

УДК 532.529

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ВЯЗКОЙ НЕСУЩЕЙ ФАЗОЙ

ДОРФМАН А. Л.

Теоретически исследуется в двухскоростном приближении изотермическое движение разреженной смеси двух несжимаемых фаз с вязкой несущей фазой. На основе численного решения уравнений сохранения массы и импульса проанализировано влияние параметров фаз на характеристики их совместного движения для двух конкретных задач.

1. К настоящему времени получены уравнения движения гетерогенных смесей в рамках представления их с помощью совокупности взаимопроницающих и взаимодействующих сплошных сред (фаз), заполняющих один и тот же объем. При этом в каждой фазе определяются свои макроскопические параметры — скорость, плотность, температура и т. д. Рассмотрим изотермическое движение моодисперсной разреженной смеси двух несжимаемых фаз с вязкой несущей фазой при отсутствии непосредственного взаимодействия частиц дисперсной фазы и с учетом сил гравитации. Уравнения сохранения массы и импульса фаз в двухскоростном приближении можно представить в виде [1]

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 v_1^i + \frac{\partial}{\partial x^j} \rho_1 v_1^i v_1^j = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} - F^i \quad (i, j=1; 2)$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_2 v_2^i + \frac{\partial}{\partial x^j} \rho_2 v_2^i v_2^j = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x^i} + F^i - \rho_2 \left(1 - \frac{\rho_1^\circ}{\rho_2^\circ} \right) g \delta^{ij}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho_k + \frac{\partial}{\partial x^j} \rho_k v_k^j = 0$$

$$(1.4) \quad \rho_k = \rho_k^\circ \alpha_k, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho_k^\circ = \text{const} \quad (k=1; 2)$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения: ρ_k° — истинная плотность k -й фазы ($k=1$ соответствует несущей непрерывной фазе, $k=2$ соответствует дисперсной фазе); ρ_k — приведенная плотность (масса k -й фазы в единице объема смеси); α_k — объемная концентрация k -й фазы; v_k^i — компонента скорости k -й фазы в направлении x^i ; p — возмущение давления относительно давления в неподвижной несущей фазе p_0 , определяемого из условия вертикального гидростатического равновесия $\partial p_0 / \partial x^2 + \rho_1^\circ g = 0$; τ^{ij} — компонента тензора вязких напряжений в несущей фазе; g — величина вектора ускорения силы тяжести (вектор силы тяжести направлен противоположно координате x^2); δ^{ij} — символ Кронекера; t — время; μ — вязкость несущей фазы; a — радиус частиц дисперсной фазы.

Для компонент тензора вязких напряжений в несущей фазе используется закон Навье — Стокса. Силу взаимодействия фаз F^i представим в виде, учитывающем лишь стоксовское взаимодействие [1]

$$(1.5) \quad F^i = \alpha_1 \alpha_2 \frac{4,5}{a^2} \mu (v_1^i - v_2^i) \equiv \frac{4,5}{a^2 \rho_1^\circ \rho_2^\circ} \mu \{ (\rho_1 v_1^i) \rho_2 - (\rho_2 v_2^i) \rho_1 \}$$

Используя (1.3)–(1.4), получим уравнение неразрывности для смеси в целом

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\rho_1 v_1^j}{\rho_1^0} + \frac{\rho_2 v_2^j}{\rho_2^0} \right) = 0$$

и в дальнейшем первое уравнение (1.3) исключается из рассмотрения.

Система уравнений (1.1)–(1.6) дополняется граничными условиями: на твердой поверхности задаются условия прилипания и непротекания для несущей фазы и условия непротекания для дисперсной фазы; на осях симметрии – обычные условия симметрии и непротекания.

2. Кратко остановимся на некоторых особенностях численной конечно-разностной процедуры решения системы (1.1) – (1.6).

Исследуемая область разбивается на систему элементарных ячеек в форме прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат. Давление p , плотности ρ_k и объемные концентрации α_k относятся к центру ячеек, а величины v_k^j и $\rho_k v_k^j$ определяются в центрах соответствующих сторон ячеек, нормальных к x^j .

