

УДК 532.516.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ

ШТЕМЛЕР Ю. М.

Изучается линейная устойчивость плоскопараллельных нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: в слое смешения двух потоков, в струе с постоянным расходом и около стенки, внезапно приведенной в движение [1]. Медленное изменение этих течений со временем по сравнению со скоростью изменения возмущений позволяет воспользоваться методом двухмасштабных разложений [2]. Исследование устойчивости непараллельных течений с учетом их медленного изменения по продольной координате проводилось, например, в работах [3—6]. Рассматриваемые в данной работе нестационарные течения обладают рядом характерных свойств непараллельных потоков [1], но в отличие от них описываются точными решениями уравнений Навье—Стокса. Кроме того, для нестационарных плоскопараллельных потоков с помощью уравнения баланса энергии однозначно устанавливается критерий нейтральной устойчивости.

1. Рассмотрим устойчивость плоскопараллельного нестационарного течения

$$(1.1) \quad U(Y, T) = U_0 + Q(T)u(Y/\Lambda(T)), \quad V=0, \quad P=P_+ \\ \Lambda(T) = (\nu T)^{1/2}, \quad Q(T) = \Gamma(\nu T)^{-b/2}$$

Здесь P — давление, U и V — проекции вектора скорости на оси X и Y ; T — время; P_+ — величина давления при $|Y| \rightarrow \infty$; ν — кинематический коэффициент вязкости; U_0 и Γ — размерные, а b — безразмерная постоянные, зависящие от конкретного вида течения.

Для течений в слое смешения, в струе с постоянным расходом j и около плоской стенки, внезапно приведенной в движение, имеем соответственно [1]

$$U_0 = \frac{U_+ + U_-}{2}, \quad \Gamma = \frac{U_+ - U_-}{2}, \quad b=0, \quad u(y) = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$(1.2) \quad U_0=0, \quad \Gamma = \frac{j}{2\rho\pi^{1/2}}, \quad b=1, \quad u(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right)$$

$$U_0=W, \quad \Gamma=-W, \quad b=0, \quad u(y) = \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2}\right)$$

В соотношениях (1.2) U_+ , U_- — значения скорости при $|Y| \rightarrow \infty$, W — скорость стенки, ρ — плотность жидкости.

Предположим, что в момент времени $T=T^0$ на основное течение, описываемое соотношениями (1.1), (1.2), наложено возмущение, функция тока которого $\Psi'(X, Y, T)$ периодически зависит от продольной координаты X с размерным периодом $2\pi/K^0$. Учитывая периодичность возмущений по продольной координате и автоматическую невозмущенность течения, удобно перейти к следующим безразмерным переменным:

$$t = \int_{T^0}^T \frac{Q(T)}{\Lambda(T)} dT, \quad y = \frac{Y}{\Lambda(T)}, \quad x + u_0 t = \frac{X}{\Lambda(T^0)} \quad \left(u_0 = \frac{U_0}{Q}\right)$$

$$(1.3) \quad \psi'(x, y, t) = \frac{\Psi'(X, Y, T)}{Q(T)\Lambda(T)}$$

Линеаризованное уравнение для функции тока возмущений, записанное в безразмерных переменных (1.3), имеет вид

$$(1.4) \quad \left(N - \frac{\partial}{\partial t} M\right) \psi' = \varepsilon^*(t) S \psi' \\ M = \lambda^{*2}(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad S = -\frac{1}{2} \left(b+1+y \frac{\partial}{\partial y}\right) M \\ N = \frac{M^2}{\operatorname{Re}^*(t)} - \left(uM - \frac{d^2}{dy^2} u\right) \lambda^*(t) \frac{\partial}{\partial x} \\ \operatorname{Re}^*(t) = \operatorname{Re}^0 q^*(t) \lambda^*(t), \quad \operatorname{Re}^0 = Q(T^0) \Lambda(T^0) / \nu$$

Здесь Re^* — число Рейнольдса, построенное по мгновенным значениям скорости $Q(T) = Q(T^0)q^*(t)$ и толщины $\Lambda(T) = \Lambda(T^0)\lambda^*(t)$ невозмущенного течения. Функциональный параметр $\varepsilon^*(t) = 1/Re^*(t)$ введен таким образом, что при $\varepsilon^* = 0$ уравнение (1.4) совпадает с аналогичным уравнением для пульсаций в стационарных параллельных течениях (с точностью до замены $\lambda^*(t)\partial/\partial x$ и $Re^*(t)$ на $\partial/\partial x$ и Re^0).

