МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1981

УДК 532.545:519.46:541.183

О ГРУППОВЫХ СВОЙСТВАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩЕЙСЯ В ТЕОРИИ МАССООБМЕНА

БЕРМАН В. С.

В работе проведен групповой анализ системы двух нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа. Указан достаточно широкий класс нелинейных уравнений, вид нелинейности которых близок к типу, используемому при описании массообменных процессов в физико-химических системах. Получены в явном виде некоторые общие и частные решения этих уравнений.

1. Основные уравнения. Рассматривается гиперболическая система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x}=F(u,v),\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\Phi(u,v) \tag{1.1}$$

которая представляет интерес, в частности, при изучении химических реагирующих гетерогенных систем, в которых происходит движение газового или жидкого реагента и взаимодействие его с реагентом, находящемся в неподвижной фазе. При этом величины u и v имеют смысл концентраций реагентов в подвижной и неподвижной фазе, независимые переменные x и y обычно имеют смысл линейных комбинаций пространственной и временно́й переменной и являются характеристиками системы (1.1)—(1.2). Так, в случае

$$F(u,v)=\Phi(u,v)=u^n v^m,\quad n=1,\quad m=1$$
$$n=1,\quad m={}^1/_2;\quad n={}^1/_2,\quad m={}^1/_2$$

система вида (1.1) изучалась при некоторых начальных и граничных условиях в [1, 2], где найдены точные решения некоторых краевых задач.

Система уравнений (1.1) с более общими значениями n и m исследовалась аналитически и численно в [3]. Система, аналогичная (1.1), является одним из основных объектов исследования математической теории динамики сорбции и хроматографии. При этом функции $F(u,v)$ и $\Phi(u,v)$ имеют вид

$$F(u,v)=\Phi(u,v)=u+f(v)$$

где $f(v)$ — некоторая, в общем случае нелинейная функция v [4—6]. К аналогичным уравнениям сводятся также некоторые модели, описывающие динамику отложения осадков в реках.

Система (1.1) встречается также в теории химических реакторов, где под u понимается температура подвижного агента, а под v — концентрация неподвижного реагента [7].

Если

$$F=v;\quad \Phi=\Phi(u)$$

то система (1.1) сводится к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\Phi(u),\quad \Phi=v$$

— нелинейному уравнению Клейна — Гордона, играющему важную роль в дифференциальной геометрии, частным случаем которой является уравнение Лиувилля при $\Phi(u)=\exp u$ [8—10]. При $\Phi(u)=\sin u$ является широко исследуемым в теории полупроводников уравнение sin — Гордон [11, 12].

В случае линейной зависимости F и Φ от u и v задача интегрирования (1.1) при определенных начальных и граничных условиях может быть решена методом Римана [13].

Иногда удается найти точные общие решения уравнений (1.1) [3, 5, 8—10] при нелинейных зависимостях F и Φ. Однако эти случаи являются редкими исключениями. В большинстве случаев приходится применять численные методы для получения решений. Ряд аналитических результатов, полученных при решении краевых для уравнений (1.1) задач [3], показывает, что решения состоят из нескольких частей и каждая часть решения зависит от комбинации независимых переменных. Часть решения как бы «забывает» о начальных условиях и выходит на некоторое характерное решение. Обычно это решение является решением, обладающим некоторыми групповыми свойствами. Результаты работы [3] являются подтверждением мысли о важности инвариантных решений при исследовании промежуточных асимптотик [14, 15]. Инвариантные решения обычно удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, решения которых в ряде случаев могут быть получены в явном виде или проинтегрированы стандартными численными методами. Наличие этих решений дает также метод проверки и отладки численных процедур для решений полной системы (1.1) и приближенных аналитических методов.

В данной работе исследуется вопрос о наличии инвариантных решений (1.1) без дополнительных начальных и/или граничных условий в зависимости от произвольных функций $F(u, v)$ и $\Phi(u, v)$.

Рассматривается класс функций $F(u, v)$ и $\Phi(u, v)$, вид которых близок к типу, часто встречаемому в различных приложениях.

Применим методы групповой классификации [10, 16].

Рассмотрим инфинитезимальный оператор

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\tau\frac{\partial}{\partial y}+f\frac{\partial}{\partial u}+\varphi\frac{\partial}{\partial v}$$

где ξ, τ, f и φ — некоторые функции x, y, u и v. Определим эти функции ξ, τ, f, φ, при которых уравнения (1.1) инвариантны относительно действия оператора X.

