

УДК 532.135;532.526

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ В РАСТВОРЕ ПОЛИМЕРА, УМЕНЬШАЮЩЕГО СОПРОТИВЛЕНИЕ

**АМФИЛОХИЕВ В. Б., ДРОБЛЕНКОВ В. В., КАНЕВСКИЙ Г. И.,
МАЗАЕВА Н. П.**

Снижение вязкостного сопротивления тел, движущихся в капельной жидкости, путем растворения в ней некоторых длинномолекулярных полимеров в настоящее время следует признать одним из самых перспективных способов уменьшения сопротивления [1]. Поскольку главный эффект от введения полимеров заключается в резком снижении турбулентного трения, естественно использовать для расчета течений слабых полимерных растворов полуэмпирическую теорию турбулентности. Одна из таких теорий [2] была успешно применена для расчета пограничного слоя на плоской пластине [3] и течения с градиентом давления около плоского контура [4].

В статье излагается возможный метод расчета осесимметричного пограничного слоя для случая движения тела в слабых полимерных растворах с постоянной концентрацией. Метод основан на использовании профиля скорости и системы интегральных соотношений, наиболее полно учитывающих эффекты поперечной кривизны обтекаемой поверхности. Расчетная схема позволяет учесть изменение режимов течения в пограничном слое.

1. Одной из основных особенностей расчета осесимметричного пограничного слоя является необходимость учета поперечной кривизны обтекаемой поверхности и связанной с ней конечности толщины слоя по сравнению с местным радиусом поперечного сечения тела вращения. Рассчитывать осесимметричный пограничный слой как тонкий, т. е. в предположении о том, что $\delta \ll R_w$, где δ — толщина пограничного слоя, а R_w — радиус поперечного сечения тела, представляется недостаточным, особенно в случае обтекания тела полимерным раствором, когда погрешности расчета, вытекающие из предположения, что $\delta \ll R_w$, могут существенно исказить предсказываемый выигрыш от применения полимеров. Поэтому целесообразно вести расчет пограничного слоя тела вращения как «толстого», для чего можно использовать либо дифференциальные уравнения пограничного слоя в частных производных, либо интегральные соотношения. С практической точки зрения, интегральные соотношения более привлекательны, во-первых, своей экономичностью, а во-вторых, тем, что при их использовании не требуется сведений о тонких турбулентных механизмах, а необходима лишь удачная аппроксимация профилей продольной составляющей осредненной скорости. В то же время для плоского пограничного слоя было показано [5, 6], что если задать семейство этих профилей как многопараметрическое, то результаты по точности не уступают получаемым с помощью дифференциальных методов, а учет введения в поток полимерных добавок не вызывает принципиальных затруднений [3, 4].

Далее для расчета пограничного слоя на теле вращения, обтекаемом раствором полимера, принимается интегральный метод [7], основанный на трехпараметрическом семействе профилей продольной составляющей осредненной скорости, которое имеет вид

$$(1.1) \quad U/v^* = \kappa^{-1} \ln(v^* Y/v) + B + \kappa^{-1} \Pi(X) W(Y/\delta) + f(Y/R_w)$$

Здесь U — продольная осредненная скорость, $v^* = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — динамическая скорость, $\tau_w = \tau_w(X)$ — касательное напряжение на обтекаемой поверхности, X — продольная координата, совпадающая с меридиональным обводом тела, ρ — плотность жидкости, $\kappa = 0,4$ — первая константа турбулентности, Y — поперечная координата, нормальная к меридиональному обводу тела, B — вторая константа турбулентности или параметр, учитывающий влияние полимеров, W — функция Коулса, f — функция, учитывающая влияние поперечной кривизны обтекаемой поверхности, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Из формулы (1.1) видно, что первые два слагаемых представляют собой обычный логарифмический закон, справедливый в пристенной зоне практически любого турбулентного пограничного слоя, а третье слагаемое отражает особенности турбулентного перемешивания во внешней зоне, причем параметр Коулса $\Pi(X)$ позволяет учесть влияние продольной кривизны тела и градиента внешнего давления. Для облегчения вычислений вид функции $W(Y/\delta)$ был упрощен по сравнению с обычно используемой косинусоидой [8]

