштейн Э. З., Пилюгин Н. Н. Правило площадей для коэффициента теплообмена пространственных аблирующих тел при тепловых потоках, локально зависящих от угла наклона поверхности. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 2.
5. Пилюгин Н. Н., Тихомиров С. Г., Чернявский С. Ю. Правило площадей для следа за пространственным телом. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3.
6. Oswatitsch K. The area rule. — Appl. mech. rev., 1957, v. 10, No. 12.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.

Москва

Поступила в редакцию  
10.XII.1979

УДК 533.6.011.72

#### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ЧЕТЫРЕХОКИСИ АЗОТА

БАЖИН М. А., РЫЖАНКОВ М. А., САЛТАНОВ Г. А.

Рассматривается распад произвольного разрыва и отражение веера волн разрежения от неподвижной стенки в диссоциирующей четырехокиси азота. Система уравнений газодинамики и уравнение сохранения массы  $i$ -го компонента численно интегрировались методом Макормака. Показано существенное влияние кинетики на характеристики ударной волны и контактного разрыва.

Исследованию течений релаксирующего газа посвящено много работ (см., например, [1–3]). Численный анализ таких течений производился, как правило, в стационарной или квазистационарной постановке. В связи с перспективностью создания атомных электростанций большой мощности на диссоциирующей четырехокиси азота [4] необходимо исследование особенностей течения  $N_2O_4$  в турбинах, которое характеризуется нестационарностью, наличием газодинамических разрывов и изменением типа системы дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемое течение.

Исследования такого рода осложняются тем, что четырехокись азота диссоциирует в широком диапазоне температур и давлений по схеме  $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ . Причем если первая стадия реакции практически равновесна [5], то скорость протекания второй стадии реакции такова, что ее необходимо учитывать, особенно в таких быстрых течениях, которые наблюдаются в турбинах. Наличие химических реакций приводит к тому, что даже в предположении об идеальном газом поведении

компонент смеси термодинамические свойства и плотность всей смеси зависят не только от температуры, но и от давления и состава. Поэтому при расчетах, например, адиабатических равновесных процессов нельзя пользоваться показателем адиабаты  $N_2O_4$  [6]. Все это существенно затрудняет расчеты течений  $N_2O_4$ .

В настоящее время имеется довольно большой опыт расчета нестационарных квазиодномерных и двумерных течений релаксирующих сред, основанный на методе С. К. Годунова [7, 8]. Однако из-за частого обращения к операциям нахождения температуры и плотности по известным энергии и давлению, а также необходимости многократного вычисления инварианта Римана (интеграла в инварианте) для диссоциирующей системы сильно увеличивается время счета. В ряде задач, где требуется нахождение энергетических и расходных характеристик, схемы, основанные на методе С. К. Годунова, не дают необходимой точности. Из-за наличия сильных разрывов, местоположение которых неопределено, затруднено использование метода характеристик и разностных схем, основанных на методе бегущего счета. Схема Лакса — Вендроффа приводит к немонотонности решения. Схема Макормака [9] проста в программировании, а с введением оператора сглаживания по типу [10] избавляется от немонотонности получаемого решения и, по нашему мнению, наиболее пригодна для решения задач такого типа.

1. Уравнения. Рассмотрим нестационарное течение химически реагирующего тетраоксида азота в квазиодномерной постановке задачи. Предполагается, что реагирующая смесь удовлетворяет  $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$  и моделируется при следующих допущениях: 1) компоненты смеси — идеальные газы; 2) первая стадия реакции протекает равновесно [5]; 3) вязкость, теплопроводность и диффузия отсутствуют.