Из определяющих уравнений [10, 16] следует

$$\frac{\partial f}{\partial x}+F\left(\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{d\xi}{dx}\right)=\frac{\partial F}{\partial u}f+\frac{\partial F}{\partial v}\varphi \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\Phi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{d\tau}{dy}\right)=\frac{\partial \Phi}{\partial u}f+\frac{\partial \Phi}{\partial v}\varphi \tag{1.3}$$

$$\xi=\xi(x),\quad \tau=\tau(y),\quad f=f(x,y,u),\quad \varphi=\varphi(x,y,v) \tag{1.4}$$

Исключая из рассмотрения случай $\partial F/\partial v\equiv 0$ и/или $\partial\Phi/\partial u\equiv 0$, когда задача сводится к исследованию одного обыкновенного дифференциального уравнения, изучим возможные случаи инвариантных решений.

Зная вид оператора (1.7) и интегрируя уравнения

$$\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\tau\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y,u) \tag{1.5}$$

$$\xi\frac{\partial v}{\partial x}+\tau\frac{\partial v}{\partial y}=\varphi(x,y,v) \tag{1.6}$$

получаем вид инвариантного решения системы (1.1)—(1.2).

Решение (1.5)—(1.6) можно получить методом характеристик [13] и сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\tau}=\frac{du}{f}=\frac{dv}{\varphi}$$

2. Анализ определяющих уравнений (1.2)—(1.3). Прежде чем анализировать систему определяющих уравнений, отметим, что если найдена группа преобразований для некоторого вида функций $F(u,v)$ и $\Phi(u,v)$, то аналогичную группу будет иметь система уравнений, в которой вместо функций u, v, F и Φ введены $\bar{u}=c_1u+c_2$, $\bar{v}=c_3v+\bar{c}_4$, $F(\bar{u},\bar{v})=c_5F$, $\Phi(\bar{u},\bar{v})=$ $=c_6\Phi$.

При произвольных функциях F и Φ основная группа преобразований имеет вид

$$\xi=\alpha_1,\quad \tau=\alpha_2,\quad f=\varphi=0 \tag{2.1}$$

α_i — параметры ($i=1,2,3,\ldots$).

Таким образом, инвариантное решение, соответствующее преобразованию, имеет очевидное решение типа бегущей волны

$$u(x,y)=V(z),\quad v(x,y)=V(z);\quad z=\alpha_2x-\alpha_1y+\alpha_3$$

$$\alpha_2\frac{dU}{dz}=F(U,V),\quad -\alpha_1\frac{dV}{dz}=\Phi(U,V)$$

Рассмотрим теперь случай $f\equiv0$, тогда

$$\begin{gathered}F(u,v)=A(u)K(v)\\ \Phi(u,v)=C(u)K^{\gamma}(v)\frac{dk}{dv};\quad \gamma=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}+1;\quad \alpha_1\neq0\\ \xi=\alpha_1x+\alpha_3;\quad \tau=\alpha_2y+\alpha_4\\ f\equiv0;\quad \varphi=-\alpha_1K(v)\Big/\frac{dK}{dv}\end{gathered}\tag{2.2}$$

где $A(u)$, $C(u)$ и $K(v)$ — произвольные функции. При этом (1.1) имеет решение вида

$$u=V(z);\quad K(v(x,y))=V(z)(\alpha_1x+\alpha_3)^{-1}$$

$$z=\begin{cases}\alpha_1^{-1}\ln(\alpha_1x+\alpha_3)-\alpha_2^{-1}\ln(\alpha_2y+\alpha_4); & \alpha_2\neq0\\ \alpha_1^{-1}\ln(\alpha_1x+\alpha_3)-y\alpha_4^{-1}; & \alpha_2=0\end{cases}$$

При $K(v)=v$, $A(u)=1$, $\gamma=0$ уравнения с F и Φ вида (2.2) приводится к нелинейному уравнению Клейна — Гордона и, следовательно, допускает решение, зависящее от

$$z=-\alpha_1xy+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4$$

Здесь α_i — произвольные параметры.

Таким образом, полученное решение обобщает результаты работы [12], где полагалось, что $C(u)=\sin u$.

Аналогичные результаты можно получить при $\varphi\equiv0$ и $f\neq0$.

