МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1981

УДК 532.5

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ВЫРОЖДЕНИЯ ФОРМЫ ТОНКИХ КАВЕРН

ЯКИМОВ Ю. Л.

На основе приближения тонкого тела получены дифференциальные уравнения для формы тонких нестационарных осесимметричных каверн. В отличие от уравнений, полученных ранее [1, 2], выведенные уравнения в стационарном случае содержат известную асимптотику для течения типа Кирхгофа. Для случая сжимаемой жидкости найдена зависимость асимптотического поведения каверны от числа Маха, что отличается от результата, полученного в [3]. Учет сжимаемости жидкости приводит к замедлению скорости роста площади каверны. Показано, что решения полученных дифференциальных уравнений удовлетворяют известным условиям отрыва [3, 4].

Заметим, что предположение о тонкости каверны является естественным, так как отношение длины каверны к радиусу кавитатора может достигать 10^3-10^4.

В прямой задаче о тонком теле по заданной зависимости радиуса тела (каверны) от координат и времени $r(x, t)$ приближенно определяются характеристики потока, например давление p на поверхности тела. В обратной задаче по заданному давлению определяется неизвестная форма каверны.

Если безразмерное давление – число кавитации $\sigma=(p_\infty-p)/(^1/_2\rho V^2)$, где p_∞ – давление далеко от тела, ρ – плотность жидкости, V – скорость движения тела, мало, то в силу приближенного характера уравнения, из которого по форме тела находится давление, оно будет определено с большой относительной ошибкой. Таким образом, для разных форм тела величина давления будет отличаться лишь в пределах точности приближения. Аналогично в обратной задаче формы тела, соответствующие разным малым давлениям, будут неразличимы. В связи с этим для исследования каверн, соответствующих малым числам кавитации, к точности приближенного подхода предъявляются повышенные требования.

1. Так как в дальнейшем будут рассматриваться каверны при малых σ, приведем известную асимптотическую формулу для радиуса каверны при $\sigma=0$ и $x\to\infty$ [3]

$$r_p^2=\frac{2\sqrt{c_x}\,r_0x_p}{\ln^{1/2}(x_p/2\sqrt{c_x}\,r_0)} \tag{1.1}$$

Здесь c_x — коэффициент сопротивления, r_0, r_p — размерные радиусы кавитатора и каверны, x_p — размерная координата вдоль оси x. Ось x совпадает с осью каверны и направлена от кавитатора в сторону, противоположную его движению.

При $\sigma\to0$ течения, близкие к течению Кирхгофа, имеют место только вблизи концов каверны, где значительны инерционные силы и влиянием σ можно пренебречь. Разобьем условно границу каверны на части: среднюю; прилегающие к ней участки, где течение близко к течению Кирхгофа; и участки, прилегающие к кавитатору и следу.

Число кавитации σ и сила сопротивления, действующая на кавитатор, являются основными определяющими параметрами рассматриваемых течений. При малых σ справедлива простая приближенная зависимость между ними [5]

$$c_xr_0^2=r_{\max}^2\sigma$$

Эта зависимость вытекает из предположения, что энергия, сообщенная жидкости кавитатором, равна работе против сил внешнего давления, необходимой для образования цилиндрической полости с площадью поперечного сечения, равной $\pi r_{\max}^2$, где $r_{\max}$ — радиус максимального сечения каверны.

Введем безразмерные цилиндрические координаты, время, радиус и площадь поперечного сечения каверны и потенциал течения по формулам

$$(1.2)\qquad \begin{gathered} x=\frac{x_p}{2\sqrt{c_x}\,r_0},\quad R=\frac{R_p}{2\sqrt{c_x}\,r_0},\quad t=\frac{t_pV}{2\sqrt{c_x}\,r_0} \\ r=\frac{r_p}{2\sqrt{c_x}r_0},\quad u=r^2,\quad \Phi=\frac{\Phi_pV}{2\sqrt{c_x}r_0} \end{gathered}$$

