

9. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость. — Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 6.
 10. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
 11. Бай Ши и. Теория струй. М.: Физматгиз, 1960.

Москва

Поступила в редакцию
29.XI.1979

УДК 532.526.2.532

О СТРУКТУРЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕНЬЮТОНОВСКИХ ДИЛАТАНТНЫХ ЖИДКОСТЯХ

ПАВЛОВ К. Б., ФЕДотов И. А., ШАХОРИН А. П.

Вопрос о структуре ламинарного пограничного слоя в неньютоновских дилатантных жидкостях впервые рассматривался в [1]. Было показано, что пограничный слой в дилатантных жидкостях имеет конечную толщину, если показатель степени в реологическом законе $n > 2$. Если же $1 < n < 2$, то утверждалось, что пространственная локализация пограничного слоя отсутствует.

Между тем факт пространственной локализации пограничного слоя в неньютоновских дилатантных жидкостях имеет место при всех значениях $n > 1$ [2]. Физически пространственная локализация пограничного слоя в дилатантных жидкостях обуславливается тем, что в этих средах сдвиговые возмущения, формирующие пограничный слой, распространяются с конечной скоростью при любых $n > 1$. Сделанное в [1] заключение об отсутствии пространственной локализации пограничного слоя при $1 < n < 2$ является следствием некорректности проведенного там анализа.

Факт пространственной локализации сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях может быть прослежен при рассмотрении других известных задач теории пограничного слоя, некоторые из них исследовались в [2–5]. Качественное исследование всей совокупности решений задач теории пограничного слоя в дилатантных жидкостях при $1 < n < 2$ проводилось в [6], причем вследствие неполного анализа факт пространственной локализации обнаружен не был.

Проводимое ниже рассмотрение ставит своей целью показать, что в дилатантных жидкостях с $1 < n < 2$ имеет место локализация пограничного слоя.

Рассмотрим движение неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом

$$(1) \quad \sigma_{ij} = k (f_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta})^{(n-1)/2} f_{ij}$$

Здесь σ_{ij} — девиатор тензора напряжений, f_{ij} — тензор скоростей деформаций, k , n — реологические постоянные жидкости. Для случая $n < 1$ жидкости называются псевдопластическими, для $n > 1$ — дилатантными, случай $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости.

Система уравнений, описывающая движение неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом (1) в приближении теории пограничного слоя записывается в виде [1]

$$(2) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Вводя функцию тока $\psi(x, y)$ и переходя к автомодельной переменной η по следующим формулам, запишем систему (2) в виде одного уравнения

$$(3) \quad \begin{aligned} \psi(x, y) &= U_{\infty} x \left[\frac{n(n+1)}{\text{Re}_x} \right]^{1/(n+1)} f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{x} \left[\frac{\text{Re}_x}{n(n+1)} \right]^{1/(n+1)} \\ y(x, y) &= U_{\infty} f'(\eta) \\ v(x, y) &= \frac{U_{\infty}}{n+1} \left[\frac{n+1}{\text{Re}_x} \right]^{1/(n+1)} \{ \eta f'(\eta) - f(\eta) \} \\ \text{Re}_x &= \frac{\rho x^n U_{\infty}^{2-n}}{k} \\ |f''|^{n-1} f''' + f'' f &= 0 \end{aligned}$$

Здесь штрихом обозначается производная по автомодельной переменной, Re_x — местное число Рейнольдса.