Далее полагаем, что $f\neq0$ и $\varphi\neq0$. Можно показать, что достаточно широкий класс функций F и Φ, приводящих к расширению основной группы, имеет вид

$$\begin{gathered}F(u,v)=A(u)K(v)+B(u)\\ \Phi(u,v)=C(u)L(v)+M(v)\end{gathered}\tag{2.3}$$

где A, B, C — произвольные функции u, а K, L и M — произвольные функции v. Причем

$$dK/dv \neq 0; \quad dC/du \neq 0$$

Отсюда следует, что

$$f(x,y,u)=(\delta_1(x,y)+\delta_2(x,y)C(u))(dC/du)^{-1}$$

(2.4)

$$\varphi(x,y,v)=(\omega_1(x,y)+\omega_2(x,y)K(v))(dK/dv)^{-1}$$

$\delta_i(x,y)$ и $\omega_i(x,y)$ $(i=1,2)$ — произвольные функции.

Отметим, что при преобразовании

$$\bar{u}(x,y)=C(u(x,y)); \quad \bar{v}(x,y)=K(v,y)$$

Система уравнений (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\partial\bar{u}/\partial x=(\bar{v}A+B)(dC/du)^{-1}\\
&\partial\bar{v}/\partial y=(\bar{u}L+M)(dK/dv)^{-1}\\
&u=C^{-1}(\bar{u}); \quad v=K^{-1}(\bar{v})\\
&K(K^{-1}(v))=v; \quad C(C^{-1}(u))=u
\end{aligned} \tag{2.5}$$

аналогичный (2.3). Отсюда следует, что достаточно рассмотреть случай

$$C(u)=u; \quad K(v)=v \tag{2.6}$$

и определить $A(u)$, $B(u)$, $L(v)$ и $M(v)$, при которых (1.1) допускает инвариантные решения. Тогда при произвольных $C(u)$ и $K(v)$ и функциях

$$\begin{aligned}
&\bar{A}=A(C(u))(dC/du)^{-1}; \quad \bar{B}=B(C(u))(dC/du)^{-1}\\
&\bar{L}=L(K(v))(dK/dv)^{-1}; \quad \bar{M}=M(K(v))(dK/dv)^{-1}
\end{aligned}$$

система (1.1) обладает теми же инвариантными свойствами.

Далее полагаем, что выполнены условия (2.6), тогда

$$f(u,x,y)=\delta_2(x,y)u+\delta_1(x,y)$$

(2.7)

$$\begin{aligned}
&\varphi(v,x,y)=\omega_2(x,y)v+\omega_1(x,y)\\
&F(u,v)=vA(u)+B(u)\\
&\Phi(u,v)=uL(v)+M(v)
\end{aligned}$$

3. Классификация. Из анализа (2.7) получаем, что достаточно изучить групповые свойства системы (1.1) для различных комбинаций функций $F(u,v)$ и $\Phi(u,v)$ вида

$$F_1=uv^\lambda+B(u), \quad \Phi_1=uv^\mu+M(v)$$

(3.1)

$$\begin{aligned}
&F_2=v+B(u), \quad \Phi_2=u+M(v)\\
&F_3=v\exp(u)+B(u), \quad \Phi_3=u\exp(v)+M(v)
\end{aligned}$$

Всего возможно девять комбинаций, но в силу симметрии системы при замене $u\to v$, $x\to y$, $F\to\Phi$ достаточно рассмотреть только шесть из них: $F_1-\Phi_1$, $F_2-\Phi_2$, $F_3-\Phi_3$, $F_1-\Phi_2$, $F_1-\Phi_3$, $F_2-\Phi_3$.

При $F_1-\Phi_1$ имеем

$$\delta_1=\omega_1=0$$

(3.2)

$$\delta_2(1-\lambda)=\omega_2+d\xi/dx, \quad \omega_2(1-\mu)=\delta_2+d\tau/dy$$

Определитель D системы уравнений (3.2) относительно δ_2 и ω_2 равен

$$D=\lambda\mu-\mu-\lambda$$

При $D=0$ система разрешается относительно δ_2 и ω_2

$$(3.3)\qquad \begin{pmatrix}\delta_2\\ \omega_2\end{pmatrix}=D^{-1}\begin{pmatrix}1-\mu & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\xi/dx\\ d\tau/dy\end{pmatrix}$$

Если $D=0$, то система (3.2) вырождена, и для того чтобы она имела решение, отличное от тривиального, необходимо

$$\mu^{-1}\frac{d\tau}{dy}=\lambda^{-1}\frac{d\xi}{dx}=\mathrm{const}$$

$$\omega_2=\delta_2(1-\lambda)-d\xi/dx$$

Рассмотрим сначала случай $D\neq 0$. Из (1.2)–(1.3) после дифференцирования (1.2) по y, а (1.3) по x имеем

$$(3.4)\qquad \frac{d^2\tau}{dy^2}\left[\frac{dB}{du}u-B\right]=0,\quad \frac{d^2\xi}{dx^2}\left[v\frac{dM}{dv}-M\right]=0$$

