

УДК 532.5.013.4 : 536.25

## О КОНВЕКТИВНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ В ВИБРАЦИОННОМ ПОЛЕ В НЕВЕСОМОСТИ

ГЕРШУНИ Г. З., ЖУХОВИЦКИЙ Е. М.

Задача о конвекции и конвективной неустойчивости жидкости в высокочастотном вибрационном поле в невесомости сформулирована в [1]. В данной статье обсуждаются условия равновесия и определяются границы вибрационной неустойчивости для некоторых равновесных состояний — плоского слоя жидкости с поперечным градиентом температуры и произвольным направлением вибрации, цилиндрического слоя с радиальным градиентом и продольным направлением вибрации, бесконечного кругового цилиндра с поперечными и взаимно перпендикулярными направлениями градиента температуры и оси вибрации.

1. Рассмотрим заполненную механически несжимаемой жидкостью полость, на границе которой задано некоторое распределение температуры. Будем предполагать, что статическое поле тяжести отсутствует. Полость вместе с жидкостью совершает гармонические колебания вдоль фиксированной оси, определяемой единичным вектором  $n$ , с амплитудой смещения  $b$  и круговой частотой  $\Omega$ . В системе отсчета, связанной с полостью, на жидкую частицу действует осциллирующая архимедова сила, которая приводит к осциллирующему конвективному движению. Уравнения движения жидкости получаются из обычных уравнений конвекции в приближении Буссинеска заменой статического ускорения силы тяжести  $g$  на вибрационное ускорение  $b\Omega^2 \cos \Omega t n$ .

Наибольший интерес представляют такие ситуации, когда под действием осциллирующей силы возникает осредненное (вторичное) течение. В изотермической гидродинамике начало изучению вторичных течений было положено известными работами Линя [2] и Шлихтинга [3] по осциллирующим пограничным слоям.

В случае высокочастотной вибрации, когда период колебаний много меньше характерных гидродинамических времен, для исследования вторичного движения можно воспользоваться уравнениями, которые получаются методом осреднения из полных уравнений конвекции. Частота вибрации, однако, должна быть не настолько большой, чтобы оказались существенными эффекты сжимаемости; для этого, очевидно, необходимо, чтобы характерный размер полости в направлении оси вибрации был много меньше акустической длины волны. Оценки показывают, что ограничения по частоте снизу и сверху оставляют весьма широкий интервал частот, интересных с точки зрения эксперимента.

Метод осреднения применялся в работах [4–8] для исследования влияния высокочастотных вибраций на возникновение конвекции в статическом поле тяжести. Далее будет рассматриваться случай, когда статическое поле тяжести отсутствует. Уравнения осредненного течения запишем для этого случая в безразмерной форме

$$(1.1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{P} (v \nabla) v = -\nabla p + \Delta v + R (w \nabla) (T n - w)$$

$$P \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \Delta T, \quad \Delta \mathbf{w} = -\text{rot rot}(T \mathbf{n})$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0; \quad R = \frac{\varepsilon \Theta^2 L^2}{\nu \chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $T$ ,  $p$  — осредненные скорость, температура и конвективное давление;  $\mathbf{w}$  — соленоидальная часть вектора  $T \mathbf{n}$ . В качестве единиц расстояния, времени, скорости, температуры и давления выбраны соответственно  $L$  (характерный размер полости),  $L^2/\nu$ ,  $\chi/L$ ,  $\Theta$  (характерная разность температур) и  $\rho \nu \chi / L^2$ ;  $\varepsilon = 1/2 (\beta b \Omega)^2$  — вибрационный параметр;  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $\beta$  — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения;  $R$  — вибрационный аналог числа Рейля,  $P$  — число Прандтля. На границе полости скорость  $\mathbf{v}$  и нормальная компонента  $w_n$  обращаются в нуль, а распределение температуры задано.