$$(1.2) \quad W(Y/\delta) = 6(Y/\delta)^2 - 4(Y/\delta)^3$$

Используемая аппроксимация (1.2) удовлетворяет граничным условиям $W(0) = W'(0) = W'(1) = 0$, $W(1) = 2$ и достаточно хорошо согласуется с опытными данными. Форма четвертого слагаемого правой части (1.1) определялась из различных соображений в [8, 9]; предложенные функции были различны по форме, но численно давали близкие результаты. Поскольку вид обеих функций довольно сложен [8], вместо них используется простая параболическая аппроксимация

$$(1.3) \quad f(Y/R_w) = A\kappa^{-1}(Y/R_w)^{1/2}$$

которая при $A = -0,46$ практически совпадает с кривыми [8, 9]. Соответствие этой аппроксимации экспериментальным данным для безградиентного осесимметричного течения было подтверждено в [7] путем сравнения с результатами опытов над продольно обтекаемыми цилиндрами [10].

Подставляя выражения (1.2) и (1.3) в формулу (1.1) и переходя к безразмерным величинам, получим

$$(1.4) \quad \omega\omega^{-1} = \kappa^{-1} \ln(\omega u_\delta \text{Re } y) + B + \Pi\kappa^{-1}[6(y/\delta_1)^2 - 4(y/\delta)^3] + A\kappa^{-1}(y/r_w)^{1/2}$$

$$\delta_1 = \delta/L, \quad y = Y/L, \quad x = X/L, \quad r_w = R_w/L$$

$$\omega = v^*/U_\delta, \quad u = U/U_\delta, \quad u_\delta = U_\delta/\nu_\infty, \quad \text{Re} = \nu_\infty L/\nu$$

Здесь L — длина тела, ν_∞ — скорость невозмущенного потока, $U_\delta = U_\delta(X)$ — скорость на внешней границе пограничного слоя.

Соотношение (1.4) определяет безразмерное семейство профилей продольной осредненной скорости в пограничном слое, содержащее три безразмерных параметра: $\delta_1(x)$, $\Pi(x)$ и $\omega(x)$.

Для определения этих параметров интегрируются: уравнение импульсов, уравнение захвата массы и закон сопротивления, вытекающий из выражения (1.4). Интегральное соотношение импульсов используется в форме, содержащей интегральные площади и пригодной для толстого осесимметричного пограничного слоя:

$$(1.5) \quad \frac{d\theta_1^{**}}{dx} + \frac{1}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} (\theta_1^{**} + 2\theta_1^{**}) = r_w \omega^2$$

$$\theta^* = \int_0^\delta (1-u) R dY, \quad \theta^{**} = \int_0^\delta u(1-u) R dY$$

$$\theta_1^* = \theta^*/L^2, \quad \theta_1^{**} = \theta^{**}/L^2, \quad R = R_w + Y \cos \beta$$

Здесь θ^* — площадь вытеснения (на один радиан угловой цилиндрической координаты), θ^{**} — площадь потери импульса, R — радиальная цилиндрическая координата, β — угол между осью тела вращения и касательной к его меридиональному обводу.

Интегрирование дифференциального уравнения неразрывности по толщине пограничного слоя или использование равенства масс жидкости, втекающих и вытекающих из участка пограничного слоя длиной dX , дают уравнение захвата массы, которое для осесимметричного течения имеет вид

$$(1.6) \quad \frac{1}{U_0 R_0} \frac{d}{dX} [U_0 (\theta - \theta^*)] = \frac{d\delta}{dX} - \frac{V_0}{U_0}$$

$$\theta = \int_0^c R dY = R_w \delta + 0,5 \delta^2 \cos \beta, \quad R_0 = R_w + \delta \cos \beta$$

Здесь θ — площадь пограничного слоя, R_0 — радиус его внешней границы и V_0 — поперечная осредненная составляющая скорости на границе слоя.

