

УДК 532.546

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ САМОСОГЛАСОВАННЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА

ШВИДЛЕР М. И.

Для процессов переноса в неоднородных средах (теплопроводность, электропроводность, фильтрация жидкостей и газов и т. д.) характерна математически эквивалентная задача определения эффективной макроскопической проводимости системы на основании информации о структуре случайного поля локальной проводимости.

Несмотря на длительную историю этой задачи, простоту формулировки и огромное количество публикаций, ей посвященных (см. обзоры [1–4]), в настоящее время отсутствуют достаточно общие и в то же время конструктивные методы решения задачи. Известные приближенные решения, полученные методами теории возмущений или вириального разложения, как правило, неудовлетворительны при сильных флуктуациях поля проводимости. Следует отметить также отсутствие эффективных оценок погрешностей результатов, так же как и практически полное отсутствие точных решений указанной задачи. Исключением в данном случае является работа [5], в которой для определенных двумерных систем получено точное решение.

В последнее время для оценки точности приближенных решений используются численные решения задач переноса для неоднородных систем, осуществляемые с помощью разностных методов и ЭВМ. Как показано в [1, 2], приближенные соотношения, даваемые так называемой теорией эффективной среды, весьма удовлетворительно согласуются с результатами численных экспериментов во всей области изменения параметров, за исключением, быть может, небольшой критической зоны вблизи порога перколяции (протекания), т. е. той концентрации непроводящего компонента, вблизи которой происходит заклинивание двухкомпонентной системы проводник — изолятор. К этому следует добавить, что самосогласованные решения дают асимптотически точные результаты при больших и малых концентрациях, чего не удается достичь в рамках других приближенных методов. Указания на удовлетворительное совпадение результатов теории эффективной среды с физическим экспериментом имеются в [2, 6, 7].

Ниже рассмотрена задача вычисления методами теории эффективной среды самосогласованных фазовых проницаемостей-проводимостей в теории фильтрации жидкостей и газов. Этому предшествует изложение метода определения эффективных самосогласованных параметров ряда систем, в том числе макроанизотропных, показана связь этих решений с результатами работы [5], приводятся примеры вычисления эффективных проводимостей макроанизотропных сред.

1. Эффективная проводимость гетерогенных систем. Пусть поток \mathbf{v} и поле \mathbf{h} связаны системой соотношений

$$\mathbf{v} = \sigma \mathbf{h}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0$$

Локальная проводимость σ является случайным тензором, зависящим от координат (x_1, x_2, x_3) . Вводя в рассмотрение средние потоки и поля $\mathbf{V} = \langle \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{H} = \langle \mathbf{h} \rangle$ (угловые скобки символизируют усреднение по ансамблю, а в случае эргодичности полей — усреднение по объему), определим тензор эффективной проводимости σ^* соотношениями

$$\mathbf{V} = \sigma^* \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0$$

Рассмотрим задачу об эффективной проводимости неограниченной гетерогенной (R -компонентной) композитной системы, т. е. предположим, что пространство делится на подобласти, внутри которых $\sigma = \sigma^k = \text{const}$, $k=1, 2, \dots, R$.

Выделим одну из подобластей — элемент неоднородности — и рассмотрим поле внутри нее. Очевидно, что это поле главным образом зависит от величины σ внутри подобласти, формы ее границы, значения σ для ближайших индивидуальных подобластей, элементов, лежащих в «пограничном слое», среднего поля для всей системы, принимаемого постоянным, и эффективной проводимости всей системы σ^* . Приближение метода самосогласования заключается в пренебрежении «пограничным слоем» и рассмотрении поля в подобласти, окруженной эффективной средой, параметры которой пока не известны. Для их определения используется условие равенства среднего поля в подобласти среднему полю для всей системы, при вычислении которого выделенная подобласть заменена эллипсоидом с полуосями (a_1, a_2, a_3) , а координатные оси x_1, x_2, x_3 — главные оси тензоров σ и σ^* . Тогда поле внутри эллипсоида $\mathbf{H}^{(k)}$ постоянно и имеет вид [8]

$$\mathbf{H}^{(k)} = \xi^k \mathbf{H}$$

$$\xi_{li}^k = \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i^* - n_i(\sigma_i^* - \sigma_i^k)}, \quad \xi_{lm}^k = 0, \quad l \neq m$$