Условия прилипания на стенке и затухания во внешнем течении имеют вид

$$(1.5) \quad \psi' = \frac{\partial}{\partial y} \psi' = 0 \quad (y=0), \quad \psi' \rightarrow 0 \quad (|y| \rightarrow \infty)$$

Введем вспомогательную функцию времени $\tau(t)$, определяемую соотношениями

$$(1.6) \quad \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon^*(t), \quad \tau(0) = 0$$

Используя равенства (1.1), (1.3), нетрудно показать, что

$$(1.7) \quad \begin{aligned} Re^*(t) &= Re(\tau), & \varepsilon^*(t) &= \varepsilon(\tau), & q^*(t) &= q(\tau), & \lambda^*(t) &= \lambda(\tau) \\ \lambda(\tau) &= \exp(\tau/2), & q(\tau) &= \exp(-b\tau/2) \\ Re(\tau) &= Re^0 q(\tau) \lambda(\tau), & \varepsilon(\tau) &= 1/Re(\tau) \end{aligned}$$

Отметим, что в уравнении (1.6) $\varepsilon^*(t) = \varepsilon(\tau) \leq 1/Re^0$.

Ниже будем предполагать, что число Рейнольдса Re^0 достаточно велико, так что скорость основного течения медленно меняется по сравнению со скоростью возмущенного течения, в этом случае λ , q , Re и ε являются медленными функциями времени.

2. Для исследования устойчивости рассматриваемых течений воспользуемся методом двухмасштабных разложений [2]. Периодическое по продольной координате решение задачи (1.4), (1.5) ищем в виде

$$(2.1) \quad \psi'(x, y, t) = \exp(i\theta) \psi(y, \tau) i/\kappa(\tau)$$

Здесь фаза θ является «быстрой», а τ — «медленной» переменной, нормирующий множитель i/κ введен таким образом, чтобы $\psi(y, \tau)$ являлась амплитудной функцией поперечной компоненты скорости; $\kappa(\tau) = \kappa^0 \lambda(\tau)$, $\kappa^0 = K^0 \Lambda(T^0)$. Связь между переменными x , t и θ , τ определяется соотношениями

$$(2.2) \quad \lambda^*(t) \frac{\partial \theta}{\partial x} = \kappa(\tau), \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega(\tau), \quad \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon(\tau), \quad \tau(0) = 0$$

В уравнениях (2.2) $\omega(\tau)$ — неизвестное собственное значение. Подставляя (2.1), (2.2) в уравнение (1.4), получим

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (N_1 - i\omega M_1) \psi &= \varepsilon \left(G_1 + M_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \right)' \psi \\ G_1 &= S_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \kappa^2(\tau) \right) \end{aligned}$$

Здесь операторы N_1 , M_1 и S_1 получены из N , M и S заменой $\lambda^*(t)\partial/\partial x$ на $i\kappa(\tau)$. Будем искать $\omega(\tau)$ и $\psi(y, \tau)$ в виде рядов по $\varepsilon(\tau)$:

$$(2.4) \quad \omega(\tau) = \omega^0(\tau) + \varepsilon(\tau)\omega^1(\tau) + \dots, \quad \psi(y, \tau) = \psi^0(y, \tau) + \varepsilon(\tau)\psi^1(y, \tau) + \dots$$

Подставляя разложения (2.4) в уравнение (2.3), получим в нулевом и первом приближении по ε :

$$(2.5) \quad (N_1 - i\omega^0 M_1) \psi^0 = 0$$

$$(2.6) \quad (N_1 - i\omega^0 M_1) \psi^1 = G_1 \psi^0 + M_1 \frac{\partial}{\partial \tau} \psi^0 + i\omega^1 M_1 \psi^0$$