Пусть $\lambda=\mu=1$, тогда

$$\delta_2=-d\tau/dy,\quad \omega_2=-d\xi/dx$$

Если, кроме того, $M(v)=0$ и $B(u)=0$, тогда $\xi(x)$ и $\tau(y)$ являются произвольными функциями. Если $B(u)=b_1$, $M(v)=m_1$ (b_1, m_1 — постоянные), то основная группа имеет расширение за счет оператора

$$(3.5)\qquad X=x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}+u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}$$

а при $B=b_1u^2$, $M=m_1v^2$

$$(3.6)\qquad X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-u\frac{\partial}{\partial u}-v\frac{\partial}{\partial v}$$

Удается также проанализировать и другие возможности. Результаты анализа представлены в таблице.

В частном случае $F_2-\Phi_2$ при $B=M=0$ система (1.1) вследствие линейности допускает бесконечную группу

$$\partial u/\partial x=v,\quad \partial v/\partial y=u$$

$$(3.7)\qquad \partial\delta_2/\partial x=u_2,\quad \partial\omega_2/\partial y=\delta_2;\quad \xi=\alpha_1x+\alpha_3,\quad \tau=-\alpha_1y+\alpha_2$$

$$\delta_1=\alpha_4;\quad \omega_1=\alpha_5$$

Рассмотрим случай $F_3-\Phi_3$. Тогда

$$\delta_2=\omega_2;\quad \delta_1=-d\xi/dx;\quad \omega_1=-d\tau/dy$$

и

$$B(u)=(b_2u+b_1)\exp(u)$$

$$M(v)=(b_2^{-1}v+m_1)\exp v,\quad b_2\neq 0$$

а система исходных уравнений допускает дополнительный оператор

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}-b_2\left(y\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

В частном случае $F_1-\Phi_2$ при $B=M=0$ получаем

$$\delta_2(1-\lambda)=\omega_2+d\xi/dx,\quad \partial\delta_2/\partial x=u^{\lambda-1}\omega_1$$

$$\omega_2=\delta_2+d\tau/dy,\quad \partial b_2/\partial y=\partial\omega_1/\partial y=\delta_1=0$$

$\lambda,\ \mu$	$F(u,v)$	$\Phi(u,v)$	X_i
$\lambda=1$ $\mu=1$	uv	uv	$\xi(x)\dfrac{\partial}{\partial x}+\tau(y)\dfrac{\partial}{\partial y}-u\dfrac{d\tau}{dy}\dfrac{\partial}{\partial u}-v\dfrac{d\xi}{dx}\dfrac{\partial}{\partial v}$
	$uv+b_1u^\gamma$	$uv+m_1v^\gamma$ $\gamma=0;\ 2$	$x\dfrac{\partial}{\partial x}-v\dfrac{\partial}{\partial x}+(\gamma-1)^{-1}\left[y\dfrac{\partial}{\partial y}-u\dfrac{\partial}{\partial u}\right]$
$\lambda=1$ $\mu\neq1$	$uv+b_1u$	$uv^\mu+m_1v$ $\mu\neq1$	$\dfrac{\partial}{\partial x}+u\,b_1\dfrac{\partial}{\partial x}-v\gamma\dfrac{\partial}{\partial v}$ $\gamma=-b_1(1-\mu)^{-1}$
	$uv+b_1u^\gamma$ $\gamma\neq1,\ b_1\neq0$	$uv^\mu+m_1v^\beta$ $\beta=\mu+(1-\gamma)^{-1}$	$x\dfrac{\partial}{\partial x}-(\gamma-1)^{-1}u\dfrac{\partial}{\partial u}+\varkappa y\dfrac{\partial}{\partial y}-v\dfrac{\partial}{\partial v}$ $\varkappa=\mu-1+(\gamma-1)^{-1}$
	uv	$uv^\mu+m_2v$	$x\dfrac{\partial}{\partial x}-v\dfrac{\partial}{\partial v}-(1-\mu)u\dfrac{\partial}{\partial u}$
$\lambda\neq1$ $\mu\neq1$ $D\neq0$	$u^\lambda v$	uv^μ	$x\dfrac{\partial}{\partial x}+D^{-1}\left[(1-\mu)u\dfrac{\partial}{\partial u}+v\dfrac{\partial}{\partial v}\right]$ $y\dfrac{\partial}{\partial y}+D^{-1}\left[u\dfrac{\partial}{\partial u}+(1-\lambda)v\dfrac{\partial}{\partial v}\right]$
	$u^\lambda v$	$uv^\lambda+m_1v$ $\mu=\lambda;\ m_1\neq0$	$x\dfrac{\partial}{\partial x}+D^{-1}\left[(1-\lambda)u\dfrac{\partial}{\partial u}+v\dfrac{\partial}{\partial v}\right]$ $(1-\lambda)m_1^{-1}\dfrac{\partial}{\partial y}+\left[u\dfrac{\partial}{\partial u}+(1-\lambda)v\dfrac{\partial}{\partial v}\right]$
$\lambda\neq1$ $\mu\neq1$ $D=0$	$u^\lambda v-b_1u^\varkappa$ $\varkappa\neq1,\ \varkappa\neq\lambda$	$uv^\mu+m_1v^\gamma$ $\gamma=\mu+(\varkappa-\lambda)^{-1}$	$x(1-\varkappa)\dfrac{\partial}{\partial x}+y(1-\gamma)(\varkappa-\lambda)^{-1}\dfrac{\partial}{\partial y}+$ $+u\dfrac{\partial}{\partial u}+(\varkappa-\lambda)v\dfrac{\partial}{\partial v}$