$$n_i = \frac{a_2' a_2' a_3'}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + a_1'^2) R_s}, \quad a_i' = a_i \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_i^*}}$$

$$R_s = \sqrt{(s + a_1'^2)(s + a_2'^2)(s + a_3'^2)}$$

а σ_0 — произвольный параметр, величина которого не влияет на коэффициенты n_i . Усредняя $\mathbf{H}^{(k)}$ по всем варьируемым параметрам и приравнивая результат \mathbf{H} , получаем матричное уравнение для определения σ^* :

$$(1.1) \quad \langle \xi \rangle - E = 0$$

где E — единичный тензор.

Рассмотрим двухкомпонентную систему и пусть для простоты включения однородны и изотропны, т. е. $\sigma = \sigma^k E$, а вероятность — концентрация включений первого сорта — p , соответственно второго $(1-p)$. Тогда (1.5) переходит в систему

$$(1.2) \quad p \frac{\sigma_i^* - \sigma^1}{\sigma_i^* - n_i(\sigma_i^* - \sigma^1)} + (1-p) \frac{\sigma_i^* - \sigma^2}{\sigma_i^* - n_i(\sigma_i^* - \sigma^2)} = 0, \quad i=1, 2, 3$$

в которой уравнения «завязаны» через параметры n_i , зависящие от σ_i^* .

Коэффициенты n_i могут быть выражены через эллиптические интегралы, а в том случае, если исходные включения — эллипсоиды вращения или эллиптические цилиндры, выражены через элементарные функции. Кроме того, при любых параметрах $\sum n_i = 1$. Если в преобразованной штрихованной системе координат включение — вытянутый ($a_1' = a_2' \leq a_3'$) или сплюснутый ($a_1' = a_2' \geq a_3'$) эллипсоид вращения, имеем соответственно

$$n_3 = \frac{1-e^2}{2e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right), \quad n_1 = n_2 = \frac{1}{2} (1 - n_3)$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{a_1'^2}{a_3'^2}}$$

$$n_3 = \frac{1+e^2}{e^3} (e - \operatorname{arctg} e)$$

$$n_1 = n_2 = \frac{1}{2} (1 - n_3), \quad e = \sqrt{\frac{a_1'^2}{a_3'^2} - 1}$$

Если же $a_3' = \infty$, т. е. преобразованное включение — неограниченный эллиптический цилиндр

$$(1.3) \quad n_1 = \frac{a_2'}{a_1' + a_2'}, \quad n_2 = \frac{a_1'}{a_1' + a_2'}, \quad n_3 = 0$$

Для получения зависимости $\sigma_i^*(p)$ при остальных фиксированных параметрах продифференцируем систему (1.2) по p . При этом получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрируя которую численно при начальных условиях $\sigma_i^*(1) = \sigma^1$ либо $\sigma_i^*(0) = \sigma^2$, можно построить всю кривую $\sigma_i^*(p)$. Численный метод интегрирования должен быть достаточно точным, так как при существенно различных σ^1 и σ^2 для зависимостей $\sigma_i^*(p)$ характерно существование особенности — порога протекания. Как показали расчеты, при $\sigma^1/\sigma^2 = 1-10^6$ достаточную точность обеспечивает метод Рунге — Кутты четвертого порядка.

В простейших случаях система (1.2) решается точно. Пусть, например, среда «составлена» из включений сферической формы. В этом случае среда в целом изотропна $n_1 = n_2 = n_3 = 1/3$ и эффективная проводимость имеет вид [6]

$$\sigma^*(p) = \frac{\sigma^1}{4} \left\{ (3p-1) + \nu(2-3p) + \sqrt{[(3p-1) + \nu(2-3p)]^2 + 8\nu} \right\}$$

$$\left(\nu = \frac{\sigma^2}{\sigma^1} \right)$$

Нетрудно убедиться, что при $\sigma^2 = 0$ имеем

$$\sigma^*(p) = \frac{3p-1}{2} \sigma^1 \quad \left(p \geq \frac{1}{3} \right), \quad \sigma^*(p) = 0 \quad \left(p \leq \frac{1}{3} \right)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении $p = 1/3$ — критическая концентрация или, по терминологии [3], — порог протекания — перколяции.