При определенных условиях возможно механическое равновесие жидкости (отсутствие осредненного течения); в этом случае средняя по времени массовая сила компенсируется градиентом давления. Полагая в (1.1)  $\mathbf{v} = 0$  и считая равновесные поля  $T_0$ ,  $\mathbf{w}_0$  и  $p_0$  не зависящими от времени, получим после простых преобразований условия равновесия в виде

$$(1.2) \quad \nabla(\mathbf{w}_0 \mathbf{n}) \times \nabla T_0 = 0, \quad \Delta T_0 = 0, \quad \text{div } \mathbf{w}_0 = 0, \quad \text{rot } \mathbf{w}_0 = \nabla T_0 \times \mathbf{n}$$

Состояние равновесия может реализоваться, очевидно, лишь при специальных условиях подогрева, форме полости и направлении оси вибрации. Если равновесие возможно, то возникает вопрос о его устойчивости.

Рассмотрим малые возмущения равновесного состояния  $\mathbf{v}$ ,  $T_0 + T$ ,  $\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}$ ,  $p_0 + p$ . Линеаризуя систему (1.1) по малым возмущениям и полагая эти возмущения пропорциональными  $\exp(-\lambda t)$ , получим систему амплитудных уравнений

$$(1.3) \quad -\lambda \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + R [(\mathbf{w}_0 \nabla)(T \mathbf{n} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} \nabla)(T_0 \mathbf{n} - \mathbf{w}_0)]$$

$$-\lambda P T + \mathbf{v} \nabla T_0 = \Delta T, \quad \Delta \mathbf{w} = -\text{rot rot}(T \mathbf{n})$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0$$

На границе полости  $S$  выполняются однородные условия

$$(1.4) \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = 0, \quad w_n = 0$$

Спектральная задача (1.3), (1.4) определяет характеристические декременты  $\lambda$  и соответствующие возмущения.

2. Рассмотрим прежде всего случай, когда на границе полости задано распределение температуры, обеспечивающее наличие в жидкости постоянного градиента температуры, параллельного оси вибрации ( $\nabla T_0 \parallel \mathbf{n}$ ). В этом случае  $\mathbf{w}_0 = 0$  и условия равновесия (1.2) выполняются при любой форме полости.

Из амплитудной задачи (1.3), (1.4) при  $\mathbf{w}_0 = 0$  обычным образом можно получить интегральные соотношения (звездочкой обозначены комплексносопряженные величины; интегрирование проводится по всему объему полости)

$$(2.1) \quad (\lambda + \lambda^*) \int [|\mathbf{v}|^2 + PR|\mathbf{w}|^2] dV = 2 \int [|\text{rot } \mathbf{v}|^2 + R|\text{rot } \mathbf{w}|^2] dV$$

$$(2.2) \quad (\lambda - \lambda^*) \int [|\mathbf{v}|^2 - PR|\mathbf{w}|^2] dV = 0$$

Поскольку по определению  $R > 0$  оба интеграла в (2.1) существенно положительны и потому  $\lambda + \lambda^* > 0$ , т. е. вещественная часть декремента  $\lambda_r > 0$ . Таким образом, малые нормальные возмущения всегда затухают —

имеет место устойчивость обсуждаемого равновесного состояния. Интеграл, входящий в (2.2), не является знакоопределенным, и потому нельзя сделать определенных заключений о мнимой части декремента  $\lambda_i$ ; с ростом  $R$  возможно появление в спектре затухающих колебательных возмущений.

3. Если градиент температуры в жидкости произвольно ориентирован относительно оси вибрации, то равновесие в общем случае невозможно. Соотношения (1.2) выполняются лишь при специальной геометрии. В этом пункте будет рассмотрен характерный пример такой равновесной ситуации.

Пусть бесконечный плоский слой жидкости ограничен твердыми параллельными плоскостями  $x=0$  и  $1$  (толщина слоя  $h$  принята в качестве характерной длины). Границы слоя поддерживаются при постоянных различных температурах (перепад  $\Theta$  принят в качестве характерной разности температур). Направление оси вибрации фиксировано и составляет произвольный угол  $\alpha$  с поперечной осью  $x$ . Оси координат  $y$  и  $z$  расположены в плоскости слоя так, что единичный вектор  $\mathbf{n}$  имеет проекции  $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ . Случай  $\alpha=0$  соответствует поперечной вибрации, а  $\alpha=\pi/2$  — продольной. При таких условиях возможно механическое равновесие, характеризуемое следующими распределениями:  $T_0=x$ ,  $w_{0x}=w_{0z}=0$ ,  $w_{0y}=\sin \alpha x$ .