Пусть x_1 и x_2 — безразмерные координаты начала и конца каверны и $dx_1/dt=-V$. В безразмерных переменных соотношения (1.1) и (1.2) примут вид

$$(1.3)\qquad u=\frac{x}{\ln^{1/2}x},\quad \sigma u_{\max}=\frac{1}{4}$$

Представим потенциал течения в виде потенциала простого и двойного слоя на основе формулы Грина

$$(1.4)\qquad \Phi=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_1+\Sigma}\frac{1}{P}\frac{\partial\Phi}{\partial n}ds+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_1+\Sigma}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{P}\right)ds$$

где Σ_1 — поверхность кавитатора и следа, а Σ — поверхность каверны; P — расстояние между точкой, в которой определяется потенциал, и точкой поверхности; φ — значение потенциала на Σ. Кинематические условия на поверхности каверны и интеграл Коши — Лагранжа представим в виде

$$(1.5)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=r_t\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}\alpha=r_x$$

$$(1.6)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}[r_t^2+\varphi_x^2]\cos^2\alpha=\frac{\sigma}{2}$$

Предполагается, что $\sigma=\sigma(x, t)$, т. е. учитывается зависимость от координаты и времени внешнего давления и давления в каверне.

Интегродифференциальная система (1.4) — (1.6) может служить для определения $r(x, t)$ и $\varphi(x, t)$ при $x_1<x<x_2$ в зависимости от $\sigma(x, t)$ и потенциала F, представляющего особенности, распределенные по Σ_1.

2. Для оценки интегралов около каждой внутренней точки выделим интервал [2] длиной l:

$$(2.1)\qquad l=(x_2-x_1)\ln^{-2}\frac{\sqrt{u_{\max}}}{x_2-x_1}$$

Внутри этого интервала функции u_t, φ будем считать зависящими только от времени. В отличие от [2] учтем также случаи, когда одна из концевых точек x_1 или x_2 попадает внутрь интервала $(x-{}^1/_2l,\ x+{}^1/_2l)$. Интеграл от диполей на интервале l пропорционален телесному углу $\Delta\Omega$, под которым виден этот участок каверны, и плотности диполей φ [6]

$$(2.2)\qquad \int\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{P}ds=\int\limits_{l}\Delta\varphi d\Omega\simeq\Delta\varphi\frac{u}{l^2}$$

Постоянная составляющая в φ несущественна, так как интеграл (2.2) при $\varphi=\mathrm{const}$ по замкнутой поверхности равен нулю.

Эта величина, как будет видно из дальнейшего, пренебрежимо мала. В (1.6) можно пренебречь φ_x^2 по сравнению с $\partial\Phi/\partial t \sim \varphi_x$ и положить $\cos\alpha=1$, тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}r_t^2=\frac{\sigma}{2} \tag{2.3}$$

Из (1.5), учитывая (2.1), имеем приближенное выражение для Φ [2]

$$\Phi=-\frac{1}{8\pi}\int\limits_{(x-{}^1/_2 l),x_1}^{(x+{}^1/_2 l),x_2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{u_t\,d\theta\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}+F \tag{2.4}$$

В связи с тем что при $\sigma\to 0$ безразмерная длина каверны $x_2-x_1\to\infty$, $l\to\infty$. Интеграл в (2.4) расходится при $l\to\infty$, и главное значение его зависит от поведения подынтегральной функции вблизи концов интервала l. Представим

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^{-n}&=(\sqrt{(x-\xi)^2+R^2+r^2-2R\cos\theta})^{-n}=\\&=(\sqrt{(x-\xi)^2+R^2+r^2})^{-n}\left(1+\frac{nRr\cos\theta}{\sqrt{(x-\xi)^2+R^2+r^2}}\right)\end{aligned} \tag{2.5}$$