В случае плоской задачи (трубчатая структура, ориентированная нормально к некоторой плоскости) имеем при $n_1 = n_2 = 1/2, n_3 = 0$

$$(1.4) \quad \sigma^*(p) = \frac{\sigma^1}{2} \left[(1-2p)(\nu-1) + \sqrt{(1-2p)^2(\nu-1)^2 + 4\nu} \right]$$

Если $\nu = 0$, из (1.4) получим $\sigma^* = (2p-1)\sigma^1$ при $p \geq 1/2$ и $\sigma^* = 0$, если $p < 1/2$. Таким образом, $p = 1/2$ — критическая концентрация — порог протекания. Из (1.4) следуют точные результаты работы [5]:

$$\sigma^*(p)\sigma^*(1-p) = \sigma^1\sigma^2, \quad \sigma^*(1/2) = \sqrt{\sigma^1\sigma^2}$$

Кроме того, при $p = 1/2$ точными оказываются средние потоки и поля в фазах и средние величины диссипируемой в фазах энергии.

Рассмотрим случай, когда эллипсоиды-включения произвольно ориентированы в пространстве. Свяжем индивидуальный эллипсоид с лабораторной системой координат x_i' , положение которой относительно основной системы x_i определим тремя углами Эйлера: α, β, γ . Пусть поле на бесконечности в основной системе x_i имеет вид \mathbf{H}^e . Это же поле в лабораторной системе координат имеет вид $\mathbf{H}^e = \mathbf{A}\mathbf{H}^e$, где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ — матрица перехода от основного базиса к лабораторному.

В лабораторной системе координат поле внутри эллипсоида $\mathbf{H}'' = \xi \mathbf{A}\mathbf{H}^e$. Переходя к основному базису, получим $\mathbf{H}^i = \mathbf{A}^{-1} \xi \mathbf{A}\mathbf{H}^e$ или, усреднив это уравнение, получим матричное уравнение, обобщающее (1.1):

$$(1.5) \quad \langle \mathbf{A}^{-1} \xi \mathbf{A} \rangle - \mathbf{E} = 0$$

Если углы Эйлера распределены равномерно, эффективная среда изотропна и для определения σ^* из (1.5) имеем уравнение

$$(1.6) \quad \sum_{s=1}^3 \langle \zeta_{ss} \rangle = 3$$

Пусть система неоднородностей двухкомпонентна. Тогда (1.5) эквивалентно уравнению

$$(1.7) \quad p\Phi(\sigma^*, \sigma^1) + (1-p)\Phi(\sigma^*, \sigma^2) = 0$$

$$\Phi(\sigma^*, \sigma^j) = \sum_{i=1}^3 \frac{n_i(\sigma^j - \sigma^*)}{\sigma^* + n_i(\sigma^j - \sigma^*)}$$

Для соответствующей плоской задачи, т. е. трубчатой структуры параллельных третьей оси эллиптических цилиндров, имеем соответственно $\sigma_3^* = \langle \sigma \rangle$, $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma^*$, где σ^* — решение уравнения (1.7), в котором n_i определены соотношениями (1.3).

Для иллюстрации метода приведем результаты расчетов некоторых частных случаев. На фиг. 1 показаны зависимости компонентов тензора эффективной проводимости двухкомпонентной системы от концентрации высокопроводящей компоненты, проводимость которой принята равной единице. Проводимость низкопроводящей компоненты в этом и других рассмотренных далее случаях $\nu = 10^{-4}$. Система представлена совокупностью одинаково ориентированных бесконечных эллиптических цилиндров, отношение осей эллипсов поперечных сечений — цилиндров — $a_2/a_1 = 10^{-1}$, где a_i — длина i -той оси эллипса. Хотя $\nu \neq 0$, на фигурах достаточно четко отмечаются «пороги протекания». Так, для проводимости вдоль первой оси порог p_1 близок к 0,4, для второй оси $p_2 \approx 0,6$. На фиг. 2 аналогичные зависимости представлены для системы, включения в которой — вытянутые вдоль первой оси эллипсоиды вращения с отношением осей $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 10^{-1}$. Очевидно, такая система в плоскости (2.3) изотропна. Пороги протекания в этом случае $p_1 \approx 0,2$, $p_2 = p_3 = 0,4$. Если включения — сплюснутые вдоль первой оси эллипсоиды вращения, отношения осей $a_2/a_1 = a_3/a_1 = 10$, график зависимости компонентов тензора эффективной проводимости от p представлен на фиг. 2 пунктиром. Пороги протекания можно оценить следующим образом: $p_1 \approx 0,4$, $p_2 = p_3 = 0,2$.