При этих допущениях течение  $N_2O_4$  описывается системой дифференциальных уравнений сохранения массы, импульса, энергии смеси и массовой концентрации  $C_3$  компонента NO:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial z} = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho u F}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2) F}{\partial z} = p \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho (\varepsilon + u^2/2) F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \rho u F \left( \varepsilon + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \right] = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial C_3 \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F C_3}{\partial z} = \frac{6\rho^2 K_{c2} F}{m^2 R} [K_{p2} x_2^2 - p \cdot 10^{-5} x_3^2 x_4]$$

Здесь  $\rho$ ,  $u$ ,  $p$ ,  $\varepsilon$  — плотность, скорость, давление и энергия смеси,  $m = 46(1 + x_1 - x_3/2)$  — молекулярный вес смеси, величина  $K_{p2}$  описывает зависимость константы равновесия второй стадии реакции от температуры,  $x_i$  — мольные концентрации компонент смеси ( $i=1, 2, 3, 4$ ; 1 —  $N_2O_4$ , 2 —  $NO_2$ , 3 — NO, 4 —  $O_2$ ),  $K_{c2}$  — константа скорости рекомбинации второй стадии реакции,  $z$  — координата,  $t$  — время,  $F$  — площадь,  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Система уравнений (1.1)–(1.4) замыкается термическим и калорическим [4] уравнениями состояния смеси

$$p/\rho = RT/m$$

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i(p, T) \varepsilon_i(T)}{\sum_{i=1}^4 x_i(p, T) m_i}$$

$$S = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i(p, T) s_i(T)}{\sum_{i=1}^4 x_i(p, T) m_i}$$

$$-R \sum_{i=1}^4 x_i(T, p) \ln [x_i(T, p)] / \sum_{i=1}^4 x_i(T, p) m_i$$

Здесь  $\epsilon_i$  и  $s_i$  – зависимости от температуры внутренней энергии и энтропии  $i$ -го компонента смеси,  $m_i$  – молекулярный вес  $i$ -го компонента смеси,  $S$  – энтропия смеси,  $T$  – температура.

В рамках данной модели рассматривается численное решение двух модельных задач – распад произвольного разрыва и отражение веера волн разрежения от неподвижной стенки.

**2. Распад разрыва.** Пусть в момент времени  $t=0$  имеется следующий разрыв параметров:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} z < 0, \quad p_7 = 14 \text{ МПа}, \quad T_7 = 973^\circ \\ z \geq 0, \quad p_1 = 2 \text{ МПа}, \quad T_1 = 973^\circ \end{aligned}$$

Здесь индексы соответствуют номеру зоны на фиг. 1.

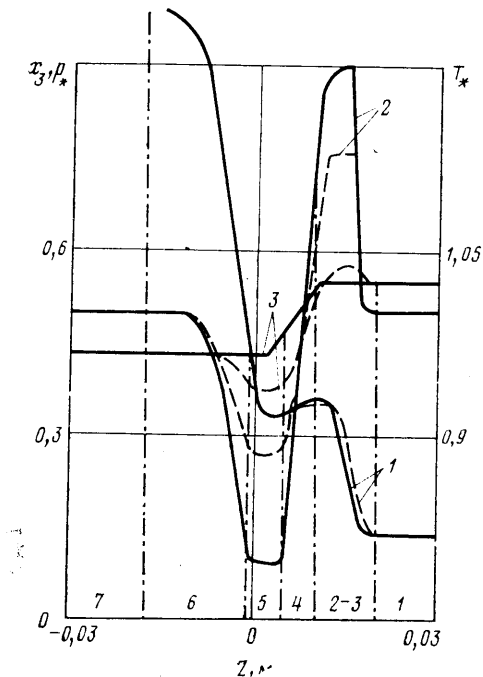
Для определения параметров течения, возникающего при  $t > 0$ , необходимо решить задачу Коши для системы уравнений (1.1)–(1.4) при начальных условиях (2.1).

В работе [14] приведен анализ сравнения точного аналитического решения, описывающего течение идеального газа, возникающего при распаде разрыва, и численного решения, полученного по схеме МакКормака. Из анализа следует, что схема МакКормака позволяет получать результаты, описывающие решения, возникающие при распаде произвольного разрыва с приемлемой точностью.

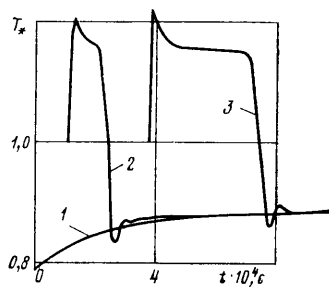
На фиг. 1 представлены результаты расчета параметров течения: здесь и далее на фигурах сплошные кривые – кинетический режим течения, пунктирные кривые –

течение в предположении, что вторая стадия реакции протекает равновесно; цифрой 1 обозначены кривые относительного давления  $p_* = p/p_7$ , 2 – относительной температуры  $T_* = T/T_7$  и 3 – состава.