При $\lambda\neq1$ имеем

$$\omega_1=0,\quad \partial\delta_2/\partial x=0,\quad \xi=\alpha_1x+\alpha_3,\quad \tau=\alpha_2y+\alpha_4$$

$$\delta_2=-\lambda^{-1}(\alpha_1+\alpha_2),\quad \omega_2=-\lambda^{-1}[\alpha_1+\alpha_2(1-\lambda)]$$

а при $\lambda=1$

$$\delta_1=0,\quad \omega_2=-d\xi/dx$$

$$\delta_2=-(d\xi/dx+d\tau/dy),\quad \omega_1=-d^2\xi/dx^2$$

где $\tau(y)$ и $\xi(x)$ — произвольные функции.

В случае $F_4-\Phi_3$ возможны различные ситуации. Так, если $\lambda\neq1$

$$F=u^\lambda[v+(1-\gamma)^{-1}\ln u+b_1],\quad \gamma\neq1$$

$$\Phi=u\exp(v)+m_1\exp(\gamma v)$$

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+\varkappa\left[u\frac{\partial}{\partial u}+\gamma(1-\gamma)^{-1}y\frac{\partial}{\partial y}-(1-y)^{-1}\frac{\partial}{\partial v}\right]$$

где b_1, m_1, γ и $\varkappa$ — произвольные постоянные.

Если же $\lambda=1$, то тогда или

$$F=u(v+b_1),\quad \Phi=u\exp(v)$$

$$X_1=\tau(y)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{d\tau}{dy}u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=u\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}$$

или же

$$F=u[v+b_1(v+1)],\ \Phi=u\exp(v)+m_1$$

$$X=u\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}$$

и

$$F=u(v+b_2\ln v+b_1),\quad \Phi=u\exp v+m_1\exp(\gamma v)$$

$$b_2=(1-\gamma)^{-1},\quad \gamma\neq 1,\quad \gamma=0$$

$$X=y\frac{\partial}{\partial y}-\gamma^{-1}\left[(\gamma-1)u\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right]$$

Наконец, в случае $F_2-\Phi_3$ возможны две ситуации

$$F=v+b_2u+b_1,\quad \Phi=\exp v(u+b_2^{-1}v+m_1),\quad b_2\neq 0$$

$$X=\frac{\partial}{\partial y}+b_2^{-1}\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}$$

и

$$F=v+b_2\ln(u+m_1)+b_1,\quad \Phi=\exp(v)(m_1+u)$$

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+(b_r-1)y\frac{\partial}{\partial y}+(m_1+u)\frac{\partial}{\partial y}-b_1\frac{\partial}{\partial v}$$

4. Частные случаи. Рассмотрим некоторые приложения результатов групповой классификации.