Обработка экспериментальных данных [11] позволила установить, что правую часть уравнения (1.6) можно заменить функцией захвата массы в форме [8], предложенной для плоского пограничного слоя, если аргумент этой функции вычислять не через толщины, а через площади пограничного слоя

$$(1.7) \quad \frac{d\delta}{dX} - V_0/U_0 = E(H_1) = 0,0306 (H_1 - 3)^{-0,653}$$

$$H_1 = (\theta_1 - \theta_1^*)/\theta_1^{**}, \quad \theta_1 = \theta/L^2$$

Учитывая (1.7), уравнение (1.6) можно записать в виде

$$(1.8) \quad d[u_0 (\theta_1 - \theta_1^*)]/dx = E u_0 r_0$$

Закон сопротивления получается из профиля скорости (1.4) и в дифференциальной форме может быть записан следующим образом:

$$(1.9) \quad \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{A}{2\delta_1^{1/2} r_w^{1/2}} \right) \frac{d\delta_1}{dx} + 2 \frac{d\Pi}{dx} + \left(\frac{1}{\omega} + \frac{\kappa}{\omega^2} \right) \frac{d\omega}{dx} =$$

$$= - \frac{1}{u_0} \frac{du_0}{dx} + \frac{A\delta_1^{1/2}}{2r_w^{1/2}} \frac{dr_w}{dx} - \kappa \frac{dB}{dx}$$

При отсутствии полимеров последнее слагаемое исчезает, так как в этом случае $B = \text{const} = 4,9$.

Для интегрирования системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5), (1.8) и (1.9) использовался метод Рунге — Кутты. Расчеты выполнялись на ЭЦВМ БЭСМ-6 с программированием на языке АЛГОЛ-60 и на ЭЦВМ ЕС-1022 с программированием на языке ФОРТРАН. Начальные условия для системы дифференциальных уравнений получались с помощью одной из трех процедур:

1. Если пограничный слой считался турбулентным, начиная от носовой критической точки, то на расстоянии по оси $z = 0 - 0,02$ его характеристики определялись, как для плоской пластины при соответствующем числе Рейнольдса.

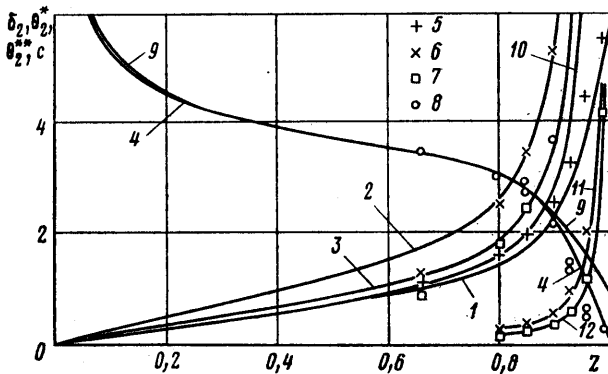
2. Если пограничный слой рассчитывался в предположении о том, что смена режимов течения происходит в условной точке ламинарнотурбулентного перехода, то в этой точке использовалось условие непрерывности импульса $\theta_L^{**} = \theta_T^{**}$, где индексы L и T соответствуют ламинарному

и турбулентному участкам. Ламинарный участок рассчитывался обычным однопараметрическим методом, а сечение перехода определялось либо как сечение, в котором установлен турбулизатор, либо по эмпирической формуле [7]

$$(1.10) \quad \text{Re}_{LT}^{**} = \exp(44,9 - 14,7H), \quad \text{Re}^{**} = U_\infty \delta^{**}/\nu, \quad H = \delta^*/\delta^{**}$$

$$\delta^* = \int_0^\delta (1-u) dY, \quad \delta^{**} = \int_0^\delta u(1-u) dY$$

Здесь двойной индекс LT обозначает сечение перехода, δ^* — толщина вытеснения, δ^{**} — толщина потери импульса. Формула (1.10) справедли-



Фиг. 1

ва при степени свободной турбулентности $\epsilon = 0,3-0,7\%$. Для определения начальных значений δ_{LT} , Π_{LT} и ω_{LT} решалась система из следующих трансцендентных уравнений: $\theta_1^{**} = \theta_1^{**}(\delta_1)$, $H = \delta^*/\delta^{**}$ и (1.4) при $y = \delta_1$, $u = u_\infty$.

3. Если пограничный слой рассчитывался с учетом ламинарной, переходной и турбулентной зон течения, то характеристики ламинарного слоя определялись по методу Л. Г. Лойцянского, а параметры переходной области — по распределению коэффициента перемежаемости по методу, предложенному в [12]; за середину переходной зоны, где коэффициент перемежаемости принимался равным 0,5, выбиралось сечение, в котором совпадали площади потери импульса ламинарного пограничного слоя, рассчитываемого от носовой критической точки, и турбулентного пограничного слоя, который рассчитывался от точки начала перехода.