Если включения — вытянутые эллипсоиды вращения — ориентированы в пространстве так, что углы Эйлера α , β , γ распределены равномерно в интервалах их возможного изменения, эффективная среда изотропна и при $a_2 = a_3$ зависимости $\sigma^*(p)$ представлены на фиг. 3. Порог протекания зависит от соотношения осей эллипсоида вращения и лежит в сравнительно узком интервале $0,33 < p < 0,45$. На фиг. 4 представлены аналогичные зависимости для равномерно ориентированных в пространстве сплюснутых эллипсоидов вращения. В этом случае порог протекания сильно зависит от сплюснутости эллипсоидов и изменяется в широком интервале $0,33 < p < 1$.

2. Многофазная фильтрация и фазовые проницаемости. Используемые для описания фильтрации нескольких жидкостей обобщения закона Дарси исходят из существования своей эффективной проводимости для каждой из жидкостей. Иногда обобщенный закон Дарси и фазовые проницаемости выписываются как результат формального осреднения элементов макроскопического течения. В этом случае принято говорить о модифицированных или псевдофазовых проницаемостях. В статье [9] такая трактовка фазовых проницаемостей принята при вычислении этих характеристик в результате усреднения уравнений Дарси и гипотез о распределении и взаимодействии жидкостей. Однако использованный в [9] метод возмущений при сильных возмущениях вряд ли удовлетворителен. Применение изложенного выше метода эффективной среды дает возможность вычислить фазовые проницаемости.

Если предположить, что жидкие фазы образуют связанные подобласти в пространстве и хотя бы некоторые масштабы этих подобластей соизмеримы с масштабами, определяющими область фильтрации в целом, или

существенно различаются между собой, трудно ожидать, что распределение фаз будет изотропным. Отсюда следует, что эффективные фазовые проницаемости таких течений должны быть тензорными функциями. Более того, если характерные масштабы фазовых подобластей достаточно велики и процесс движения нестационарен, фазовые проницаемости могут оказаться нелокальными характеристиками.

Целесообразно рассмотреть два варианта вычисления фазовых проницаемостей [9]. В первом случае, рассматривая фильтрацию жидкостей смешивающихся, но пренебрегая молекулярным перемешиванием, естественно считать, что гидродинамическое поле давления в различных фазах непрерывно. Очевидно, в этом случае относительные фазовые проницаемости зависят от отношения вязкостей жидких фаз. В случае равновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей, рассматривая фильтрацию данной фазы, естественно считать, что остальная часть пространства, занятая другими фазами, непроницаема для данной фазы. Иными словами, задача сводится к вычислению эффективной проводимости для однородной жидкости в области, определенная часть которой имеет нулевую проницаемость. В этом случае, относительные фазовые проницаемости не зависят от отношения вязкостей жидкостей.