Течение можно разбить на следующие зоны: 1 – невозмущенная зона низкого давления, 2–3 – зона ударной волны и зона релаксации, 4 – зона контактного разрыва, 5 – зона между контактным разрывом и задним фронтом веера волн разрежения, 6 – зона центрированной волны разрежения, 7 – невозмущенная зона высокого давления. На фиг. 1 пред-



Фиг. 1



Фиг. 2

ставлены параметры, характеризующие течение в момент времени  $t = 1.76078 \cdot 10^{-5}$  с. Из сравнения представленных результатов видно, что при прохождении ударной волны газ разогревается сильнее в смеси с учетом кинетики. Охлаждение газа в зоне 5 более значительное при кинетическом режиме течения, чем в равновесной смеси. Соответственно и значение перепада температуры в газе с учетом кинетики на контактном разрыве больше. Это объясняется перераспределением энергии. В равновесно реагирующей смеси часть энергии расходуется на возрастание (уменьшение) температуры компонент, а часть на химическую реакцию. При кинетическом режиме течения химическая реакция протекает с «запаздыванием», что приводит к увеличению количества энергии, затрачиваемой на рост или уменьшение температуры. Значения давления в равновесном и неравновесном потоках отличаются слабо.

В таблице представлены относительные отклонения температуры  $T_*$  и массовой скорости  $G_*$  для фиксированного момента времени  $t=1,76078 \cdot 10^{-5}$  с

$$T_*^* = \frac{T_k - T_e}{T_k} \cdot 100\%, \quad G_*^* = \frac{G_k - G_e}{G_k} \cdot 100\%$$

где  $T_k, T_e$  — соответственно значения температуры, рассчитанные с учетом кинетики и в предположении, что реакции протекают равновесно;  $G_k, G_e$  — массовые скорости  $G = \rho u$ , рассчитанные с учетом кинетики и в предположении, что реакции протекают равновесно. Из таблицы видно — максимальное отклонение температуры 10,5% рав-

$z_M$	$T_*^*$	$G_*^*$
-0,016	0,0001	-511,2
-0,01	-0,1238	-38,36
-0,002	-9,3825	+3,102
0	-10,012	+0,131
0,004	-10,462	-1,023
0,012	6,296	-23,4
0,018	0,0032	-4442

новесного потока от течения с учетом кинетики достигается в зоне 5. В нестационарных потоках локальное отклонение расхода может быть очень большим — ~4000% (в стационарных сопловых течениях оно значительно меньше). Минимальное отклонение достигается в зоне 5.

Со временем картина течения существенно меняется. На фиг. 2 показаны зависимости  $T^*$  от времени при  $z_1=0$  (кривая 1),  $z_2=0,1$  м (кривая 2),  $z_3=0,32$  м (кривая 3). Из фигуры видно, что значение температуры в точке  $z_1$  (зона 5) возрастает со временем, что объясняется протекающей химической реакцией. Когда время процесса мало по сравнению со временем релаксации, в зоне 5 происходит интенсивное охлаждение газа (смесь заморожена), затем начинается рекомбинация и происходит выделение тепла, что ведет к разогреву газа.

В точке  $z_2$  газ сначала разогревается ударной волной, причем разогрев происходит быстро и состав не успевает измениться, а затем начинается диссоциация с поглощением тепла и уменьшением температуры. Далее в точку  $z_2$  приходит контактный разрыв, но перепад температуры на контактном разрыве будет меньше в точке  $z_2$ , чем для всех точек левее  $z_2$ . Из-за разности скоростей движения контактной границы и ударной волны зоны 3 и 5 увеличиваются по длине и процесс падения температуры в зоне 3 в точке  $z_3$  выражен более четко, а перепад температуры на контактном разрыве в точке  $z_3$  значительно меньше, чем для точек, лежащих левее  $z_3$ . На фиг. 3 представлены распределения параметров по длине трубы в момент  $t=6,0712 \cdot 10^{-4}$  с. Из сравнения картин течения, представленных на фиг. 1 и 3, видно, что значение температуры в зоне 2 неизменно, так как течение в ударной волне заморожено, состав почти не меняется. Из-за расширения зоны 3 время пребывания газа в зоне увеличивается и становится сравнимым со временем релаксации, состав газа в зоне 3 начинает меняться и как следствие уменьшается температура. Такой же эффект наблюдается в зоне 6 с той лишь разницей, что при низких температурах реакция протекает медленнее и изменение параметров по длине зоны не столь заметно, хотя происходит оно по всей длине зоны во времени.