Каждый цикл конечно-разностного алгоритма, т. е. переход от известных значений искомых функций на n -м временном слое к значениям на $(n+1)$ -м временном слое, состоит из трех этапов. На первом этапе определяется величина плотности ρ_2 на $(n+1)$ -м временном слое, при этом уравнение (1.3) при $k=2$, учитывая неотрицательность ρ_2 , приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^j \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{\rho_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \sqrt{\rho_2 v_2^j} = 0$$

позволяющему использовать консервативную неявную конечно-разностную аппроксимацию, учитывающую особенности расположения ρ_2 и v_2^j относительно расчетной ячейки. С другой стороны, подобный подход обеспечивает неотрицательность ρ_2 для любого момента времени в конечно-разностной формулировке задачи. Далее определяются ρ_1 и α_k на $(n+1)$ -м временном слое с помощью (1.5). Для решения системы неявных разностных уравнений на первом этапе применяется метод предиктор-корректор, основанный на геометрическом расщеплении [2].

Второй и третий этапы представляют собой вариант метода физического расщепления [3–6]. На втором этапе рассчитываются предварительные значения массовых скоростей $\rho_k v_k^j$ с учетом конвективных ускорений, действия сил вязкости и гравитации и без учета уравнения неразрывности (1.6). При этом второй этап разбивается на три последовательных шага. На первых двух шагах учитываются конвективные члены уравнений (1.1), (1.2) с помощью явной схемы предиктор-корректор [5–6], являющейся модификацией схемы Мак-Кормака [7]. Модификация заключается в учете локальной ориентации потока при записи конечно-разностных уравнений. Члены, учитывающие силы вязкого трения и гравитации, включаются в схему на третьем шаге с помощью аппроксимации первого порядка по времени.

Окончательные значения массовых скоростей получаются на третьем этапе в результате комбинации полученных на втором этапе предварительных значений и членов, учитывающих градиент сил давления и силы межфазного взаимодействия и относящихся к $(n+1)$ -му временному слою. При этом значения давления должны обеспечить удовлетворение уравнения неразрывности (1.6), что приводит к необходимости решения разностного уравнения Пуассона относительно давления с однородными граничными условиями Неймана, полученными из совместного рассмотрения уравнения неразрывности и граничных условий задачи [6]. Следует отметить, что использование неявной аппроксимации для градиентов давления и сил межфазного взаимодействия, а также учет локальной ориентации потока на втором этапе обеспечивают устойчивость конечно-разностного алгоритма, при этом спектральный анализ в линейном приближении дает локальный критерий устойчивости

$$\Delta t \leq 1/\max \left\{ \sum_{j=1}^2 \frac{|v_k^j|}{\Delta x^j}; \frac{\mu}{\rho_1^0} \sum_{j=1}^2 \frac{1}{(\Delta x^j)^2} \right\}$$

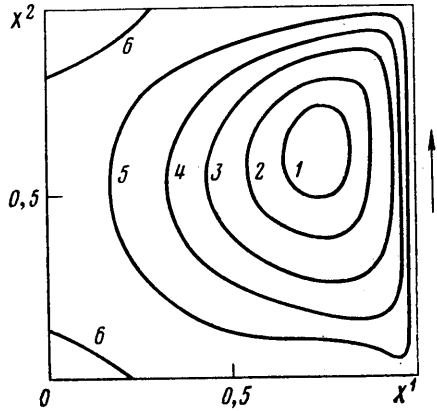
где Δt – величина шага по времени. Конечно-разностный алгоритм имеет второй порядок точности по пространственным переменным и первый – по времени.

3. Чтобы продемонстрировать возможность моделирования двухфазных течений на основе использования системы уравнений (1.1)–(1.6) и опи-

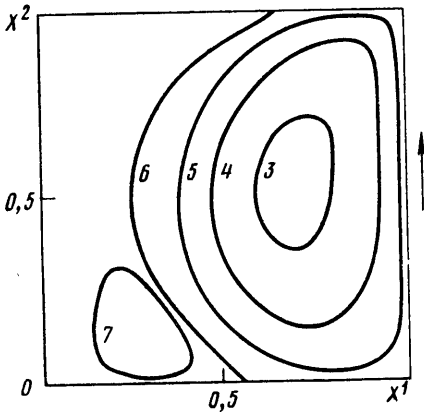
санного конечно-разностного алгоритма, приведем результаты решения двух задач.