Рассмотрим сначала плоские возмущения:  $v_z=w_z=0$  и все величины не зависят от  $z$ . Полагая неизвестные функциями пропорциональными  $\exp(iky)$ , получим из системы (1.3) амплитудные уравнения. Ограничиваясь изучением монотонных возмущений, положим на границе устойчивости  $\lambda=0$ . После исключения давления и продольных компонент  $v_x$  и  $w_x$  получим амплитудную задачу для нейтральных возмущений

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta v_x + R(k^2 \sin^2 \alpha T - ik \sin \alpha w_x' - k^2 \cos \alpha w_x) &= 0 \\ \Delta w_x + k^2 \cos \alpha T + ik \sin \alpha T' &= 0 \\ \Delta T - v_x &= 0; \quad \Delta = d^2/dx^2 - k^2; \quad R = \varepsilon \Theta^2 h^2 / \nu \chi \\ x=0, \quad x=1: \quad v_x = v_x' = 0, \quad T=0, \quad w_x &= 0 \end{aligned}$$

Здесь штрих означает производную по поперечной координате  $x$ .

Из задачи (3.1) определяется граница устойчивости равновесия — критическое число Релея; параметрами служат угол  $\alpha$  и волновое число  $k$ . Задача решалась численно методом Рунге — Кутты. При заданных  $\alpha$  и  $k$  численное интегрирование позволяет найти собственное число  $R$  и собственную функцию, дающую форму критического возмущения. Нейтральная кривая  $R(k)$  имеет минимум при некотором  $k_m$ , определяющем длину волны наиболее опасного возмущения; соответствующее значение  $R_m$  есть граница устойчивости равновесия при данном  $\alpha$ . Значения параметров  $R_m$  и  $k_m$  основного уровня неустойчивости для разных углов  $\alpha$  приведены ниже:

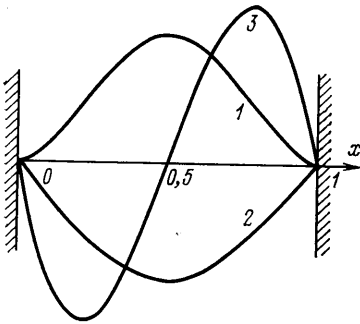
$\alpha$	0	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$R_m$	$\infty$	$5,55 \cdot 10^7$	$3,46 \cdot 10^8$	$2,13 \cdot 10^8$	$4,166 \cdot 10^8$	$1,289 \cdot 10^8$	5757	3502	2614	2237	2129
$k_m$	0	0,18	0,37	0,78	1,31	1,98	2,66	3,01	3,15	3,21	3,23

При  $\alpha=0$  (поперечная вибрация) значение  $R_m$  бесконечно велико; это согласуется с результатом предыдущего пункта, согласно которому в случае параллельности градиента температуры и оси вибрации равновесие устойчиво. По мере увеличения  $\alpha$  граница устойчивости монотонно понижается. При малых  $\alpha$  имеет место асимптотика:  $R_m = 3,46 \cdot 10^{10} \alpha^{-4}$ ;  $k_m = 0,037 \alpha$  (угол  $\alpha$  — в градусах). Устойчивость минимальна при  $\alpha = \pi/2$  (продольная вибрация). Для этого случая на фиг. 1 изображены собствен-

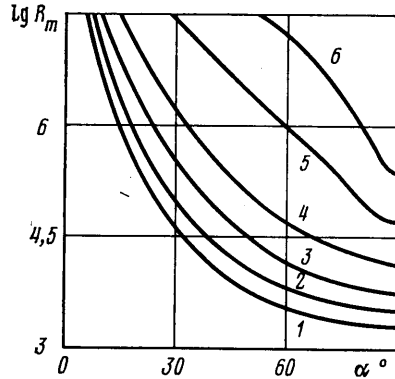
ные функции ( $R=2129$ ,  $k=3,23$ ; нормировка произвольна; кривые 1-3 соответствуют амплитудам  $v_x$ ,  $T$  и  $w_x$ ).

