

УДК 532.5.011

**ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ ДИАФРАГМЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ
В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ**

ДЗУГАЕВ В. В.

В отрывном стационарном течении около диафрагмы можно выделить две характерные области: поступательный поток, по структуре близкий к потенциальному, и циркуляционное течение с замкнутыми линиями тока внутри зоны отрыва с приближенно постоянной завихренностью ω [1]. Форма границы зоны отрыва при этом неизвестна. Таким образом, необходимо решить задачу о склейке вихревого и потенциального течений по заранее неизвестной линии тока. В том случае, когда обе концевые точки линии склейки известны, вихрепотенциальная задача рассматривалась рядом авторов [2—4 и др.].

Численное решение вихрепотенциальной задачи с учетом разрыва тангенциальной составляющей скорости на линии склейки, что приводит к соответствующему скачку постоянной Бернулли на этой линии, приведено в [4].

В настоящей работе рассматривается гидродинамическая задача отрывного обтекания диафрагмы, имеющей острые кромки. Завихренность жидкости в зоне отрыва определяется из условия Жуковского — Чаплыгина конечности скорости на острой кромке, а протяженность этой зоны находится из условия обращения в нуль скорости жидкости в точке замыкания зоны отрыва.

1. Схема течения представлена на фиг. 1, верхняя половина канала отброшена ввиду симметрии течения относительно оси A, E_1 канала. На бесконечности слева скорость жидкости горизонтальна и равна U_A , зона отрыва, находящаяся за диафрагмой, начинается от острой кромки C и заканчивается в точке L замыкания, линия CL , отделяющая потенциальную часть потока (область D) от вихревой части его — зоны отрыва (область D^*), неизвестна. Жидкость невязкая, несжимаемая. Всяду в области, занятой жидкостью, выполняется уравнение

$$(1.1) \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} = 0, \quad z \in D; \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} = -i \frac{\omega}{2}, \quad z \in D^*$$

Здесь $\bar{V} = u - iv$ — комплексная скорость течения, u, v — проекции вектора скорости в декартовых координатах $x, y, z = x + iy$ — комплексная координата точки плоскости, $\bar{z} = x - iy$.

Для определения комплексной скорости отобразим конформно область, занятую жидкостью, на полосу без выступов в плоскости χ шириной b (фиг. 2):

$$z = ia + \frac{h}{\pi} \ln \left[\left(\operatorname{ch} \frac{\pi \chi}{2b} + \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi \chi}{2b} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi \chi_*}{2b}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + i \operatorname{sh} \frac{\pi \chi_*}{2b} \right)^{-1} \right] \\ \frac{dz}{d\chi} = \frac{h}{2b} \operatorname{sh} \frac{\pi \chi}{2b} \left(\operatorname{sh}^2 \frac{\pi \chi}{2b} - \operatorname{sh}^2 \frac{\pi \chi_*}{2b} \right)^{-1/2} = \frac{h}{2b} F \\ \chi_* = \frac{2b}{\pi} \ln \left[\left(1 + \sin \frac{\pi a}{h} \right) \cos^{-1} \frac{\pi a}{h} \right], \quad \chi = \chi_1 + i\chi_2$$

Здесь h — ширина канала в физической плоскости, a — величина выступа диафрагмы.

В случае отсутствия тангенциального разрыва на CL комплексная скорость равна

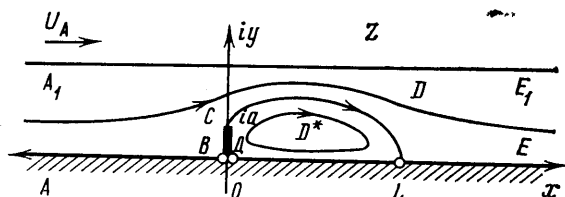
$$(1.2) \quad \bar{V} = \frac{dW}{dz} + U_1, \quad \frac{dW}{dz} = U_A f = u_0 - iv_0, \quad f = \frac{1}{F}$$

$$(1.3) \quad U_1 = \frac{i\omega}{4b} \frac{d\chi}{dz} \iint_{D^*} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 (\varphi(\zeta, \chi) - \varphi(\bar{\zeta}, \chi)) d\xi d\eta = u_1 - iv_1$$