Следует отметить, что при всех трех вариантах определения начальных условий характеристики турбулентного участка пограничного слоя слабо отличаются друг от друга, если ламинарно-турбулентный переход происходит недалеко от носовой оконечности тела, что почти всегда имеет место при практически интересных числах Рейнольдса.

Результаты расчета пограничного слоя тела вращения, описанного в [11], при его обтекании обычной вязкой жидкостью сопоставлены с экспериментальными данными [11] для $\text{Re} = 1,262 \cdot 10^6$ на фиг. 1. Кривые 1, 2, 3 соответствуют безразмерным характеристикам пограничного слоя: $\delta_2 = 10^2 \delta_1$, $\theta_2^* = 10^3 \theta_1^*/r_w$ и $\theta_2^{**} = 10^3 \theta_1^{**}/r_w$. Кривые 11 и 12 представляют собой продолжения кривых 2 и 3, изображенные в масштабе 1:10. Кривая 4 соответствует распределению местного коэффициента трения $C_f = 2\tau_w/\rho U_\infty^2 = 2\omega^2$, причем $C = 10^3 C_f$. Этим же характеристикам соответствуют экспериментальные точки 5, 6, 7 и 8, приведенные по данным работы

[11]. Как видно из выполненного сравнения, результаты расчетов хорошо согласуются с данными измерений практически до самой кормовой оконечности тела.

Если рассчитывать пограничный слой как тонкий, т. е. использовать предположение о том, что $\delta \ll R_w$, то в уравнениях (1.5) и (1.8) надо заменить θ^* на $\delta^* R_w$, θ^{**} на $\delta^{**} R_w$, θ на δR_w , а в выражениях (1.1), (1.4) и (1.9) положить $f(Y/R_w) = 0$ (для этого достаточно формально принять $A = 0$). Результаты расчета местного коэффициента трения и толщины пограничного слоя, выполненного в указанных предположениях для того же тела вращения, приведены на фиг. 1 (кривые 9 и 10). Использование таких упрощений приводит к тому, что совпадение с экспериментальными данными в районе кормовой оконечности тела становится хуже. Приведенные результаты подтверждают целесообразность учета конечности толщины осесимметричного пограничного слоя.

2. При расчете пограничного слоя тела вращения в полимерном растворе уравнения (1.5) и (1.8), представляющие собой, по существу, закон количества движения и закон сохранения массы, не изменяются. В уравнении (1.9) последнее слагаемое $\kappa dB/dx \neq 0$, так как параметр B , входящий в профиль скорости (1.4), в полимерном растворе не является константой.

В настоящее время существует несколько полуэмпирических теорий, в которых предлагаются зависимости B от свойств полимера и характеристик системы полимер — растворитель. В простейшей из них и, по-видимому, первой по времени появления предлагается рассматривать B как сумму [13]

$$(2.1) \quad B = B_0 + \Delta B, \quad (B_0 = \text{const}) \\ v^* < v_0^*: \quad \Delta B = 0, \quad v^* \geq v_0^*: \quad \Delta B = \alpha \ln(v^*/v_0^*)$$

Здесь $B_0 = 4,9$ (для трубы 5,5), ΔB — «полимерная добавка», коэффициент α зависит от вида и концентрации полимера, а v_0^* — пороговая динамическая скорость, начиная с которой присутствие полимеров в растворе становится эффективным. Из формулы (2.1) получаем

$$(2.2) \quad dB/dx = \alpha (\omega u_0)^{-1} d(\omega u_0)/dx$$

Выражение (2.2) следует подставить в (1.9), а соотношения (2.1) в (1.4). Значения α и v_0^* должны быть определены из эксперимента. Например, для раствора полиэтиленоксида WSR-301 с массовой концентрацией $c = 10^{-5}$ они равны $v_0^* \approx 0,023$ м/с и $\alpha = \alpha(c, M) = 4,2 - 4,5$ (в расчетах принималось $\alpha = 4,343$; M — молекулярный вес полимера).