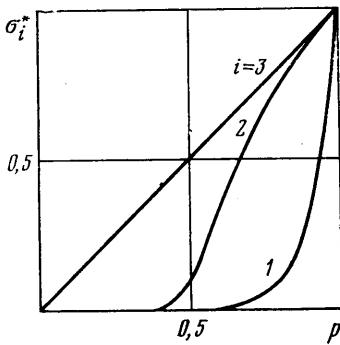
Пусть неоднородная пористая среда насыщена некоторой совокупностью жидкостей, различающихся по подвижности $\lambda = \mu^{-1}$ (μ — вязкость). Будем называть эти жидкости фазами. Пусть неоднородная пористая среда такова, что ее можно считать объединением включений различных типов, различающихся формой и значением проницаемости в них. Будем называть такую систему полиморфной и многокомпонентной. Пусть среда в целом содержит N фаз, имеет M типов включений и R компонентов. Введем в рассмотрение индикатор — функцию координат $Z_{ijk}(\mathbf{x}) = 1$, если $\mathbf{x} \in U_{ijk}$ и $Z_{ijk}(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} \in U_{ijk}^c$. Здесь множество U_{ijk} — объединение подмножеств, точки которых одновременно принадлежат i -той фазе, содержатся во включении j -того типа и проницаемости в которых σ^k . Множество U_{ijk}^c — дополнение множества U_{ijk} до всего пространства. Усреднив функцию-индикатор по ансамблю, получим P_{ijk} — матрицу третьей валентности, имеющей размерность $N \times M \times R$, компоненты которой p_{ijk} — вероятности попадания точки в множество U_{ijk} . В дальнейшем будут использоваться матрицы более низких валентностей, получающиеся из P_{ijk} суммированием ее компонент по индексам. В этом случае индекс, по которому проведено суммирование, заменяется нулем. Например,

$$P_{ij0} = \sum_k P_{ijk}, \quad P_{i00} = \sum_{j,k} P_{ijk}, \quad P_{000} = 1$$

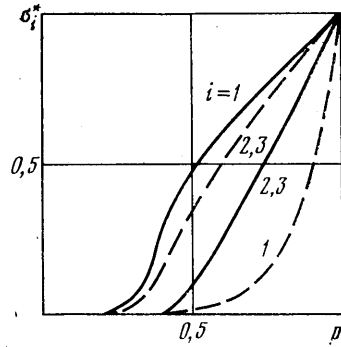
Будем считать, что жидкие фазы распределены таким образом, что индивидуальное включение (а оно, как и раньше, имитируется эллипсоидом) содержит только одну фазу. В этом случае проводимость внутри включения из U_{ijk} равна $\sigma^k \lambda_i$. Если все фазы одинаковы, т. е. фильтруется однородная жидкость, вязкость которой примем за единицу, проводимость включений равна σ^k . В этом случае тензор эффективной проводимости среды определяется системой уравнений

$$(2.1) \quad \sum_{j,k} p_{0jk} \zeta^{jk} - E = 0$$

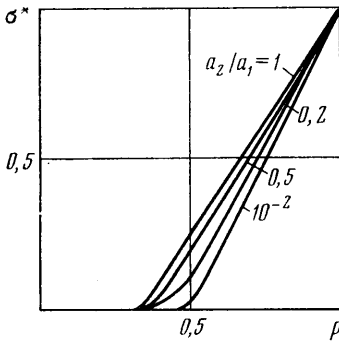
$$\zeta_{li}^{jk} = \frac{\sigma_l^*}{\sigma_l^* - n_l^j (\sigma_l^* - \sigma^k)}, \quad \zeta_{lm}^{jk} = 0, \quad l \neq m$$



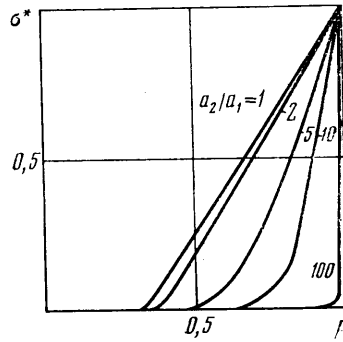
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Здесь верхний индекс j у n_i^j показывает принадлежность точки к включению типа j .

Решив систему (2.1) и вычислив тензор эффективной проницаемости для однородной жидкости σ^* , можно перейти к вычислению тензора относительной проницаемости для каждой из фаз.