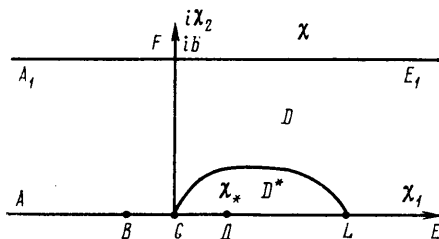
$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \varphi(\zeta, \chi) = \text{cth} \frac{\pi}{2b} (\zeta - \chi) - 1$$

Здесь $\varphi(\zeta, \chi)$ — ядро Коши с чисто мнимым периодом $i2b$ [5].

Первое слагаемое формулы (1.2) обеспечивает выполнение граничных условий для комплексной скорости \bar{V} , а благодаря наличию второго слагаемого функция \bar{V} удовлетворяет уравнению (1.1) [6], причем U_1 — скорость дополнительного течения, которая не оказывает влияния на граничные условия [7].



Фиг. 1



Фиг. 2

Условие Жуковского — Чаплыгина для определения постоянной ω имеет вид

$$(1.4) \quad U_A \frac{h}{2b} + \frac{i\omega}{4b} \iint_{D^*} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 (\varphi(\zeta) - \varphi(\bar{\zeta})) d\xi d\eta = 0$$

Форма зоны отрыва находится из условия, что на линии CL функция тока Ψ равна нулю:

$$(1.5) \quad \chi_{2D}(\chi_1) + \frac{1}{U_A} \frac{2b}{h} \int_0^{\chi_{2D}} \frac{\partial \Psi}{\partial \chi_2} d\chi_2 = 0$$

Решение уравнения (1.5) целесообразно проводить в безразмерных переменных. Поэтому все линейные размеры во вспомогательной плоскости χ были отнесены к длине зоны отрыва в этой плоскости, т. е. длина зоны отрыва в этой плоскости равна 1, а в уравнении (1.5) появилась постоянная $\chi_{L^0} = \chi_{1L}/b$, χ_{1L} — координата точки замыкания отрывной зоны.

Для ее определения используется условие равенства нулю скорости в точке замыкания зоны отрыва

$$(1.6) \quad u^0(\chi_{L^0}) = 0, \quad \chi_{1^0} = 1$$

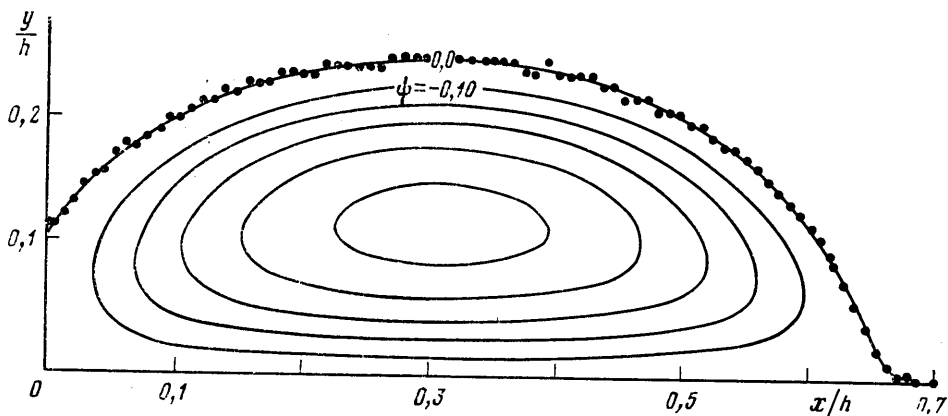
Уравнение (1.5), взятое в безразмерном виде, и (1.6) образуют систему, причем фигурирующая в них область D^* интегрирования заранее не известна.