Таким образом, основной уровень конвективной неустойчивости связан с образованием в бесконечном слое ячейстых течений; при  $k_m=3,23$  продольный размер одной ячейки (половина длины волны) близок к толщине слоя. Второй уровень неустойчивости отвечает образованию двухъярусных ячеек; при  $\alpha=90^\circ$  граница устойчивости  $R_m=29,5 \cdot 10^3$  достигается при  $k_m=6,5$ .

Для оценки границы устойчивости выберем частоту вибрации 100 гц при амплитуде смещения 1 мм. Тогда для воды при  $\alpha=\pi/2$  и толщине



Фиг. 1



Фиг. 2

слоя 1 см получим критическую разность температур (на основном уровне неустойчивости)  $\Theta_c \approx 20$  С; для воздуха при тех же параметрах  $\Theta_c \approx 50$  С.

Рассмотрим теперь пространственные возмущения. Полагая все компоненты векторов  $v$  и  $w$  отличными от нуля и считая возмущения зависящими от координат в плоскости слоя по закону  $\exp(ik_1 y + ik_2 z)$ , получим амплитудные уравнения для пространственных возмущений. Исключая, как и в плоском случае, давление и продольные компоненты векторов  $v$  и  $w$ , придем к обобщению краевой задачи (3.1) на случай пространственных возмущений

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta v_x + R(k_1^2 \sin^2 \alpha T - ik_1 \sin \alpha w_x' - k^2 \cos \alpha w_x) &= 0 \\ \Delta w_x + k^2 \cos \alpha T - ik_1 \sin \alpha T' &= 0 \\ \Delta T - v_x &= 0; \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2; \quad \Delta = d^2/dx^2 - k^2 \\ x=0, \quad x=1: \quad v_x = v_x' &= 0, \quad T=0, \quad w_x=0 \end{aligned}$$

Частный случай плоских возмущений следует из (3.2) при  $k_2 \rightarrow 0$ ,  $k^2 \rightarrow k_1^2$ ; при этом получается задача (3.1).

Можно убедиться в том, что надлежащим преобразованием неизвестных функций и параметров задача для пространственных возмущений сводится к соответствующей плоской задаче. Далее все характеристики, относящиеся к плоской задаче (3.1), будем отмечать звездочкой. Пространственная задача переходит в плоскую при следующих преобразованиях:

$$(3.3) \quad v_x = v_{*x}, \quad T = T_*, \quad \sqrt{R} w_x = \sqrt{R_*} w_{*x}$$

$$(3.4) \quad k^2 = k_*^2; \quad \sqrt{R} \cos \alpha = \sqrt{R_*} \cos \alpha_*$$

$$R k_1^2 \sin^2 \alpha = R_* k_*^2 \sin^2 \alpha_*, \quad \sqrt{R} k_1 \sin \alpha = \sqrt{R_*} k_* \sin \alpha_*$$

Из (3.4) следуют формулы, связывающие параметры пространственных и плоских возмущений

$$(3.5) \quad k^2 = k_*^2, \quad a \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_*$$

$$R = R_* \left( \cos^2 \alpha_* + \frac{1}{a^2} \sin^2 \alpha_* \right); \quad a = \frac{k_1}{k} = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

Таким образом, критическое число Релея  $R$  пространственных возмущений с волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$  для угла  $\alpha$  может быть определено по формулам (3.5), если известно критическое число  $R_*$  плоских возмущений с волновым числом  $k_*$  для угла  $\alpha_*$ . Следовательно, граница устойчивости для пространственных возмущений находится простым пересчетом из решения плоской задачи (соответствующей, однако, другому углу  $\alpha_*$  между равновесным градиентом температуры и осью вибрации).