Первая задача связана с течением двухфазной среды в замкнутой квадратной полости размером L_0 с вертикальной стенкой, движущейся со скоростью V_0 . В случае однофазного течения несжимаемой жидкости эта задача широко исследована, поэтому представляется возможным оценить степень влияния параметров несущей и дисперсной фаз на течение смеси.

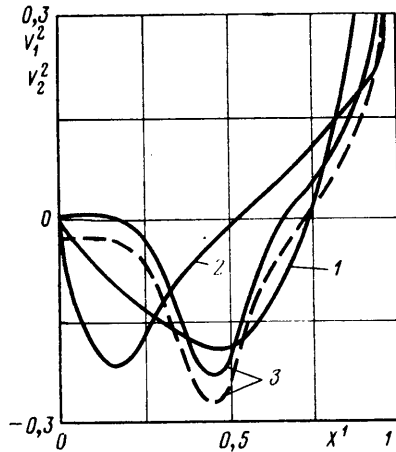
Представленные на фиг. 1, 2 стационарные распределения функции тока Ψ , построенной по среднеобъемной скорости смеси $\bar{U}^i = \alpha_1 v_1^i + \alpha_2 v_2^i$, $U^1 = \partial\Psi/\partial x^2$; $U^2 = -\partial\Psi/\partial x^1$, иллюстрируют влияние относительной плотности $\rho_*^\circ = \rho_2^\circ/\rho_1^\circ$ и относительного размера частиц дисперсной фазы $a_* = a/L_0$ на структуру течения смеси. Цифрам 1-7 на фиг. 1, 2 соответствуют следующие значения



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

$\Psi/V_0 L_0$: 0,09; 0,07; 0,05; 0,03; 0,01; 0,0; $-0,002$. Обозначено $X^k = x^k/L_0$, $k=1; 2$. В дополнение к этому на фиг. 3 построены распределения безразмерных вертикальных скоростей $V_1^2 = v_1^2/V_0$ (сплошные линии) и $V_2^2 = v_2^2/V_0$ (штриховые линии) в горизонтальном сечении $X^2=0,5$. Результаты, приведенные на фиг. 1 и кривой 1 фиг. 3, соответствуют $\rho_*^\circ=2$, $a_* = 0,3 \cdot 10^{-3}$, на кривой 2 фиг. 3 — $\rho_*^\circ=1600$, $a_* = 0,3 \cdot 10^{-3}$, на фиг. 2 и кривой 3 фиг. 3 — $\rho_*^\circ=1600$, $a_* = 1 \cdot 10^{-3}$. При этом $Re = \rho_1^\circ V_0 L_0 / \mu = 100$, $Fr = V_0^2 / g L_0 = 1$. В момент времени $t=0$ дисперсная фаза распределена равномерно с $\alpha_2 = 0,01$.

При малых значениях ρ_*° (см. фиг. 1 и кривую 1 фиг. 3) структура течения смеси практически не зависит от присутствия дисперсной фазы и полученные результаты совпадают с результатами для однородной несжимаемой жидкости [8]. Увеличение ρ_*° вызывает заметную деформацию поля скорости (см. кривую 2 фиг. 3). В обоих случаях дисперсная

фаза остается связанной с несущей фазой. Увеличение a_* (см. фиг. 2 и кривые 3 фиг. 3) вызывает существенную перестройку структуры течения и скоростную неравновесность фаз. Наблюдается качественное отличие в характере движения фаз: несущая фаза в отличие от дисперсной фазы образует зону вторичной циркуляции у левой стенки полости, где компоненты гетерогенной смеси движутся навстречу друг другу.