Уравнение (1.5) решалось численно методом последовательных приближений. За нулевое приближение границы D^* была выбрана граница прямоугольной трапеции, определяемая соотношениями:

$$\begin{aligned} \chi_{1^0} &= 0, & 0 \leq \chi_{2^0} &\leq 1/4; & 0 \leq \chi_{1^0} &\leq 1 \\ \chi_{2^0} &= 1/4(1 - 1/2\chi_{1^0}); & \chi_{1^0} &= 1, & 0 \leq \chi_{2^0} &\leq 1/8 \end{aligned}$$

$$\chi_j^\circ = \frac{\chi_j}{\chi_{1L}}, \quad j = (1; 2) \quad u^\circ = \frac{u}{U_A}$$

Пробный счет показал хорошую сходимость итераций по всей длине искомой границы CL , за исключением небольшой области вблизи точки $\chi_1^\circ = 1$, при различных значениях постоянной χ_{1L}° . Вместе с тем было обнаружено, что условие (1.6) при численном решении уравнения (1.5) на сеточной области также удовлетворяется при некотором наборе значений χ_{1L}° и дополнительным условием для выбора постоянной χ_{1L}° является получение минимальных значений погрешностей, накапливаемых в итерационном процессе. Поэтому выбрано такое значение χ_{1L}° , которое обеспечивает при минимальном количестве итераций превращение начальной, произвольно



Фиг. 3

заданной конфигурации искомой области в ту, которая геометрически подобна окончатальной.

Полученная расчетом картина линий тока приведена на фиг. 3, значения функции тока Ψ на каждой из них отличаются на 0,05, $a/h = 0,1$, $\chi_{1L}^\circ = 1,4$, подсчитанные значения коэффициента сопротивления $c_D \approx 1,34$ и местного заужения потока $\epsilon \approx 0,65$ хорошо согласуются с величинами, измеренными в опытах — $c_{D0} \approx 1,38$, $\epsilon_0 \approx 0,66$ — и приведенными в [8—10]; $\epsilon = (h - 2y_m)/(h - 2a)$, y_m — максимальный поперечный размер зоны отрыва.

2. В работах [11, 12] рассмотрена в общем виде задача об отрывном обтекании с учетом сил вязкости на границе зоны отрыва. Слой смешения, находящийся на жидкой границе зоны отрыва, при больших числах Re можно моделировать вихревым слоем, расположенным вдоль этой границы [1]. С этой целью в формулу (1.2) вводится еще одно слагаемое U_2 :

$$(2.1) \quad U_2(\chi) = \frac{1}{4bi} \frac{d\chi}{dz} \int_{CL} \left(\frac{dz}{d\zeta} \Gamma(\zeta) \varphi(\zeta, \chi) d\zeta - \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \Gamma(\bar{\zeta}) \varphi(\bar{\zeta}, \chi) d\bar{\zeta} \right) = u_2 - iv_2$$

$$\Gamma = |\Gamma| e^{i \arg \bar{v}} = |\Gamma| e^{-i \arg dz}$$

Здесь dz — элемент линии CL .

Функция U_2 удовлетворяет нулевым граничным условиям и, будучи интегралом типа Коши, обеспечивает скачок скорости величиной Γ при переходе через линию CL .

Результаты расчетов, выполненных в [4], позволяют заключить, что при малой величине скачка постоянной Бернулли значение $|\Gamma|$ слабо меняется вдоль линии разрыва CL , за исключением малых областей, прилегающих к ее концам. Поэтому здесь принято $|\Gamma| \approx \text{const}$.

Как показано в [1], для того чтобы движение было стационарным, необходимо, чтобы между завихренностью ω , величиной скачка постоянной Бернулли и потерями в пограничном слое на неподвижных границах зоны отрыва установилось такое соотношение, при котором существовал бы баланс энергии, подводимой извне и теряемой.