Результат пересчета представлен на фиг. 2, где изображена зависимость минимального критического числа Релея  $R_m$  от угла  $\alpha$  для возмущений с различными значениями параметра  $a$ . Этот параметр заключен в пределах  $0 \leq a \leq 1$ . Случай  $a=1$  ( $k_2=0$ ) отвечает плоским возмущениям типа валов, оси которых параллельны оси  $z$ , т. е. перпендикулярны плоскости, образуемой градиентом температуры и осью вибрации. Противоположный предельный случай  $a=0$  ( $k_1=0$ ) отвечает спиральным возмущениям (валы, параллельные оси  $y$ ). Кривые 1–6 на фиг. 2 соответствуют значениям  $a=1; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0,1$ . Как видно, при всех углах  $\alpha$  наиболее опасным являются плоские возмущения. Следует отметить, что в отличие от конвективной неустойчивости плоского горизонтального слоя в статическом поле тяжести в рассматриваемой задаче имеется выделенное направление вдоль слоя, определяемое осью вибрации; именно это обстоятельство и приводит к отсутствию вырождения плоских и пространственных возмущений.

4. Из соотношений (1.2) видно, что температура в состоянии равновесия должна быть гармонической функцией. Однако в отличие от случая статического поля тяжести для равновесия в высокочастотном вибрационном поле не требуется постоянства градиента температуры в жидкости: возможны состояния равновесия с неоднородным градиентом.

Рассмотрим пример такой равновесной ситуации. Пусть жидкость заполняет цилиндрический слой между двумя бесконечными коаксиальными круговыми цилиндрами радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . На поверхностях цилиндров поддерживаются постоянные разные температуры:  $T_0(R_1) = \Theta$ ;  $T_0(R_2) = 0$ . Вся система совершает высокочастотные гармонические вибрации вдоль общей оси цилиндров. При этом возможно равновесие со следующими распределениями  $T_0$  и  $w_0$  (введены цилиндрические координаты; в качестве единиц расстояния и температуры выбраны соответственно толщина зазора  $d = R_2 - R_1$  и разность температур  $\Theta$ ):

$$(4.1) \quad w_{0r} = w_{0\varphi} = 0, \quad w_{0z} = T_0 = \frac{1}{\ln \rho} \ln \frac{\rho}{(\rho-1)r}; \quad \rho = \frac{R_2}{R_1}$$

Поставим задачу для малых осесимметричных возмущений равновесия (4.1). Введем функции тока для возмущений полей  $v$  и  $w$  согласно соотношениям

$$(4.2) \quad v_\varphi = 0, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

$$w_\varphi = 0, \quad w_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial z}, \quad w_z = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}$$

После подстановки (4.2) в (1.3) и исключения давления получим (при  $\lambda=0$ ). систему уравнений нейтральных возмущений

$$(4.3) \quad \frac{1}{r} D^2 \psi + RT_0' \left( \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial z} \right) = 0$$

$$DT + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{r} T_0' \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} Df = \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad R = \frac{\epsilon \Theta^2 d^2}{\nu \chi}$$

Введем нормальные возмущения, пропорциональные  $\exp(ikz)$ . Краевая задача для амплитуд, зависящих от радиальной координаты  $r$ , имеет вид

$$(4.4) \quad D^2 \psi + ikRT_0'(rT - f) = 0$$

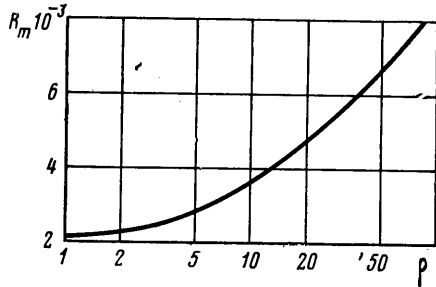
$$DT + \frac{2}{r} T' = -\frac{ikT_0'}{r} \psi, \quad Df = rT'$$

$$r = \frac{1}{\rho - 1}, \quad r = \frac{\rho}{\rho - 1}; \quad \psi = \psi' = 0, \quad T = 0, \quad f = 0$$

(в операторе Стокса  $D$  производная  $\partial^2/\partial z^2$  заменена на  $-k^2$ ).