Более развитая теория учета полимерных добавок разработана в [1–4]. При этом одна из возможных и наиболее простая аппроксимация параметра B имеет вид [14]

$$(2.3) \quad B = 8,8F^{-0,6} - 3,9, \quad F = 1 - b \arctg[1,7(v^*/v_0^* - 1)], \\ b = 0,37 \arctg(1,2 c M^{0,85})$$

Как видно из приведенных формул, в этой теории не нужно определять из опытов два параметра, поскольку первый из них $b = b(c, M)$, аналогичный α в корреляции Мейера (2.1), рассчитывается по универсальной зависимости (2.3), а

$$(2.4) \quad v_0^* = D M^{-0,89}$$

где D зависит только от вида полимера. Применение (2.4) к полиэтиленоксиду WSR-301 ($D = 1,37 \cdot 10^4$ м/с) дает $v_0^* = 0,0246$ м/с, что почти не

отличается от экспериментального значения, приведенного выше. Использование (2.3) дает значение $b=0,49$.

Следует отметить, что структура выражений (2.3) более рациональна, чем соотношений (2.1). По формулам (2.1) получается, что при больших скоростях движения ($v^* \rightarrow \infty$) полимерный эффект безгранично растет ($B \rightarrow \infty$). Применение формул (2.3) при $v^* \rightarrow \infty$ приводит к значению $F=F_\infty=0,235$, т. е. никакое увеличение скорости движения не может привести к уменьшению сопротивления большему, чем это соответствует $B=17,3$.

Дифференцирование выражения (2.3) по x с учетом того, что $v^* = \omega u_0 v_\infty$, дает

$$(2.5) \quad \frac{dB}{dx} = \frac{8,976bF^{-1,6}(v_\infty/v_0^*)}{1+[1,7(\omega u_0(v_\infty/v_0^*)-1)]^2} \frac{d}{dx}(\omega u_0)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что по корреляции Мейера добавка к дифференциальному уравнению (1.9) содержала кроме переменных ω и u_0 только постоянный параметр α , а по теории [1-4] добавка содержит еще и отношение v_∞/v_0^* , связанное со скоростью движения. Влияние этой добавки довольно сложное, но при $v_\infty \rightarrow \infty$ получается $dB/dx \rightarrow 0$, т. е. влияние наличия в потоке полимеров при переходе к закону сопротивления в дифференциальной форме для очень больших скоростей учитывается главным образом только через начальные условия, в которых фигурирует непродифференцированный закон сопротивления. Не исключено, что такой результат получается только в силу вида предложенной аппроксимации (2.3). Чтобы избежать «исчезновения» dB/dx при больших значениях v_∞ , следует в знаменателе выражения (2.5) иметь не квадратичную, а линейную функцию от v_∞/v_0^* . К желаемому результату можно прийти, если заменить во второй из формул (2.3) арктангенс на логарифм:

$$(2.6) \quad \arctg [1,7(v^*/v_0^*-1)] \approx a \ln (v^*/v_0^*)$$

Для диапазона изменения аргумента $v^*/v_0^*=1-10$ хорошее совпадение левой и правой частей соотношения (2.6) получается при $a=0,945$. При этом строгое равенство имеет место при $v^*/v_0^*=4,4$. С помощью этого значения можно подобрать коэффициенты линейного выражения, которым желательно заменить квадратичное в знаменателе формулы (2.5). В результате можно получить

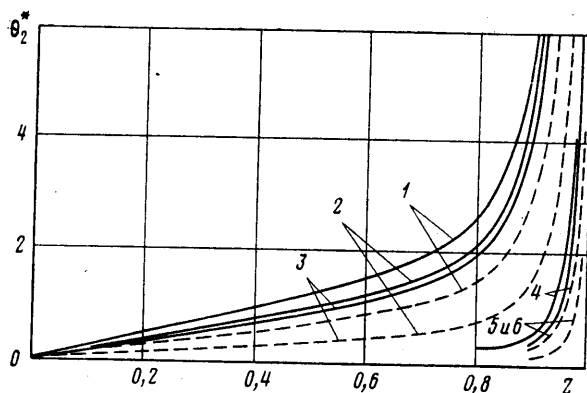
$$(2.7) \quad \frac{dB}{dx} = \frac{8,976bF^{-1,6}(v_\infty/v_0^*)}{1+9,826[\omega u_0(v_\infty/v_0^*)-1]} \cdot \frac{d}{dx}(\omega u_0)$$