Используя групповые свойства уравнения (3), в частности группу линейных преобразований $(\eta, f) \rightarrow (a\eta, a^{(2n-1)/(n-2)}f)$, уравнение (3) можно свести к уравнению первого порядка и двум квадратурам [6]

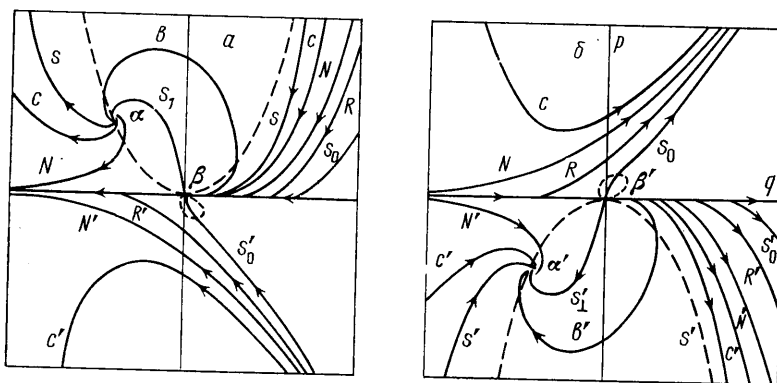
$$(4) \quad \frac{dp}{dq} = \frac{p[(2n-1)|p|^{1-n} + 3q] \text{sign } f}{(n+1)q^2 \text{sign } f - (2n-1)p}$$

$$f = \exp \left(\int \frac{\text{sign } f (2n-1) q dq}{(2n-1)p - (n+1)q^2 \text{sign } f} \right)$$

$$(5) \quad \eta = \int \frac{df}{q|f|^{(n+1)/(2n-1)}}, \quad p = \frac{f''}{|f|^{3/(2n-1)}}, \quad q = \frac{f'}{|f|^{(n+1)/(2n-1)}}$$

Здесь p, q — инварианты группы L преобразований.

Рассмотрим решения уравнения (4) для случая течений «упрочняющихся» дилатантных жидкостей ($1 < n < 2$).



Фиг. 1

Следуя методике [6], для качественного представления решений воспользуемся двухлистной фазовой плоскостью, один из листов которой соответствует положительным значениям функции тока f , другой — отрицательным. На каждом листе фазовой плоскости (p, q) уравнение (4) имеет особые точки α ($f > 0$) и α' ($f < 0$) с координатами

$$(6) \quad p_\alpha = [1/9(2n^2 + n - 1)]^{1/(2n-1)}, \quad q_\alpha = 1/3(1 - 2n)p_\alpha^{1-n}$$

$$p_{\alpha'} = -p_\alpha, \quad q_{\alpha'} = q_\alpha$$

классифицируемые как неустойчивый и устойчивый фокус соответственно, и особые точки β и β' с координатами $p=0, q=0$. При $n=1$ точка $\beta(\beta')$ является особой точкой типа седло — узел [7]. При $n > 1$ получаем вырожденный случай, когда через $\beta(\beta')$ проходят две интегральные кривые: кривая, имеющая в точке $\beta(\beta')$ касание с осью p , и линия $p=0$. В любой окрестности точки $\beta(\beta')$ имеется бесчисленное множество интегральных кривых (фиг. 1, а, б).

Уравнение (4) имеет особое решение $p=0$, являющееся его P -дискриминантом. Этот факт не был замечен в [6], но именно это обстоятельство в конечном счете приводит к пространственной локализации пограничного слоя в дилатантных жидкостях с $1 < n < 2$. В координатах f, η особое решение имеет вид $f = c\eta + b$.

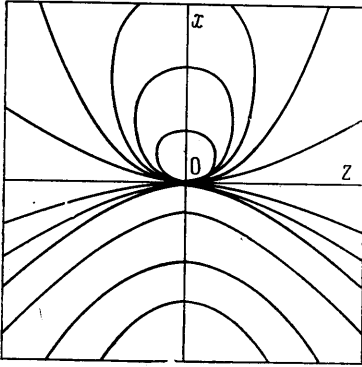
В силу инвариантности уравнения (3) относительно преобразования $(f, \eta) \rightarrow (-f, -\eta)$ интегральными кривыми на двухлистной фазовой плоскости (p, q) соответствуют такие же кривые на плоскости $(-p, q)$ с изменением направления движения вдоль кривой. Расположение интегральных кривых вблизи особых точек $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ представлено на фиг. 1. Штриховые линии соответствуют геометрическому месту точек перегиба интегральных кривых.