Задача (4.4) интегрировалась методом Рунге — Кутты. Численно определялись собственные значения задачи — числа Релея  $R$ , зависящие от волнового числа  $k$  и параметра кривизны  $\rho$ . Результаты представлены на фиг. 3. Изображена зависимость минимального по  $k$  критического числа  $R_m$  основного уровня неустойчивости от  $\rho$ . При  $\rho \rightarrow 1$  (предельный случай тонкого зазора), естественно, наступает переход к задаче об устойчивости плоского

слоя с однородным поперечным градиентом температуры и продольной осью вибрации. Критическое число Релея, в согласии с предыдущим пунктом, при этом равно 2129. С увеличением отношения радиусов цилиндров  $\rho$  минимальное критическое число  $R_m$  монотонно возрастает. Критическое волновое число  $k_m$  при этом практически не меняется: при увеличении  $\rho$  от 1 до 100 оно растет в пределах от 3,23 до 3,3.



Фиг. 3

Равновесия, устойчивость которых исследована в этом и в предыдущем пунктах (случай  $\alpha = \pi/2$ ), являются частными случаями широкого класса равновесных состояний, характеризуемых двумерным полем температуры. Пусть жидкость заполняет бесконечный прямой цилиндр произвольного сечения. Образующая цилиндра параллельна оси  $z$ ; оси  $x, y$  выбраны в сечении цилиндра. Если температура на границе не зависит от  $z$  и произвольно меняется вдоль контура сечения, а ось вибрации параллельна оси  $z$ , то легко видеть, что возможно равновесие. Условия (1.2) выполняются при таких полях  $T_0$  и  $w_0$ :  $T_0 = T_0(x, y)$  (решение уравнения Лапласа с заданной температурой на границе сечения),  $w_{0x} = w_{0y} = 0$ ,  $w_{0z} = T_0$ . При некоторых специальных формах сечения и условиях подогрева равновесие возможно также в случаях, когда направление вибрации составляет произвольный угол с осью  $z$ .

5. Рассмотрим в заключение задачу об устойчивости равновесия в плоскости, размеры которой ограничены в направлениях градиента температуры и оси вибрации.

Пусть жидкость заполняет бесконечный круговой цилиндр радиуса  $a$ . Введем в сечение цилиндра декартовы координаты  $x, y$  с началом в центре сечения, а также полярные координаты  $r, \varphi$  (угол отсчитывается от оси  $x$ ). Температура на границе цилиндра меняется с углом  $\varphi$  по закону  $T_w = \Theta \cos \varphi$ . При таких условиях подогрева равновесный градиент температуры в жидкости постоянен и направлен вдоль оси  $x$ , а распределение

температуры имеет вид (единицами расстояния и температуры служат  $a$  и  $\Theta$ )

$$(5.1) \quad T_0 = x = r \cos \varphi$$

Пусть ось вибрации расположена в плоскости сечения  $x, y$ . Можно видеть из (1.2), что равновесие возможно лишь в двух случаях: когда направление вибрации параллельно либо перпендикулярно градиенту температуры. В первом случае равновесие устойчиво (см. п. 2). Во втором случае, как будет показано ниже, при достижении числом Рейля критического значения наступает неустойчивость.

Итак, пусть направление вибрации перпендикулярно градиенту температуры и совпадает с осью  $y$ . В равновесии вектор  $w_0$  имеет компоненты

$$(5.2) \quad w_{0r} = w_{0z} = 0, \quad w_{0\varphi} = r/2$$

Будем рассматривать малые плоские возмущения равновесия (5.1), (5.2). Введем векторные потенциалы полей  $v$  и  $w$ :  $v = \text{rot } \Psi$ ,  $w = \text{rot } F$ . В случае плоских возмущений отличны от нуля лишь  $z$ -компоненты  $\Psi_z \equiv \Psi$ ,  $F_z \equiv F$ . Уравнения нейтральных возмущений запишем в переменных  $\Psi, T, F$ :

$$(5.3) \quad \Delta^2 \Psi = R \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

$$\Delta T = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \Delta F = -\frac{\partial T}{\partial x}; \quad R = \frac{\varepsilon \Theta^2 a^2}{\nu \chi}$$