Распределение α_2 в полости для двух первых рассматриваемых случаев близко к равномерному. Однако в последнем случае наблюдается увеличение концентрации дисперсной фазы в правой половине полости с уменьшением концентрации в ее левой половине. Дальнейшее увеличение a_* приводит к осаждению дисперсной среды на дно полости.

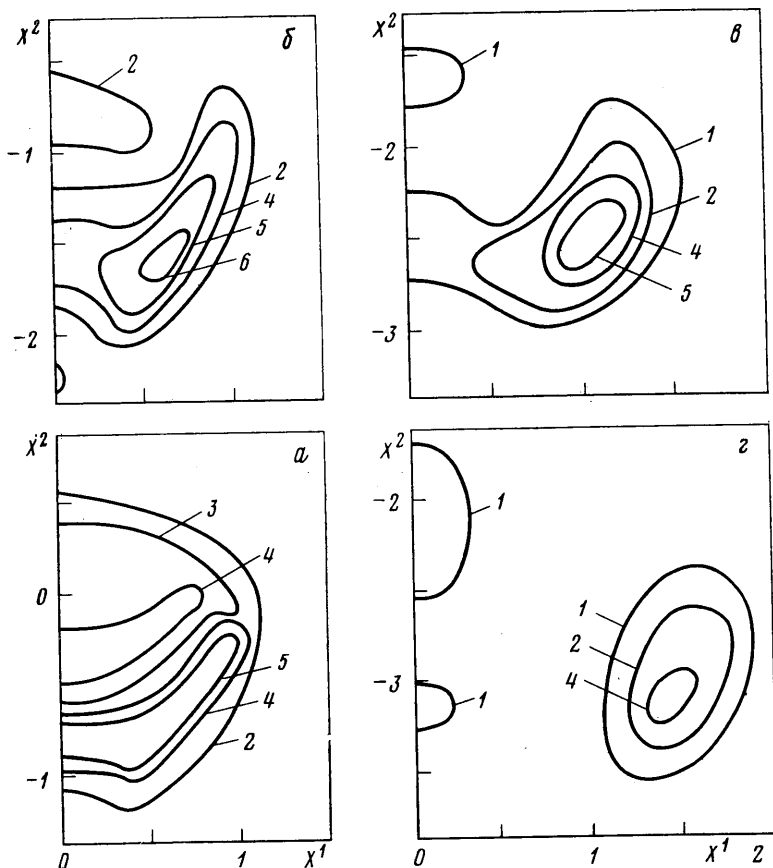
Анализ результатов показал, что влияние дисперсной фазы на структуру течения смеси тем выше, чем больше отношение числа Стокса $St = \text{Re } a_*^2 \rho_*^\circ$ к числу Фруда Fr и чем больше среднее значение α_2 .

Во второй задаче рассматривается развитие формы и характеристики движения первоначально сферического облака диаметром $2R = 5 \cdot 10^{-3}$ м из дисперсных частиц диаметром $a = 25 \cdot 10^{-8}$ м и плотностью $\rho_2^\circ = 2 \cdot 10^3$ кг/м³, начинающего падение из состояния покоя под действием силы тяжести в жидкости ($\rho_1^\circ = 10^3$ кг/м³, $\mu = 0,118 \cdot 10^{-4}$ па·с). Начальная объемная концентрация дисперсной фазы в облаке $\alpha_2 = 0,01$. Эта задача экспериментально исследовалась в [9] (см. также [10]).

Уравнения (1.1)–(1.6) записываются в цилиндрической системе координат. Левая граница области интегрирования представляет собой ось симметрии, а три другие границы являются непроницаемыми. Размеры области интегрирования выбирались таким образом, чтобы свести к минимуму влияние непроницаемых стенок на поведение облака частиц. Результаты были получены при использовании сетки, состоящей из 50 и 120 узлов в направлениях x^1 и x^2 соответственно.