Кроме того, учтем особенность в точке $x-\xi=\theta=R-r=0$. Тогда для производной потенциала по времени получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{u_{tt}}{4\pi}\ln\lambda-\frac{u_t}{4\sqrt{(x-x_1)^2+2u}}+F_t \tag{2.6}$$

$$\lambda=\begin{cases}\dfrac{-(x-x_1)+\sqrt{(x-x_1)^2+R^2+r^2}}{{}^1/_2 l+\sqrt{({}^1/_2 l)^2+R^2+r^2}}\approx\dfrac{u}{l[(x-x_1)+\sqrt{(x-x_1)^2+2u^2}]}\\[2ex]\dfrac{-{}^1/_2 l+\sqrt{({}^1/_2 l)^2+R^2+r^2}}{(x_2-x)+\sqrt{(x-x_2)^2+R^2+r^2}}\approx\dfrac{u}{l[(x_2-x)+\sqrt{(x_2-x)^2+2u^2}]}\\[2ex]\dfrac{-{}^1/_2 l+\sqrt{({}^1/_2 l)^2+R^2+r^2}}{{}^1/_2 l+\sqrt{({}^1/_2 l)^2+R^2+r^2}}\approx\dfrac{u}{l^2}\end{cases}$$

в зависимости от того, попадает ли внутрь интервала l начало каверны x_1 или конец каверны x_2, или ни x_1, ни x_2 не попадают внутрь этого интервала.

Имея в виду, что λ стоит под знаком логарифма, пренебрегая величинами, малыми по сравнению с $\ln\lambda\to\infty$, все три выражения для λ с точностью до $1\ll\ln\lambda$ можно объединить в одно

$$\lambda\simeq\frac{u}{[(x-x_1)+\sqrt{(x-x_1)^2+2u}][(x_2-x)+\sqrt{(x-x_2)^2+2u}]} \tag{2.7}$$

Из (2.3), (2.4), (2.6) получим приближенное дифференциальное уравнение для формы каверны

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}u_{tt}\ln\lambda+\frac{1}{8}\frac{u_t^2}{u}-\frac{u_t}{4\sqrt{(x-x_1)^2+2u}}+\\&+\frac{u_t}{4\sqrt{(x_2-x)^2+2u}}=\frac{\sigma}{2}-F_t\end{aligned} \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) отличается от уравнений, полученных в [1, 2], двумя последними слагаемыми в левой части, которые существенны только вблизи соответствующих концов. В [1] эти члены уравнения отсутствуют. В [2] есть аналогичные члены, но в качестве аргумента в u_t берется x_1 (или x_2), что допустимо, если $u_t(x_1) \sim u_t(x)$. Но при $\sigma \to 0$ $u_t(x_1) \neq u_t(x)$. Это отличие приводит к тому, что при $\sigma=0$ уравнение (2.8) удовлетворяет в главных членах асимптотике (1.3), а без указанных членов не удовлетворяет [7].

Приведенный выше вывод уравнения (2.8), аналогичный выводу в [2], недостаточно обоснован, так как при оценке остаточного члена и длины аппроксимационного интервала l использована длина каверны [2], которая при $\sigma \to 0$ становится бесконечной.

3. Рассмотрим вывод (2.8), не связанный с соображениями о длине каверны. Не нарушая общности, рассмотрим уравнение только вблизи начала каверны, где прежде всего и возникает асимптотика (1.3). Имея в виду малые σ, при оценке остаточного члена можно использовать (1.3).

Примем за характерную длину расстояние до начала каверны. Положим вместо (2.2) $l=l_1=\sqrt{(x-x_1)^2+2u}\ln\sqrt{(x-x_1)^2+2u}$. При этом точка x_1 будет всегда внутри интервала l.

Оценка интеграла от диполей в (1.4) показывает, что этот член несуществен, даже если положить при оценке

$$\varphi(\xi)=\varphi(x)+(\xi-x)\varphi_x$$

Из (2.4) получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{x_1}^{x+{}^1\!/_2 l_1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(x-\xi)u_t\,d\theta d\xi}{(\sqrt{(x-\xi)^2+R^2+r^2-2Rr\cos\theta})^3}+F_x \tag{3.1}$$

Подставим в (3.1) $u_t(\xi)=u_t(x, t)+(\xi-x)u_{tx}$, тогда множитель при $u_t(x, t)$ в подынтегральном выражении — нечетная функция, которая для внутренних, симметричных относительно x интервалов имеет разные знаки. Поэтому при вычислении интеграла достаточно вычислить разности вблизи концов интервала интегрирования, при этом можно пользоваться разложением (2.5).

