УДК 533.6.011

ПРАВИЛО ПЛОЩАДЕЙ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

АПШТЕЙН Э. З., КОЛОТИЛОВА Н. Г.

В гидроаэродинамике известно «правило площадей» для тел, близких к осесимметричным, которое состоит в том, что сопротивление [1–3], коэффициент теплообмена и унос массы [4], а также параметры следа [5] пространственного тела равны аналогичным величинам осесимметричного тела, имеющего такое же распределение площади поперечного сечения вдоль оси. Отметим, что в некоторых случаях правило площадей справедливо для тел, сильно отклоняющихся от осевой симметрии [6]. Ниже будет показано, что факт равенства имеет место и для других интегральных величин и не только в задачах гидродинамики.

Пусть математическая сущность рассматриваемой задачи состоит в том, что при помощи оператора F некоторой функции $r(x, y, z, t)$ ставится в соответствие функция $f(x, y, z, t)$, $f=F(r)$.

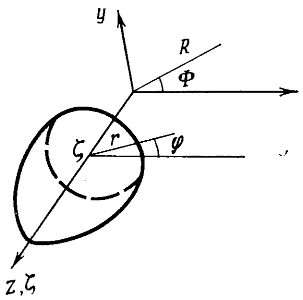
В задачах гидроаэродинамики в качестве f можно рассматривать, например, плотность, скорость, давление, тепловой поток и другие определяемые параметры, в качестве оператора F – уравнения гидродинамики, а в качестве r – внешние воздействия, начальные данные, форму граничных поверхностей.

Для простоты остановимся на последнем примере, т. е. будем считать, что функция $r(\zeta, \varphi)$ описывает в цилиндрических координатах форму некоторой поверхности (см. фиг. 1), которая с помощью оператора F порождает в пространстве функцию $f(z, R, \Phi)$. Рассмотрим сначала осесимметричную поверхность $r=r_0(\zeta)$. При этом и функция f также будет осесимметричной $f=f_0(z, R)$. Дадим теперь осесимметричной поверхности малое возмущение. Тогда она будет описываться уравнением

$$r(\zeta, \varphi)=r_0(\zeta)+\varepsilon r_1(\zeta, \varphi) \tag{1}$$

Здесь $r_1(\zeta, \varphi)$ – функция, определяющая характер возмущений, $\varepsilon\ll 1$. Считаем, что зависимость изменения функции f от возмущения r_1 линейна, т. е. что существует функция $G(z, R, \Phi, \zeta, \varphi)$, определяемая соотношением

$$f(z,R, \Phi)-f_0(z,R)= \int_a^b\int_0^{2\pi} G(z,R, \Phi, \zeta, \varphi)\,\varepsilon r_1(\zeta, \varphi)\,d\varphi\, d\zeta \tag{2}$$



Фиг. 1

Здесь $[a, b]$ – отрезок, соответствующий длине поверхности по оси z (например, длина обтекаемого тела). Из соображений симметрии ясно, что функция G зависит не от конкретных значений углов φ и Φ, а от модуля их разности

$$G(z, R, \Phi, \zeta, \varphi)=G(z, R, \zeta, |\Phi-\varphi|).$$

Рассмотрим интеграл от функции $\Delta f=f-f_0$ по некоторому круговому контуру C_0, лежащему в плоскости, перпендикулярной оси z (фиг. 1):

$$\int_0^{2\pi} [f(z,R, \Phi)-f_0(z,R)]R\, d\Phi= =\varepsilon \int_a^b \left[RG_1(z,R,\zeta) \int_0^{2\pi} r_1(\zeta, \varphi)\,d\varphi \right] d\zeta$$

$$G_1(z,R,\zeta)= \int_0^{2\pi} G(z,R,\zeta, |\Phi-\varphi|)\,d|\Phi-\varphi|$$

Пусть возмущение поверхности r_1 таково, что площади поперечных сечений первоначальной и деформированной поверхностей равны. Тогда можно показать, что

$$\int_0^{2\pi} r_1\, d\varphi\sim\varepsilon, \qquad \int_0^{2\pi} \Delta fR\, d\Phi\sim\varepsilon^2 \tag{3}$$

Таким образом, отличие в интегралах по окружности C_0 от функций f_0 и f, порожденных осесимметричной и возмущенной поверхностями r_0 и r, имеющими одинаковое распределение поперечного сечения вдоль оси, имеет более высокий порядок малости, чем отличие их форм.