Подробно условие баланса энергии в циклическом пограничном слое, охватывающем вихревое ядро зоны отрыва, изучено в работах [11—12].

Для определения постоянной $|\Gamma|$ использовано приближенное условие, полученное в результате рассмотрения циклического пограничного слоя:

$$(2.2) \quad \int_{CL} \frac{\rho}{2} (|V_e|^2 - |V_i|^2) |dz| + \int \tau_0 dl = 0$$

Здесь V_e , V_i — скорость жидкости при подходе к линии CL снаружи и изнутри зоны отрыва, τ_0 — касательное напряжение на неподвижных границах зоны отрыва, ρ — плотность жидкости.

Из (2.2) следует, что при $\tau=0$, что достигается при $Re=\infty$, слагаемое U_2 обращается в нуль, тангенциальный разрыв исчезает. Касательное напряжение τ_0 определяется из решения уравнений пограничного слоя на неподвижной границе, считая за начало точку замыкания зоны отрыва. Условие (1.4) для определения завихренности ω с учетом тангенциального разрыва принимает вид

$$(2.3) \quad U_A \frac{h}{2b} + \frac{i\omega}{4b} \iint_{D^*} \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|^2 (\varphi(\zeta) - \varphi(\bar{\zeta})) d\bar{\zeta} d\eta + \frac{1}{4bi} \int_{CL} \left(\frac{dz}{d\zeta} \Gamma(\zeta) \varphi(\zeta) d\zeta - \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \Gamma(\bar{\zeta}) \varphi(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \right) = 0$$

Уравнение для определения границы зоны отрыва тоже соответственно изменяется: в уравнении (1.5) подынтегральная функция состоит из двух слагаемых

$$\frac{\partial \psi}{\partial \chi_2} = -(U_{12} + U_{22}) \frac{h}{2b} F_2 + (U_{11} + U_{21}) \frac{h}{2b} F_1$$

при этом $U_j = U_{j1} + iU_{j2}$, $j=1, 2$; $F = F_1 + iF_2$.

Расчеты были проведены при $Re=10^4$. В процессе вычислений на стенке канала была обнаружена точка отрыва погранслоя, что является свидетельством наличия вторичного течения в углу зоны отрыва. Это течение здесь не рассматривается.

Результаты расчетов незначительно отличаются от случая, когда $Re=\infty$, в частности

$$\omega_{10\ 000}^\circ = 5,6, \quad \omega_\infty^\circ = -5,62, \quad |\Gamma^\circ| = 0,088, \quad \omega^\circ = \frac{\omega h}{4U_A}, \quad \Gamma^\circ = \frac{\Gamma}{U_A}$$

Форма зоны отрыва в обоих сравниваемых случаях также почти полностью совпала.

Автор благодарит Л. И. Седова и Н. А. Слезкина, а также участников руководимых ими семинаров за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. A proposal concerning laminar wakes behind bluff bodies at large Reynolds number. — J. Fluid Mech., 1956, v. 1, No. 4.
2. Гольдштик М. А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости. — Докл. АН СССР, 1962, т. 147, № 6.
3. Шабар А. Б. Об одной схеме плоского движения жидкости при наличии на дне траншеи. — ПМТФ, 1962, № 4.
4. Садовский В. С. Исследование решений уравнений Эйлера, содержащих области с постоянной завихренностью. — Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1474.
5. Кочин Н. Е. Гидродинамическая теория решеток. М.—Л.: Гостехиздат, 1949.
6. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
7. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
8. Arie M., Rouse H. Experiments on two-dimensional flow over normal wall. — J. Fluid Mech., 1956, v. 1, No. 2.
9. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1970.
10. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
11. Нейланд В. Я., Сычев В. В. К теории течений в стационарных срывных зонах. — Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
12. Колосов В. В., Шифрин Э. Г. К задаче обтекания тела с образованием развитой стационарной отрывной зоны при $Re \rightarrow \infty$. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.

Москва

Поступила в редакцию
6.XII.1979