Среднее значение фазовой скорости, если учесть постоянство скоростей внутри включений, будет

$$\begin{aligned} V_i &= \langle v_i \rangle = \left\langle \sum_{j,k} z_{ijk} v_{ijk} \right\rangle = \sum_{j,k} p_{ijk} v_{ijk} = \\ &= \sum_{j,k} p_{ijk} \sigma^k \lambda_i \zeta^{ijk} \mathbf{H} = \lambda_i \sigma^* f^i \mathbf{H} \end{aligned}$$

Здесь f^i — тензор относительной фазовой проницаемости

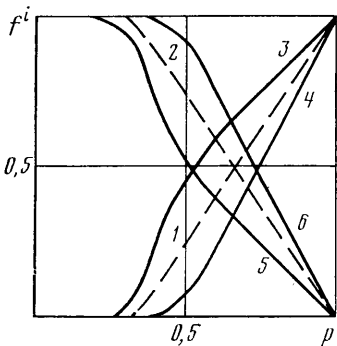
$$(2.2) \quad f^i = (\sigma^*)^{-1} \sum_{j,k} p_{ijk} \sigma^k \zeta^{ijk}$$

При вычислении тензора ζ^{ijk} следует найти эффективную проводимость системы в целом σ_0^* , решив уравнение

$$(2.3) \quad \sum_{i,j,k} p_{ijk} \zeta^{ijk} - E = 0$$

$$\zeta_{ll}^{ijk} = \frac{\sigma_{0l}^*}{\sigma_{0l}^* - n_l^j (\sigma_{0l}^* - \lambda_i \sigma^k)}, \quad \zeta_{lm}^{ijk} = 0, \quad l \neq m.$$

Для иллюстрации рассмотрим систему, для которой $N=2, M=1, R=1$. Иными словами, среда состоит из однородных и одинаковых по проницаемости включений, заполненных двумя фазами. Распределение всех параметров задается вероятностями p_{111} и p_{211} , причем $p_{111}+p_{211}=1$. Очевидно, p_{111} — это насыщенность первой фазой, обозначим ее p , а $(1-p)$ — насыщенность второй фазой. На фиг. 5 пунктирными линиями 1 и 2 представлены зависимости компонент тензоров f_{ii}^1 и f_{ii}^2 от p для $\lambda_2/\lambda_1=10^{-4}$ и включений — сфер. Сплошные линии 3 и 4 — компоненты f_{11}^1 и $f_{22}^1=f_{33}^1$, а 5 и 6 — компоненты f_{11}^2 и $f_{22}^2=f_{33}^2$ для случая, когда включения — ориентированные вдоль первой оси вытянутые эллипсоиды вращения с $a_2/a_1=a_3/a_1=10^{-1}$. Поскольку в первом варианте включения — сферы, тензоры f^i шаровые, во втором случае наблюдается заметная анизотропия. Для рассматриваемых случаев характерно соотношение



Фиг. 5

$\sum_i f^i = E$, что является следствием равенства $R=1$. В общем случае, как это видно из (2.2) и (2.3), имеет место $\sum_i f^i \neq E$. Более того, возможны случаи, когда $f_{ii}^i > 1$. Для иллюстрации этого положения рассмотрим пример $N=2, M=1, R=2$. Пусть распределение неоднородностей таково, что они образуют слоистую структуру, слои которой параллельны плоскости (1.2). Тогда $n_1^1=n_2^1=0, n_3^1=1$. Из (2.3) следует

$\zeta_{11}^{i1k} = \zeta_{22}^{i1k} = 1, \zeta_{33}^{i1k} = \sigma_{03}^*/\lambda_i \sigma^k$.

Рассмотрим простейший случай $p_{111}=p, p_{112}=0, p_{211}=0, p_{212}=1-p$, т. е. объемное содержание одноименных фаз и компонентов неоднородностей одинаково и они совмещены в пространстве. Подставив вероятности и ζ в (2.2), получим

$$f_{11}^1=f_{22}^1=p, f_{11}^2=f_{22}^2=1-p$$

$$f_{33}^1=p\lambda_2 \frac{p\sigma^2+(1-p)\sigma^1}{p\sigma^2\lambda_2+(1-p)\sigma^1\lambda_1}, f_{33}^2=(1-p)\lambda_1 \frac{p\sigma^2+(1-p)\sigma^1}{p\sigma^2\lambda_2+(1-p)\sigma^1\lambda_1}$$

Если $\sigma^1/\sigma^2=10$, для f_{33}^i получим

p	0	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	1
$\lambda_1/\lambda_2=0,1$										
f_{33}^1	0	0,48	0,91	0,64	2,19	2,75	2,59	1,71	1,38	1
f_{33}^2	1	0,90	0,81	0,63	0,50	0,28	0,11	0,02	0,01	0
$\lambda_1/\lambda_2=10$										
f_{33}^1	0	0,005	0,01	0,02	0,03	0,05	0,09	0,16	0,23	1
f_{33}^2	1	0,99	0,99	0,82	0,72	0,50	0,36	0,17	0,12	0