Видно, что при $v_\infty \rightarrow \infty$ ($v^* \rightarrow \infty$) выражение (2.7) автоматически переходит к виду, аналогичному (2.2). Отсюда появляется возможность в случае использования корреляции Мейера не разыскивать α каждый раз из эксперимента, а определять его значение аналитически, с помощью параметров теории [1-4]

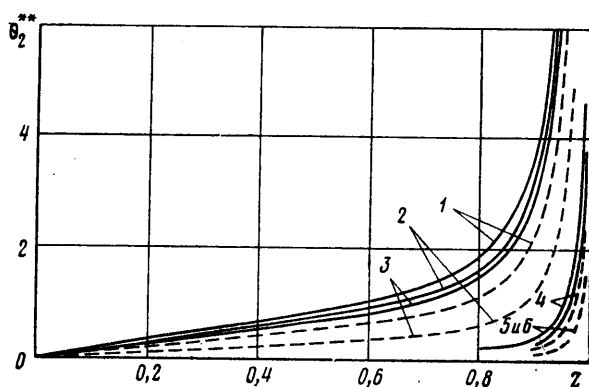
$$(2.8) \quad \alpha = 0,913bF_\infty^{-1,6} = 9,2b$$

Для рассмотренного примера формула (2.8) дает $\alpha \approx 4,48$. Пороговое значение динамической скорости для обеих теорий также можно вычислять по формуле (2.4).

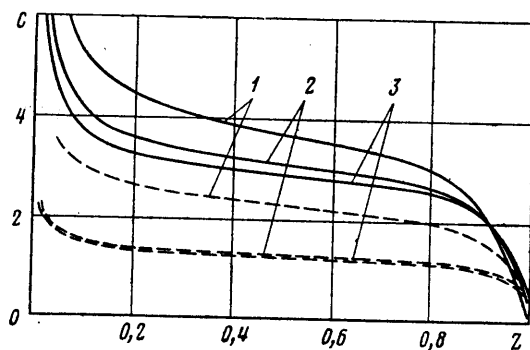
Расчеты пограничного слоя тела вращения, описанного в [11], были выполнены для случая его обтекания раствором полиэтиленоксида WSR-301 с молекулярным весом $M \approx 3 \cdot 10^6$ при концентрации $c=10^{-5}$ в двух вариантах: с использованием корреляции Мейера и по теории [1-4]. Все



Фиг. 2



Фиг. 3



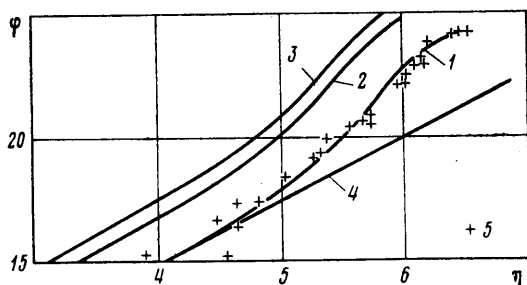
Фиг. 4

расчеты производились для двух вариантов задания исходных данных:

1. $L=1,578$ м, $v_\infty=0,913$ м/с, $Re=1,262 \cdot 10^6$

2. $L=3,2$ м, $v_\infty=15,0$ м/с, $Re=3,057 \cdot 10^7$

Результаты расчетов безразмерных интегральных площадей пограничного слоя и коэффициента местного трения приведены на фиг. 2–4, где обозначения аналогичны фиг. 1. На этих фигурах кривые 1 соответствуют обтеканию тела потоком обычной вязкой жидкости, кривые 2 – расчету при использовании корреляции Мейера, кривые 3 – расчету по теории



Фиг. 5

[1–4]. Сплошные кривые относятся к числу Рейнольдса $1,262 \cdot 10^6$, а пунктирные — к $Re = 3,057 \cdot 10^7$, кривые 4, 5 и 6 представляют собой продолжение кривых 1, 2 и 3 в масштабе 1 : 10.