Таким образом, контактный разрыв для релаксирующего газа не является стабильным разрывом, а перепад температуры на разрыве изменяется во времени и асимптотически стремится к некоторому стационарному значению.

Кинетика химических реакций влияет и на другие процессы, возникающие при тчении релаксирующего газа.

**3. Отражение волны разрежения от неподвижной стенки.** Пусть в начальный момент времени  $t=0$  на расстоянии  $z=0,03$  м от стенки имеется следующий разрыв параметров:

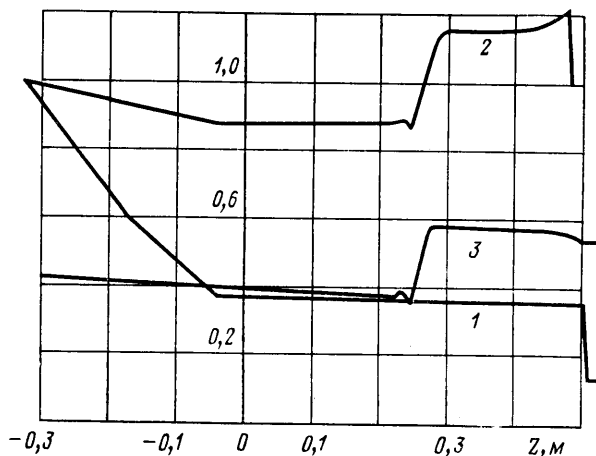
$$(3.1) \quad \begin{aligned} z \leq 0,03 \text{ м}, \quad p &= 25 \text{ МПа}, \quad T = 1073^\circ \\ z > 0,03 \text{ м}, \quad p &= 5 \text{ МПа}, \quad T = 1073^\circ \end{aligned}$$

скорости по обе стороны разрыва равны нулю и состав газа равновесный.

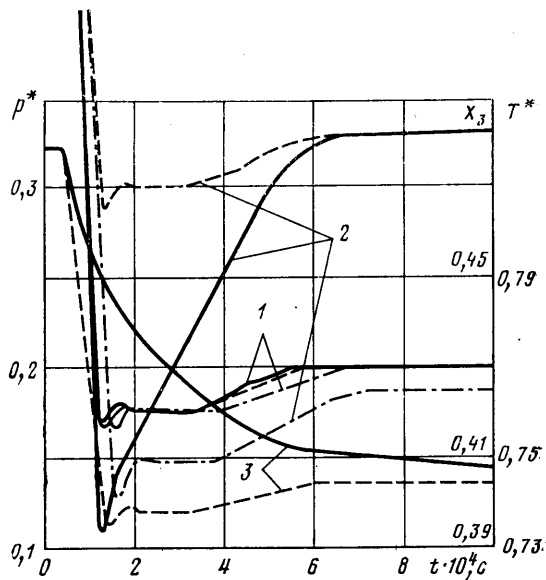
Произведем расчет взаимодействия разрыва с неподвижной стенкой. Для этого необходимо решить задачу Коши при начальных условиях (3.1). Граничные условия слева брались аналогично [12], а именно канал продливался на половину ячейки

и слева от стенки, значения параметров принимались равными значениям справа от стенки и отличались от правых только противоположным знаком скорости. Такое задание граничных условий дает геометрическую картину, симметричную относительно стенки, что эквивалентно равенству нулю скорости на стенке.