Рассмотрим теперь случай, когда интегрирование ведется по разным контурам: невозмущенная функция интегрируется по окружности C_0, возмущенная — по деформированному контуру C, который описывается уравнением ($\varepsilon_1 \ll 1$)

$$R(z,\Phi)=R_0(z)+\varepsilon_1 R_1(z,\Phi) \tag{4}$$

Запишем разность интегралов

$$\Delta I=I-I_0=\int\limits_0^{2\pi}\left\{f(z,R,\Phi)R\left[1+\left(\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right)^2R^{-2}\right]^{1/2}-f_0(z,R_0)R_0\right\}d\Phi$$

Раскладывая в этом выражении члены, зависящие от R, и возмущенную функцию $f(z, R_0+\varepsilon_1R_1, \Phi)$ в ряд по ε_1, получим

$$\Delta I=\mathrm{const}\cdot\max(\varepsilon^2, \varepsilon_1^2) \tag{5}$$

Численное значение константы определяет область применимости правила площадей и зависит от математической природы конкретной задачи. В частности, для сопротивления тонких тел в сверхзвуковых потоках и для трансзвуковых течений этот коэффициент равен нулю, что определяет широкую применимость правила в этих случаях.

Если контур интегрирования охватывает тело, то $\varepsilon=\varepsilon_1$ и $\Delta I\sim\varepsilon^2$.

Перейдем к интегрированию по поверхности тела. Рассмотрим разность интегралов от функций f и f_0, взятых по возмущенной поверхности S и осесимметричной S_0:

$$\Delta I^*=\iint\limits_S f(\zeta,r,\varphi)\,d\sigma-\iint\limits_{S_0} f_0(\zeta,r_0)\,d\sigma= \tag{6}$$

$$=\int\limits_a^b\int\limits_0^{2\pi}\left\{f(\zeta,r,\varphi)\left[1+r_\zeta'^2+\frac{r_\varphi'^2}{r^2}\right]^{1/2}r-f_0(\zeta,r_0)\times\right.$$

$$\left.\times(1+r_{0\zeta}'^2)^{1/2}r_0\right\}d\varphi\,d\zeta$$

Пользуясь, как и в предыдущем случае, разложениями по малой добавке εr_1, можно показать, что для новой функции f^* справедливо выражение (2)

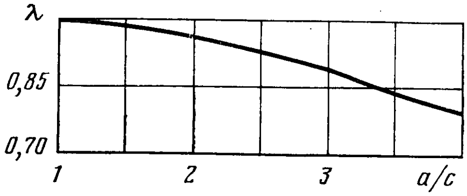
$$f^*(\zeta,r,\varphi)-f_0^*(\zeta,r_0)=\int\limits_a^b\int\limits_0^{2\pi}\varepsilon r_1G^*\,d\varphi\,d\zeta \tag{7}$$

$$f^*(\zeta,r,\varphi)=f(\zeta,r,\varphi)[1+r_\zeta'^2+(r_\varphi'/r)^2]^{1/2}r,\qquad f_0^*=f_0(\zeta,r_0)(1+r_{0\zeta}'^2)^{1/2}r_0$$

Рассматривая в (7) внутренний интеграл (по φ), видим, что находимся в условиях уже изученного случая. Следовательно, $\Delta I^*\sim\varepsilon^2$.

В том случае, когда оператор F приводит к появлению разрывных решений, справедливость правила площадей можно показать, применяя подход, изложенный в [2] для течений идеального газа.