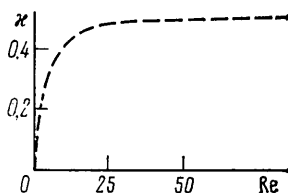
Краевые условия для уравнений (2.5), (2.6), согласно (1.5), (2.1), (2.4), имеют вид

$$(2.7) \quad \psi^k = \psi_y^k = 0 \quad (y=0), \quad \psi^k \rightarrow 0 \quad (|y| \rightarrow \infty), \quad k=0, 1$$

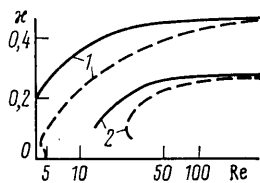
Здесь нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Условия (2.7) затухания при $y \rightarrow \infty$ заменяются условиями склейки в точке $y = \delta$ с асимптотическим решением при $y \geq \delta$, где δ выбирается таким образом, чтобы $u(\delta) \approx u(\infty)$, $u_{yy}(\delta) \approx 0$ (при отыскании частных решений неоднородных задач для ψ^0 и ψ^1 вкладом от вязких членов пренебрегается). Для течений в струе отдельно рассматриваются возмущения с симметричной и антисимметричной функцией тока, а для течения в слое смешения с нечетным профилем скорости допускается решение, удовлетворяющее условию $\psi^0(y, \tau) = \psi^0(-y, \tau)$ (ψ^0 — величина, комплексно сопряженная к ψ^0 , при этом $\text{Real}(\omega^0) = 0$ [8]).

Уравнение и граничные условия, необходимые при определении функции ψ^0 , входящей в правую часть уравнения (2.6) для ψ^1 , могут быть получены дифференцированием соответствующих уравнений для ψ^0 по τ . Решения неоднородных задач для ψ^0 и ψ^1 существуют лишь при специальных значениях ω^0 и ω^1 , удовлетворяю-



Фиг. 1



Фиг. 2

щих условиям разрешимости [6]. Численные значения ω^0 и ω^1 находились с помощью «алгебраического» метода [9].

Согласно уравнению баланса энергии, рост или убывание кинетической энергии пульсаций зависит от соотношения изменений энергии за счет вязкой диссипации и работы рейнольдсовых напряжений [10]. Определим уравнение нейтральной кривой из условия равенства нулю скорости изменения кинетической энергии пульсаций. В безразмерных переменных это условие с точностью до членов первого порядка по ε имеет вид

$$(2.8) \quad \text{Real}(i\omega^0) + \varepsilon \left[\text{Real} \left(i\omega^1 + i\omega^0 \frac{I_1}{I_0} \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} b + \frac{I_2}{I_0} \right] = 0$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} (|\psi_v^0|^2 + \kappa^2 |\psi^0|^2) dy$$

$$I_1 = 2 \text{Real} \int_0^{\infty} (\psi_v^0 \psi_v^1 + \kappa^2 \psi^0 \psi^1) dy$$

$$I_2 = \text{Real} \int_0^{\infty} (\psi_v^0 \psi_{v\tau}^0 + \kappa^2 \psi^0 \psi_{\tau}^0 - 0.5 |\psi_v^0|^2) dy$$

Поскольку $\varepsilon(\tau) = 1/\text{Re}(\tau)$, уравнение (2.8) определяет нейтральную кривую в плоскости мгновенных значений волнового числа и числа Рейнольдса (κ , Re) и зависит от времени неявно через $\kappa(\tau)$ и $\text{Re}(\tau)$.

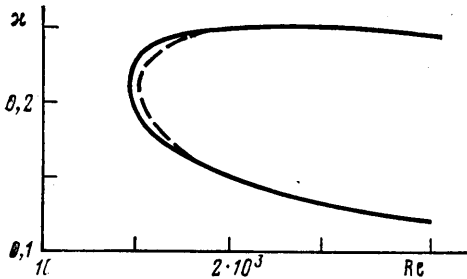
Кривые нейтральной устойчивости, полученные с учетом и без учета членов порядка ε , приведены на фиг. 1—3 (сплошные и штриховые линии соответственно). Представленные результаты соответствуют течению в слое смешения (фиг. 1), симметричным и антисимметричным возмущениям в струе (фиг. 2, кривые 1 и 2), течению около стенки (фиг. 3).