Для исследования поведения интегральных кривых на большом расстоянии от начала координат пополним евклидову плоскость Π до проективной плоскости RP^2 , отнесенной к однородным координатам X, Y, Z . Тогда уравнение (4) в однородных

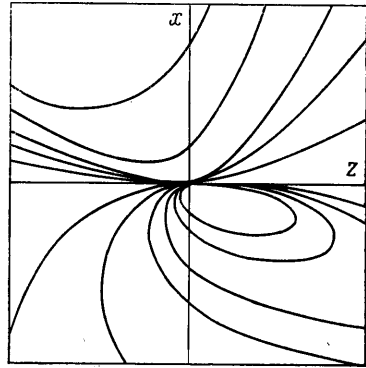
координатах запишется в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} & -Z[(2n-1)ZY|Y|^{1-n}|Z|^{n-1}+3XY] \operatorname{sign} f dX + Z[(n+1)X^2 \operatorname{sign} f - \\ & - (2n-1)YZ] dY + \{X[(2n-1)ZY|Y|^{1-n}|Z|^{n-1}+3XY] \operatorname{sign} f - \\ & - Y[(n+1)X^2 \operatorname{sign} f - (2n-1)YZ]\} dZ = 0 \end{aligned}$$

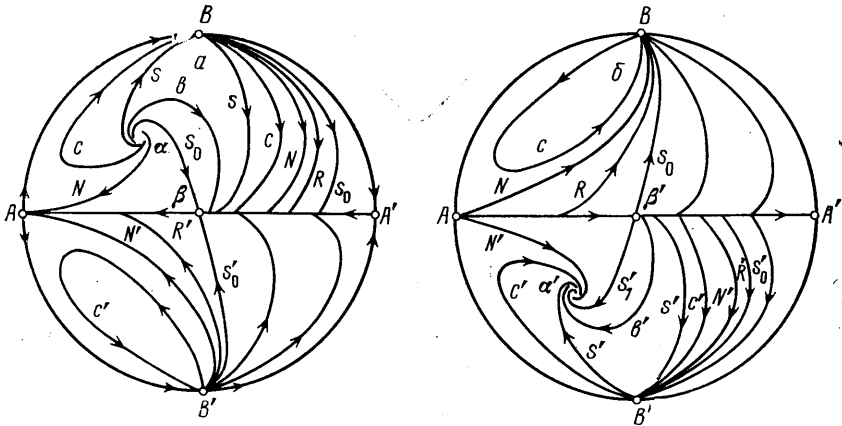
Особые точки определяются уравнениями $Z=0, X^2Y=0$ и имеют вид $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0)$.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Исследуем характер этих точек.

Особая точка A . Соответствующие декартовы координаты $y=Y/X, z=Z/X$. Полагая в (7) $X=1, dX=0, y=Y, z=Z$, получим динамическую систему [8]

$$\frac{dy}{dt} = -(2-n)y \operatorname{sign} f - [(2n-1)y^2z + zy|y|^{1-n}|z|^{n-1}]$$

$$\frac{dz}{dt} = (n+1)z \operatorname{sign} f - (2n-1)yz^2$$

Так как характеристические корни равны $\lambda_1=n-2 < 0, \lambda_2=n+1 > 0$, то точка A является седлом.

Особая точка B . Соответствующие декартовы координаты $x=X/Y, z=Z/Y$. Полагая в (7) $Y=1, dY=0, x=X, z=Z$, получим систему:

$$\frac{dz}{dt} = [3xz + (2n-1)z^2|z|^{n-1}] \operatorname{sign} f$$

(8)

$$\frac{dx}{dt} = (2n-1)z + [(2-n)x^2 \operatorname{sign} f + (2n-1)xz|z|^{n-1}]$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости в (8) и воспользовавшись заменой $z=x^2u$, получим аналитическое решение в виде

(9)

$$x = \pm \sqrt{c|z|^{2/s(2-n)} + 2|z|}$$

Уравнение (9) полностью определяет топологическую структуру точки B (фиг. 2). Учет членов порядка выше второго качественно не влияет на структуру решения системы (8) в окрестности точки B . Результаты соответствующего численного расчета представлены на фиг. 3. Аналогичные результаты получаются методом «граничных особенностей» [9].