Результаты расчета демонстрируют четыре стадии развития формы облака от первоначальной сферы до вихревого кольца, что находится в качественном соответствии с экспериментальными наблюдениями. На фиг. 4 изображены последовательные картины распределения α_2 , соответствующие этим четырем стадиям, по которым можно судить о форме облака. Цифрам 1–6 на фиг. 4, a – z соответствуют следующие значения α_2 : 0,001; 0,005; 0,0075; 0,01; 0,015; 0,02. Фигуры 4, a – z соответствуют моментам времени 0,224; 0,386; 0,576; 0,752 с с начала движения облака. Центр облака в момент времени $t=0$ находился в точке (0, 0). На фигурах изображается часть области интегрирования, непосредственно прилегающая к облаку. Обозначено $X^1 = x^1/R$ и $X^2 = x^2/R$.

На первой стадии (фиг. 4, a) облако несколько деформируется. При этом образуются две зоны максимума объемной концентрации дисперсной фазы, находящиеся одна под другой вблизи оси симметрии. На второй стадии (фиг. 4, b) одна из зон (нижняя) начинает смещаться от оси симметрии, а вторая зона, имеющая меньшую, чем первая, скорость падения, отстает от облака и образует «хвост» вдоль оси симметрии (см. фото 7.2.3. в [10]). На третьей стадии (фиг. 4, $в$) происходит интенсивное отделение от облака дисперсных частиц в «хвост». Благодаря дальнейшему движению максимума объемной концентрации от оси симметрии в центре облака образуются провалы. Четвертая стадия (фиг. 4, $г$) характеризуется образованием тороидального вихревого кольца, радиус которого непрерывно увеличивается по мере падения, при этом абсолютная величина максимума концентрации уменьшается. С увеличением радиуса кольца скорость его падения уменьшается. Если рассмотреть движение дисперсной фазы относительно точки максимума концентрации, то выявляется циркуляционное движение в поперечном сечении тороидального кольца.



Фиг. 4

Падение облака частиц возбуждает движение несущей фазы. В объеме облака несущая фаза благодаря силе межфазного взаимодействия движется вместе с облаком, хотя и с несколько меньшей по абсолютной величине вертикальной скоростью. С другой стороны, на периферии наблюдается восходящее движение несущей фазы.

Интерес представляет зависимость вертикальной скорости падения облака от $\rho_2^\circ/\rho_1^\circ$, μ и a . Установлено, что с увеличением $\rho_2^\circ/\rho_1^\circ$ скорость падения облака увеличивается и в то же время затягивается процесс перестройки структуры облака. Например, при $\rho_2^\circ/\rho_1^\circ=10^2$ на всем исследуемом участке падения облако не трансформируется в вихревой тор. Скорость падения облака уменьшается с увеличением вязкости несущей фазы и уменьшением размера частиц дисперсной фазы.

Представленные результаты, их качественное совпадение с экспериментальными наблюдениями свидетельствуют о возможности использования системы уравнений (1.1)–(1.6) и описанного конечно-разностного алгоритма их решения для моделирования течений гетерогенных смесей двух несжимаемых фаз с вязкой несущей фазой.

Автор выражает благодарность Л. Г. Лойцянскому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
3. Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в при-

- менении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости.— *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*, 1975, т. 15, № 1.
4. Harlow F. H., Hirt C. W. Recent Extensions to Eulerian Methods for numerical fluid dynamics.— *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*, 1972, т. 12, № 3.
 5. Дорфман А. Л. Численное решение пространственной задачи взаимодействия системы струй в сносящем потоке вязкой несжимаемой жидкости.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1978, № 2.
 6. Дорфман А. Л. Явная схема расщепления с приложением к задаче о пространственном взаимодействии струй вязкой несжимаемой жидкости в канале.— В кн.: *Численные методы механики сплошной среды*, т. 9, № 4. Новосибирск, 1978.
 7. MacCormac R. W. Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer.— *Lect. Notes Phys.*, 1971, v. 8, p. 151–163.
 8. Burggraf O. R. Analytical and numerical studies of structure of steady separated flows.— *J. Fluid Mech.*, 1966, v. 23, pt 2.
 9. Adachi K., Kiriya S., Yoshioka N. The behaviour of swarm of particles moving in a viscous fluid.— *Chem. Eng. Sci.*, 1978, v. 33, № 1.
 10. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.

Ленинград

Поступила в редакцию
23.X.1979