Заметим, что штриховые нейтральные кривые могут быть получены фиксированием при $\tau = 0$ коэффициентов в уравнении для функции тока возмущений. Причем эти кривые для нестационарных течений в струе и слое смешения совпадают с нейтральными кривыми, полученными в плоскопараллельном подходе для непараллельных течений в дальнем следе и слое смешения [10, 11] (поскольку у этих течений совпадают соответствующие безразмерные профили продольной скорости [1, 7]).

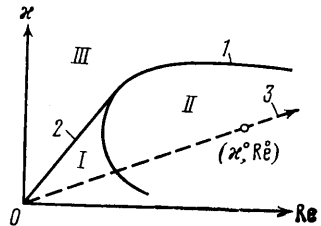
Для всех рассмотренных случаев учет членов порядка ε , обусловленных нестационарностью основного потока, приводит к расширению области неустойчивости.

Для течения около стенки, внезапно приведенной в движение, учет членов порядка ε незначительно уменьшает критическое число Рейнольдса, полученное в нулевом приближении по ε . Для свободных от стенок течений учет членов порядка ε заметно меняет вид кривых нейтральной устойчивости при $Re \sim 10$, однако уже при $Re \sim 10^2$ членами порядка ε можно пренебречь, а нестационарность учитывать параметрически, через зависимость κ и Re от τ .

Отметим, что зависимость κ и Re от τ существенно меняет интерпретацию кривой нейтральной устойчивости. Действительно, пусть в плоскости (κ, Re) выбрана некоторая точка (κ^0, Re^0) , с ростом времени мгновенное значение волнового числа $\kappa(\tau) = \kappa^0 \lambda(\tau)$ будет увеличиваться, так как, согласно соотношениям (1.7), $\lambda(\tau) = \exp(\tau/2)$. При этом мгновенное значение числа Рейнольдса остается постоянным для течения в струе ($Re(\tau) \equiv Re^0$) и увеличивается пропорционально $\kappa(\tau)$ для те-



Фиг. 3



Фиг. 4

чений в слое смещения и около плоской стенки ($Re(\tau) = \kappa(\tau) Re^0 / \kappa^0$). Для всех рассматриваемых течений траектория точки $(\kappa(\tau), Re(\tau))$ в плоскости (κ, Re) является прямой линией. Отметим, что для течения в струе любая траектория должна быть перпендикулярна оси $\kappa=0$, а для течений в слое смещения и около плоской стенки — проходить через точку $\kappa=0, Re=0$, причем касательная к нейтральной кривой траектория делит ее на верхнюю и нижнюю ветви. На фиг. 4 схематично изображены: типичная кривая нейтральной устойчивости (I), касательная траектория (прямая 2), траектория, проходящая через произвольную точку (κ^0, Re^0) (прямая 3). Плоскость (κ, Re) можно разделить на три области: I — область, заключенную между касательной траекторией, прямой $\kappa=0$ и нижней ветвью нейтральной кривой; II — область, лежащую внутри нейтральной кривой; III — область, лежащую выше верхней ветви нейтральной кривой и отрезка касательной траектории.

Начальные значения (κ^0, Re^0) , принадлежащие области I, соответствуют затухающим возмущениям, однако с течением времени мгновенные значения (κ, Re) пересекут нижнюю ветвь нейтральной кривой и попадут в область неустойчивости. Для (κ^0, Re^0) , принадлежащих области II, возмущения растут до тех пор, пока мгновенные значения (κ, Re) не пересекут верхней ветви нейтральной кривой, после чего они начнут затухать. Для (κ^0, Re^0) из области III возмущения монотонно затухают во все моменты времени.