Таким образом, зная поведение интегральных кривых вблизи особых точек, построим фазовую картину. Для этого отождествим проективную плоскость RP^2 с замкнутым кругом Ω со склеенными диаметрально противоположными точками границы. На фиг. 4, а, б представлено поведение интегральных кривых на плоскости Ω .

«Склеивая» оба листа фазовой плоскости в точках A и B , следует отметить, что существует только два типа траекторий: к одному из них относятся интегральные кривые, соединяющие особую точку $\alpha(\alpha')$ с особым решением $p=0$ (траектории s, s', c, c', N, N' фиг. 1, 4), к другому — интегральные кривые, соединяющие особое решение на листе $f < 0$ с особым решением на листе $f > 0$ (траектории R, R', s_0, s_0' фиг. 1, 4). Существование особого решения указывает на тот факт, что решения уравнения не имеют единого аналитического описания во всей области определения автомодельной переменной η , т. е. существует такое значение $\eta = \eta_*$, что для всех $\eta > \eta_*$, $f = c\eta + b$. Таким образом, в точке $\eta = \eta_*$ «сшиваются» два решения: общее и особое. Физически этот факт означает, что существует конечная область $0 < \eta = \eta_* < \infty$, в которой происходит изменение продольной составляющей скорости, т. е. пространственная локализация пограничного слоя.

Первому типу соответствуют интегральные кривые, описывающие пограничный слой на полубесконечной пластине с вдувом или отсосом через поверхность пластины, а также пограничный слой на пластине с фиксированной передней кромкой и скоростью поверхности пластины, направленной противоположно скорости набегающего потока. При этом самой асимптотической точке $\alpha(\alpha')$ соответствует решение, описывающее течение вблизи передней кромки.

Второй тип интегральных кривых описывает слои смещения. В частности, траектории типа R соответствуют задаче о слое смещения встречных потоков. В этой связи отметим, что в случае ньютоновской жидкости $n=1$ решение такой задачи не существует [10].

В заключение авторы выражают благодарность К. А. Волосову, А. П. Крищенко, М. А. Яковлеву за полезные обсуждения в ходе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Acrivos Andreas, Shah M. J., Petersen E. E. Momentum and heat Transfer in laminar boundary-layer flows of non-newtonian fluids past external surface.— A. I. ch. E. Journal, 1960, v. 6, No. 2.
2. Павлов К. Б. К теории пограничного слоя неньютоновских нелинейно-вязких сред.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 3.
3. Павлов К. Б. К теории плоской затопленной струи неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом.— ПМТФ, 1979, № 1.
4. Павлов К. Б. Об одном автомодельном решении задачи гидродинамики нелинейно-вязких жидкостей.— Инж.-физ. ж., 1979, т. 36, № 1.
5. Павлов К. Б. К теории ламинарного пограничного слоя проводящей неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом в поперечном магнитном поле.— Магнитная гидродинамика, 1979, № 1.
6. Жижин Г. В., Уфимцев А. А. О течениях в плоском ламинарном пограничном слое дилатантных жидкостей.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 5.
7. Casal P. Sur l'ensemble des solutions l'équation de la couche limite. J. Méch., 1972, v. 11, No. 3 (рус. перев.: О совокупности решений уравнения пограничного слоя. Механика. Период. сб. иностр. статей, 1974, № 4).
8. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. Фроммер М. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер.— Усп. матем. н., 1941, вып. 9.
10. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности. В сб.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: Наука, 1974.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1979