При отражении волн разрежения от стенки в области между отраженной волной разрежения и стенкой происходит очень быстрое падение давления и температуры. На фиг. 4 показано изменение во времени параметров смеси в непосредственной



Фиг. 3



Фиг. 4

близости от стенки (обозначения те же, что и на фиг. 1; штрихпунктирная линия — идеальный газ с показателем адиабаты 1, 2 и молекулярным весом 46 кг/моль).

В равновесно реагирующей смеси охлаждение газа не такое значительное, как в смеси с учетом кинетики второй стадии реакции. Состав газа с течением времени стремится к некоторому стабильному значению, что влечет за собой повышение температуры.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что, во-первых, кинетика химических реакций существенно влияет на характеристики нестационарного течения  $N_2O_4$ . При этом: а) в начальный момент времени, когда течение квазизаморожено, разогрев газа в зоне 3 для течения с учетом кинетики больше, чем для равновесной смеси, а охлаждение газа в зоне 5 меньше; б) в нестационарных потоках локальные расходные характеристики для смеси с учетом кинетики значительно отличаются от характеристик, рассчитанных для равновесно реагирующей смеси; в) кинетика химических реакций качественно видоизменяет картину нестационарных течений — происходит уменьшение температуры в зоне релаксации ударной волны, увеличение температуры в зонах между веером волн разрежения и контактными разрывом и между отраженной волной разрежения и стенкой.

Во-вторых, в релаксирующих газах контактный разрыв не является стабильным, а перепад температуры и плотности на разрыве асимптотически стремится к величине, соответствующей некоторым стабильным состояниям.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966.
2. Гладков А. А., Полянский О. Ю., Агафонов В. П., Вертушкин В. К. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. М.: Машиностроение, 1972.
3. Салганов Г. А. Неравновесные и нестационарные процессы в газодинамике однофазных и двухфазных сред. М.: Наука, 1979.
4. Нестеренко В. Б., Бубнов В. П., Котелевский Ю. Г. и др. Физико-химические и теплофизические свойства химически реагирующей системы  $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ . Минск: Наука и техника, 1976.
5. Белякин В. С., Горбунова Н. И., Шпильрайн Э. Э. О расчете времени химической релаксации газовых систем. В кн.: Диссоциирующие газы как теплоносители и рабочие тела энергетических установок, ч. 2. Минск, 1973.
6. Бажин М. А., Нестеренко В. Б. Показатель адиабаты смеси химически реагирующих газов. — Изв. АН БССР, Сер. физ.-энерг. н., 1969, № 3.
7. Салганов Г. А. Нестационарные течения перегретого и конденсирующегося пара. — 3 Konferencja naukowa Turbiny Sarowe Wielkiej Moeuy, Gdansk, 1974, Prace Inst. Maszyn Przeplywowych, 1976, № 70–72.
8. Салганов Г. А., Симаковский Г. П. Двумерные смешанные течения пересыщенной двухфазной среды с неравновесными фазовыми превращениями. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4.
9. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. — AIAA Paper, 1969, No. 354.
10. Жмакин А. И., Попов Ф. Д., Фурсенко А. А. Метод сглаживания при расчете разрывных течений газа. В кн.: Алгоритмы и мат. обеспечение для физических задач. Л., ФТИ, вып. 2, 1977.
11. Войнович П. А., Жмакин А. И., Попов Ф. Д., Фурсенко А. А. О расчете разрывных течений газа. Л., 1977 (АН СССР. Физ.-техн. ин-т им. А. Ф. Иоффе. Препринт № 561).
12. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

Минск, Москва

Поступила в редакцию  
10.XII.1979

УДК 533.601.13

#### ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ОКОЛО МАЛОГО ЭЛЕРОНА

МОЛЧАНОВ В. Ф.

Для предельного случая, когда отношение характерного размера крыла к характерному размеру элерона стремится к бесконечности, получено точное общее решение задачи линейной теории крыла, выраженное в квадратурах. Даны примеры расчетов распределения давления и шарнирных моментов прямоугольного и трапециевидного элеронов.

Рассмотрим в рамках линейной теории задачу об обтекании идеальной жидкостью тонкого бесконечного крыла, проекция которого в прямоугольной системе координат  $x, y, z$  занимает всю полуплоскость  $y=0, x>0$ , а проекция задней кромки