Здесь  $\Delta$  — плоский лапласиан. Необходимо найти конечное в круге решение, удовлетворяющее на границе условиям

$$(5.4) \quad r=1: \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \quad T=0, \quad F=0$$

Будем интересоваться основным уровнем неустойчивости, которому отвечает течение одновихревой структуры. По аналогии со случаем равновесия в круговом горизонтальном цилиндре в статическом поле тяжести [9] можно ожидать, что поскольку для одновихревого возмущения  $v_r \ll v_\varphi$ , достаточно хорошим приближением будет служить возмущение, соответствующее чисто азимутальному движению (круговые траектории). При этом функция тока  $\Psi$  зависит лишь от радиальной координаты. Положим

$$(5.5) \quad \Psi = \eta(r), \quad T = \vartheta(r) \sin \varphi, \quad F = \zeta(r) \sin 2\varphi$$

Подставляя (5.5) в систему (5.3) и сохраняя в первом из уравнений этой системы члены, зависящие только от  $r$  (отбрасываемые члены соответствуют отклонению от чисто азимутального течения, см. [9]), получим уравнения для радиальных функций

$$(5.6) \quad D_0^2 \eta = \frac{R}{2} \left[ \frac{1}{r} \left( \zeta' + \frac{2}{r} \zeta \right) + \frac{1}{4} \left( \vartheta' + \frac{3}{r} \vartheta \right) \right]$$

$$D_1 \vartheta = \eta', \quad D_2 \zeta = -\frac{1}{2} \left( \vartheta' - \frac{1}{r} \vartheta \right); \quad D_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}$$

При  $r=1$  должны выполняться условия

$$(5.7) \quad \eta = \eta' = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \zeta = 0$$

Конечное в нуле решение задачи имеет вид

$$(5.8) \quad \eta = \frac{J_0(\kappa r) - J_0(\kappa)}{J_1(\kappa)} + \frac{I_0(\kappa r) - I_0(\kappa)}{I_1(\kappa)}$$

$$\phi = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{J_1(\kappa r)}{J_1(\kappa)} + \frac{I_1(\kappa r)}{I_1(\kappa)} - 2r \right],$$

$$\xi = -\frac{1}{2\kappa^2} \left[ \frac{J_2(\kappa r)}{J_1(\kappa)} + \frac{I_2(\kappa r)}{I_1(\kappa)} - \kappa r^2 \right]$$

Здесь  $\kappa = (R/8)^{1/4}$ ;  $J_n$  и  $I_n$  — функции Бесселя вещественного и мнимого аргумента. Значение  $\kappa$  находится из характеристического соотношения

$$(5.9) \quad \frac{I_0(\kappa)}{I_1(\kappa)} - \frac{J_0(\kappa)}{J_1(\kappa)} = \kappa$$

Первый корень этого уравнения  $\kappa = 3,4335$ . Отсюда находим критическое число Рейля  $R = 1112$ , при котором равновесие теряет устойчивость относительно одновихревого возмущения.

Авторы благодарны Г. И. Петрову за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях несовместимости. — Докл. АН СССР, 1979, т. 249, № 3.
2. Lin C. C. Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow. — Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., v. 4, Brüssel, 1957.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
4. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5.
5. Зеньковская С. М. Исследование конвекции в слое жидкости при наличии вибрационных сил. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 1.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. — ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
7. Маркман Г. С., Уриццев А. Л. О влиянии высокочастотной вибрации на возникновение вторичных конвективных режимов. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 2.
8. Зеньковская С. М. О влиянии вибрации на возникновение конвекции. Ростов-на-Дону, Ростов.в/Д ун-т, 1978, Деп. ВИНТИ, № 2437—78.
9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шлиомис М. И. Об основном уровне конвективной неустойчивости равновесия жидкости в шаре и горизонтальном цилиндре («круговые» критические движения). — В кн.: Гидродинамика, вып. 2. Пермь, 1970 (Уч. зап. Пермск. ун-та, № 216).

Пермь

Поступила в редакцию  
3.III.1980