Автор благодарит Г. И. Петрова за постановку задачи, а также С. Я. Герценштейна и А. В. Латышева за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.
2. Найфэ А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
3. Левченко В. Я., Соловьев А. С. Устойчивость пограничного слоя на волнистой поверхности. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 6.
4. Diprima R. S., Stuart J. T. Non-local effects in stability of flow between eccentric rotating cylinders. — J. Fluid Mech., 1972, v. 54, pt 3.
5. Bouthier M. Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles, pt 1. — J. Méc., 1972, v. 11, pt 4.
6. Saric W. S., Nayfeh A. H. Nonparallel stability of boundary-layer flows. — Phys. Fluids, 1975, v. 18, No. 8.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
8. Lessen M., Harpavat G., Zien H. M. Stability of three-dimensional laminar and turbulent shear layers. — J. Fluid Mech., 1969, v. 38, pt 1.

9. Герценштейн С. Я., Штемлер Ю. М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость. — Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 6.
 10. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
 11. Бай Ши и. Теория струй. М.: Физматгиз, 1960.

Москва

Поступила в редакцию
29.XI.1979

УДК 532.526.2.532

О СТРУКТУРЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕНЬЮТОНОВСКИХ ДИЛАТАНТНЫХ ЖИДКОСТЯХ

ПАВЛОВ К. Б., ФЕДотов И. А., ШАХОРИН А. П.

Вопрос о структуре ламинарного пограничного слоя в неньютоновских дилатантных жидкостях впервые рассматривался в [1]. Было показано, что пограничный слой в дилатантных жидкостях имеет конечную толщину, если показатель степени в реологическом законе $n > 2$. Если же $1 < n < 2$, то утверждалось, что пространственная локализация пограничного слоя отсутствует.

Между тем факт пространственной локализации пограничного слоя в неньютоновских дилатантных жидкостях имеет место при всех значениях $n > 1$ [2]. Физически пространственная локализация пограничного слоя в дилатантных жидкостях обуславливается тем, что в этих средах сдвиговые возмущения, формирующие пограничный слой, распространяются с конечной скоростью при любых $n > 1$. Сделанное в [1] заключение об отсутствии пространственной локализации пограничного слоя при $1 < n < 2$ является следствием некорректности проведенного там анализа.

Факт пространственной локализации сдвиговых возмущений в дилатантных жидкостях может быть прослежен при рассмотрении других известных задач теории пограничного слоя, некоторые из них исследовались в [2–5]. Качественное исследование всей совокупности решений задач теории пограничного слоя в дилатантных жидкостях при $1 < n < 2$ проводилось в [6], причем вследствие неполного анализа факт пространственной локализации обнаружен не был.

Проводимое ниже рассмотрение ставит своей целью показать, что в дилатантных жидкостях с $1 < n < 2$ имеет место локализация пограничного слоя.

Рассмотрим движение неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом

$$(1) \quad \sigma_{ij} = k (f_{\alpha\beta} f_{\alpha\beta})^{(n-1)/2} f_{ij}$$

Здесь σ_{ij} — девиатор тензора напряжений, f_{ij} — тензор скоростей деформаций, k , n — реологические постоянные жидкости. Для случая $n < 1$ жидкости называются псевдопластическими, для $n > 1$ — дилатантными, случай $n = 1$ соответствует ньютоновской жидкости.

Система уравнений, описывающая движение неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом (1) в приближении теории пограничного слоя записывается в виде [1]

$$(2) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{k}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Вводя функцию тока $\psi(x, y)$ и переходя к автомодельной переменной η по следующим формулам, запишем систему (2) в виде одного уравнения

$$(3) \quad \begin{aligned} \psi(x, y) &= U_{\infty} x \left[\frac{n(n+1)}{\text{Re}_x} \right]^{1/(n+1)} f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{x} \left[\frac{\text{Re}_x}{n(n+1)} \right]^{1/(n+1)} \\ y(x, y) &= U_{\infty} f'(\eta) \\ v(x, y) &= \frac{U_{\infty}}{n+1} \left[\frac{n+1}{\text{Re}_x} \right]^{1/(n+1)} \{ \eta f'(\eta) - f(\eta) \} \\ \text{Re}_x &= \frac{\rho x^n U_{\infty}^{2-n}}{k} \\ |f''|^{n-1} f''' + f'' f &= 0 \end{aligned}$$