Приведенные результаты показывают, что при использовании любой из рассмотренных теорий выигрыш в сопротивлении трения увеличивается с ростом скорости движения тела. Так, общий коэффициент сопротивления трения уменьшается при обтекании тела полимерным раствором по сравнению с обтеканием растворителем при $Re = 1,262 \cdot 10^6$ примерно на 20%, а при $Re = 3,057 \cdot 10^7$ — на 50%. Характер зависимостей распределения коэффициента местного трения от числа Рейнольдса, длины тела и скорости движения качественно соответствует результатам, полученным для плоской пластины [3]. При меньшем числе Рейнольдса наблюдается некоторое расхождение результатов расчетов по различным корреляционным формулам, учитывающим влияние полимерных добавок на характеристики течения. При $Re = 3,057 \cdot 10^7$ расчеты по обеим теориям дают очень близкие результаты. В связи с определенным расхождением результатов расчетов по различным зависимостям при относительно небольших числах Рейнольдса, т.е. в области начала проявления полимерного эффекта, ответ на вопрос о предпочтительности одной из теорий можно дать только на основе сравнения численных результатов с данными тщательно проведенного эксперимента.

Определенные по результатам расчетов профили продольной составляющей осредненной скорости приведены на фиг. 5. Профили построены для сечения с безразмерной абсциссой $z = 0,662$ в координатах $\phi = U/v^*$ и $\eta = \ln(v^*Y/v)$ при числе Рейнольдса $1,262 \cdot 10^6$. В случае обтекания тела без полимерных добавок (кривая 1) наблюдается вполне удовлетворительное совпадение расчетного профиля с данными измерений [11] (точки 5). Линии 2 и 3 на фиг. 5 соответствуют профилям скорости, определенным по результатам расчетов пограничного слоя с использованием корреляции Мейера и зависимостей, предложенных в [1–4]; кривая 4 представляет собой обычный логарифмический закон. Все данные демонстрируют весьма сильное влияние полимерных добавок на профили скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А. О расчетах турбулентных пограничных слоев с малыми добавками полимеров. — В кн.: Турбулентные течения. М.: Наука, 1974, с. 205.
2. Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А. О построении полуэмпирической теории турбулентности слабых растворов полимеров. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2, с. 136.
3. Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А. Полимерные добавки в пограничном слое плоской пластины. — Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1974, вып. 32, с. 178.
4. Иоселевич В. А., Пилипенко В. Н. О турбулентном течении жидкости с полимерными добавками в пограничном слое с продольным градиентом давления. — Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 4, с. 808.

5. Computation of turbulent boundary layer-1968. Proc. AFOSR-IFR-Stanford Conference / Ed. Kline S. J., Morkovin M. V., Sovran G., Cockrell D. J., 1969, v. 1.
6. Левкович, Ходли, Хорлок, Перкинс. Семейство интегральных методов для расчета турбулентного пограничного слоя.— Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 1, с. 51.
7. Амфилохий В. Б., Дробленков В. В., Мазаева Н. П., Шкляревич А. И. Расчет и экспериментальное исследование толстого осесимметричного турбулентного пограничного слоя.— В кн.: Тез. докл. на Всес. науч.-техн. симпозиуме по вопросам повышения пропульсивных качеств и эксплуатационных характеристик отечественных перспективных судов. Л.: Судостроение, 1978, с. 5.
8. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973. 256 с.
9. Rao G. N. V. The law of the wall in a thick axisymmetric turbulent boundary layer.— Trans. ASME, Ser. E.— J. Appl. Mech., 1967, № 1, p. 237.
10. Willmarth W. W., Winkel R. E., Sharma L. K., Bogar T. J. Axially symmetric turbulent boundary layers on cylinders: mean velocity profiles and wall pressure fluctuations.— J. Fluid Mech., 1976, v. 76, pt 1, p. 35.
11. Patel V. C., Nakayama A., Damian R. Measurements in the thick axisymmetric turbulent boundary layer near the tail of a body of revolution.— J. Fluid mech., 1974, v. 63, pt 2, p. 345.
12. Дробленков В. В., Каневский Г. И. О построении метода расчета плоского пограничного слоя в слабых растворах полимеров с ламинарной, переходной и турбулентной зонами течения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3, с. 42.
13. Meyer W. A. A correlation of frictional characteristics for turbulent flow of dilute viscoelastic non-new-tonian fluids in pipes.— AIChE Journal, 1966, v. 12, № 3, p. 522.
14. Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А., Пилипенко В. Н. Механическая деструкция полимерных молекул в турбулентном потоке.— В кн.: Некоторые вопросы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 55.

Ленинград

Поступила в редакцию
8.VIII.1979