Пусть

$$F=v,\quad A=1,\quad K=v,\quad B=0$$

$$\Phi=\exp u,\quad C=\exp u,\quad L=1,\quad M=0$$

Тогда (1.1) сводится к уравнению Лиувилля. Из групповой классификации имеем

$$\delta_1=0,\quad \delta_2=-(d\xi/dx+d\tau/dy),\quad \omega_1=-d^2\xi/dx^2$$

$$\omega_2=-d\xi/dx$$

где $\xi(x)$ и $\tau(y)$ — произвольные функции.

Отсюда следует, что решение уравнений (1.1) имеет вид

$$z=\int^x\xi^{-1}dx'-\int^y\tau^{-1}dy'$$

$$u=V(z)-\ln(\tau(y)\xi(x)),\quad v=(V(z)-d\xi/dx)\xi^{-1}(x)$$

$$\frac{dU}{dz}=V,\quad \frac{dV}{dz}=-\exp(U)$$

или

$$\frac{d^2U}{dz^2}=-\exp U,\quad V(z)=\ln 2+2\ln C_1-2\ln\mathrm{ch}(zC_1+C_2)$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Это общее решение уравнения.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\frac{\partial a}{\partial x'}=a^nb^m,\quad m>0,\quad n>0$$

$$\partial b/\partial y'=a^nb^m$$

при помощи замены

$$a=u^{1/n},\quad b=v^{1/m}$$
$$x'=x/n,\quad y'=y/m$$

Эта система сводится к стандартному виду

$$\partial u/\partial x=u^{(2n-1)/n}v,\quad \partial v/\partial y=uv^{(2m-1)/m}$$

т. е. к случаю $F_1-\Phi_1$ при $(2n-1)/n\neq 0$ и/или $(2m-1)/m\neq 0$. При $n=m=1$ уравнение допускает бесконечную группу и, следовательно, решение имеет вид

$$u=\tau^{-1}(y)V(z),\quad v=\xi^{-1}(x)V(z)$$
$$z=\int\limits^{x}\xi^{-1}dx'-\int\limits^{y}\tau^{-1}dy'$$
$$\frac{dU}{dz}=UV,\quad \frac{dV}{dz}=-UV$$

Эти уравнения легко интегрируются.

Отметим, что для этой системы уравнений было найдено общее решение в [5] при помощи эвристического приема — подстановки

$$u=-\frac{\partial}{\partial x}\ln\psi,\quad v=-\frac{\partial}{\partial y}\ln\psi$$
$$\partial^2\psi/\partial x\,\partial y=0$$

При $n=m={}^1/_2$ система сводится к линейной. Это впервые было найдено в [3].

При $n={}^1/_2$ и $m=1$ и при $n=1$ и $m={}^1/_2$ задача сводится к исследованию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=vu;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=u\quad \left(m=\frac{1}{2};\quad n=1\right)$$

— это случай $F_1-\Phi_2$ при $\lambda=1$. Из общего решения этого уравнения получаем

$$u=(\xi(x)\tau(y))^{-1}V(z)$$
$$v=\xi(x)^{-1}[V(z)-d\xi/dx]$$
$$\frac{dU}{dz}=UV,\quad \frac{dV}{dz}=-U$$

где $\xi(x)$ и $\tau(y)$ — произвольные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.
2. *Пеньковский В. И.* Одномерная задача растворения и вымыва солей при фильтрации с большими значениями критерия Пекле.— ПМТФ, 1969, № 2.
3. *Берман В. С., Галин Л. А., Чурмаев О. М.* К анализу простой модели барботажного реактора.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5.
4. *Рачинский В. В.* Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964.
5. *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
6. *Цабек Л. К.* Инвариантные решения уравнений равновесной динамики сорбции и равновесной кинетики сорбции.— Инж.-физ. ж., 1972, № 2, т. 22.
7. *Арис Р.* Анализ процессов в химических реакторах. Л.: Химия, 1967.
8. *Liouville J.* Sur l'équation aux différences particles.— J. Math., 1853, v. 18(i), p. 71–77.

9. *Bateman H.* Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge: Univ. Press, 1959, p. 166–169.
10. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, с. 123.
11. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Сов. радио, 1977.
12. *Leroy B.* On the group of invariance of the (one-dimensional) Sine-Gordon equation.— Lettere al Nuovo Cimento, 1978, v. 22, № 1.
13. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
14. *Barenblatt G. I., Zel'dovich Ya. B.* Self-semilar solutions as intermediate asymptotics. Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 4, Talo Alto, Calif., 1972.
15. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978.
16. *Bluman G. W., Cole J. D.* Similarity methods for differential equations. N. Y.: Springer, 1974.

Москва

Поступила в редакцию
12.VII.1979