Появление пограничных слоев может сильно сузить диапазон применимости правила, так как разложение функции $f(z, R_0+\varepsilon_1R_1, \Phi)$ в ряде по ε_1 с использованием лишь первого члена требует, чтобы деформация контура была меньше толщины пограничного слоя. Однако во многих случаях реализуется следующая ситуация. Пусть решение в пограничном слое непрерывно зависит от формы тела, тогда при изменениях формы тела, бо́льших толщины пограничного слоя, но достаточно малых по отношению к размерам самого тела, можно предположить линейную зависимость разности погранслойных величин в соответствующих точках на исходном и деформированном контурах, т. е. предположить справедливость формулы (2). В такой ситуации правило площадей применимо при деформациях контура, превышающих толщину пограничного слоя.



Фиг. 2

Проиллюстрируем действие правила площадей на примере присоединенной массы для тела, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости. Выражения для присоединенных масс имеют вид [7]

$$\lambda_{ik} = -\rho \iint\limits_{S} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k \, dS$$

Поскольку потенциалы φ_i и их производные непрерывно зависят от формы тела, то для величин λ справедливо (2) и применимо правило площадей. На фиг. 2 показано относительное изменение присоединенной массы поступательного движения λ_{11} для трехосного эллипсоида, когда отношение осей, перпендикулярных направлению движения, изменялось в несколько раз (за исходное тело был взят шар).

Другие примеры (для коэффициентов сопротивления, теплообмена и уноса массы, параметров в следе) даны в [1–5]. Как видно из фиг. 2 и результатов [1–5], правило площадей дает хорошую точность не только для малых ε, но и в гораздо более широкой области.

Подчеркнем еще раз, что правило площадей применимо к задачам разной физической и математической природы. Условием его использования является доказательство (или предположение о справедливости) равенства (2) и дифференцируемость исследуемых функций.

Авторы благодарны Ю. Б. Лифшицу за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коган М. Н.* О сопротивлении тел, близких к телам вращения.– Инж. ж., 1961, т. 1, № 3.
2. *Дворецкий В. М., Иванов М. Я., Коняев Б. А., Крайко А. Н.* О правиле «эквивалентности» для течений идеального газа.– ПММ, 1974, т. 38, № 6.
3. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М.: Машиностроение, 1975.
4. *Апштейн Э. З., Пилюгин Н. Н.* Правило площадей для коэффициента теплообмена пространственных аблирующих тел при тепловых потоках, локально зависящих от угла наклона поверхности.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 2.
5. *Пилюгин Н. Н., Тихомиров С. Г., Чернявский С. Ю.* Правило площадей для следа за пространственным телом.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3.
6. *Oswatitsch K.* The area rule.— Appl. mech. rev., 1957, v. 10, No. 12.
7. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.

Москва

Поступила в редакцию
10.XII.1979

УДК 533.6.011.72

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ЧЕТЫРЕХОКИСИ АЗОТА

БАЖИН М. А., РЫЖАНКОВ М. А., САЛТАНОВ Г. А.

Рассматривается распад произвольного разрыва и отражение веера волн разрежения от неподвижной стенки в диссоциирующей четырехокиси азота. Система уравнений газодинамики и уравнение сохранения массы i-го компонента численно интегрировались методом Маккормака. Показано существенное влияние кинетики на характеристики ударной волны и контактного разрыва.

Исследованию течений релаксирующего газа посвящено много работ (см., например, [1—3]). Численный анализ таких течений производился, как правило, в стационарной или квазистационарной постановке. В связи с перспективностью создания атомных электростанций большой мощности на диссоциирующей четырехокиси азота [4] необходимо исследование особенностей течения N_2O_4 в турбинах, которое характеризуется нестационарностью, наличием газодинамических разрывов и изменением типа системы дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемое течение.

Исследования такого рода осложняются тем, что четырехокись азота диссоциирует в широком диапазоне температур и давлений по схеме $N_2O_4 \rightleftarrows 2NO_2 \rightleftarrows 2NO + O_2$. Причем если первая стадия реакции практически равновесна [5], то скорость протекания второй стадии реакции такова, что ее необходимо учитывать, особенно в таких быстрых течениях, которые наблюдаются в турбинах. Наличие химических реакций приводит к тому, что даже в предположении об идеальногазовом поведении