Легко видеть, что первый вариант соответствует случаю, когда высоковязкая фаза совмещена с высокопроницаемой компонентой среды, а менее вязкая — с низкопроницаемой. Такая комбинация «благоприятна» для высоковязкой фазы, поскольку при этом максимально увеличивается поле в этой фазе по сравнению с распределением поля при движении однородной жидкости, определяемом только соотношением проницаемостей. Этот эффект и является причиной того, что при достаточно больших p относительная фазовая проницаемость $f_{33}^1 > 1$.

Во втором варианте высоковязкая фаза совмещена с низкопроницаемой компонентой и $f_{33}^1 \leq 1$. Нетрудно видеть, что если $\lambda_1=\lambda_2$, то $f_{33}^1=p, f_{33}^2=1-p$. Если же $\sigma^1=\sigma^2$, то $f_{33}^1 < 1, f_{33}^1+f_{33}^2=1$.

Таким образом, если давление в фазах представляет собой единое поле, относительные фазовые проницаемости существенно зависят от отношения вязкостей и проницаемостей и матрицы P_{ijk} , описывающей распределение фаз по элементам неоднородности. Как показывает пример, относитель-

ные фазовые проницаемости могут изменяться в широких пределах и быть немонотонными. Возникает проблема описания подобных систем, поскольку, вообще говоря, матрица P_{ijk} входит в число искомым функций и нужны соотношения для замыкания системы, состоящей из законов сохранения фаз и обобщенных законов Дарси для каждой фазы. Обычный вариант теории равновесной фильтрации несмешивающихся жидкостей является в этом смысле предельной ситуацией, поскольку в равновесном состоянии поля фазовых давлений расщеплены, фазовые проницаемости не зависят от вязкостей жидкостей и зависят лишь от насыщенностей. Критические предельные насыщенности, а в данном случае — это пороги протекания, определяются топологией фаз.

Предельным является и вариант теории, использующий для макроописания так называемые модифицированные фазовые проницаемости, при вычислении которых распределение фаз по компонентам неоднородности задается на основании гипотез капиллярного, гравитационного или капиллярно-гравитационного равновесия, а в некоторых случаях в соответствии с их подвижностями.

Автор благодарит Р. М. Каца и А. К. Курбанова за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Elliott R. J., Krumhansl J. A., Leath P. L.* The theory and properties of randomly disordered crystals and related physical.— *Rev. Mod. Phys.*, 1974, v. 46, № 3, p. 465. (Рус. перев.: Эллиот Р., Крамхансл Дж., Лис П. Теория и свойства случайно неупорядоченных кристаллов и связанных с ними физических систем.— В кн.: Теория и свойства неупорядоченных материалов. М.: Мир, 1977, с. 11).
2. *Scott Kirkpatrick.* Percolation and conduction.— *Rev. Mod. Phys.*, 1973, v. 45, № 4, p. 574. (Рус. перев.: Перколяция и проводимость.— В кн.: Теория и свойства неупорядоченных материалов. М.: Мир, 1977, с. 249).
3. *Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.* Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979. 416 с.
4. *Беран М. Дж.* Применение статистических теорий для определения тепловых электрических и магнитных свойств неоднородных материалов.— В кн.: Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1979, с. 242.
5. *Дызне А. М.* Проводимость двумерной двухфазной системы.— *ЖЭТФ*, 1970, т. 59, № 1, с. 110.
6. *Оделевский В. И.* Расчет обобщенной проводимости гетерогенных систем. 2. Статистические смеси невытянутых частиц.— *ЖТФ*, 1959, т. 21, вып. 6, с. 678.
7. *Landauer R.* Electrical resistance of binary metallic mixtures.— *J. Appl. Phys.*, 1952, v. 23, № 7, p. 779.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957, с. 88.
9. *Швидлер М. И.* Об уравнениях двухфазной фильтрации.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1978, № 3, с. 145.

Москва

Поступила в редакцию
12.VII.1979