При подстановке выражения $(\xi-x)u_{tx}$ получим снова интеграл, расходящийся при $l_1\to\infty$, поэтому можно использовать (2.5) и пренебречь в знаменателе зависимостью r^2 от x. Получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{u_{tx}}{4}\ln\frac{u}{[(x-x_1)+\sqrt{(x-x_1)^2+2u}]^2}-\frac{1}{4}\frac{u_t}{\sqrt{(x-x_1)^2+2u}}+F_x. \tag{3.2}$$

С другой стороны, введя модуль скорости $V=\sqrt{r_t^2+\varphi_x^2}\cos\alpha$, с учетом (1.5) имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-r_tr_x+\varphi_x,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial R}=r_t \tag{3.3}$$

При выводе (3.3) предполагалось, что при $\sigma\to 0$ справедливо $\varphi_x \ll r_t$. В других случаях вместо (3.3) можно использовать исходные равенства (1.5). Из (2.3), учитывая выражение $\varphi_t=\partial\Phi/\partial t+r_t\partial\Phi/\partial R$ и второе соотношение (3.3), получим

$$\varphi_t-\frac{1}{2}r_t^2=\frac{\sigma}{2} \tag{3.4}$$

Из (3.2) и (3.3) имеем

$$\frac{1}{4}u_{tx}\ln\frac{u}{[(x-x_1)+\sqrt{(x-x_1)^2+2u}]^2}-\frac{u_t}{\sqrt{(x-x_1)^2+2u}}=-r_tr_x+\varphi_x-F_x \tag{3.5}$$

Уравнения (3.4) и (3.5) образуют систему, которая в стационарном случае переходит в (2.8). Остаточный член в (3.5) имеет порядок u_{tx}, так как при вычислении интеграла (3.1) использовалось соотношение $1\ll\ln\lambda$ и членами порядка 1 пренебрегалось. Если иметь в виду решения, близкие к (1.3), то для остаточного члена будем иметь

$$u_{tx}\simeq u_{xx}\simeq\frac{1}{(x-x_1)\ln^{3/2}(x-x_1)}$$

Из (3.4) $\varphi_x\simeq\varphi_t\simeq\sigma$. Отсюда получим условие применимости (3.4), (3.5) в виде

$$\sigma\gg\frac{1}{(x-x_1)\ln^{1/2}(x-x_1)} \tag{3.6}$$

4. Вывод (3.5) основан на использовании выражения для $\partial\Phi/\partial x$. Если использовать выражение $\partial\Phi/\partial R$, то можно учесть больше членов в разложении u_t, положив

$$u_t(\xi,t)=u_t(x,t)+(\xi-x)u_{tx}+{}^1/_2(\xi-x)^2u_{txx} \tag{4.1}$$

Вместо (3.1) получим

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R}=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{x_1}^{x+{}^1/_2l_1}\int\limits_0^{2\pi}\frac{(R-r\cos\theta)u_t\,d\theta\,d\xi}{(\sqrt{(x-\xi)^2+R^2+r^2-2Rr\cos\theta})^3}+F_R \tag{4.2}$$

Главный член разложения (4.1) равен r_t с точностью до сходящихся вне $(x_1,\ x+{}^1/_2l_1)$ интегралов, вычисляющихся на основе разложения (2.5).

Следующий член (4.1) дает интеграл от нечетной функции и снова вычисляется на основе (2.5). Последний интеграл, связанный с u_{txx}, не имеет особенности при $\xi=x$ и сначала может быть взят по x, а затем, после подстановки пределов и с учетом (2.5), по θ.

Вместо второго соотношения (3.3), используя (1.5), можно взять более точное выражение

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R}=r_t-r_tr_x^2+r_x\varphi_x \tag{4.3}$$

Приравняв (4.2) и (4.3), вместо (3.5) получим

$$\frac{1}{4}u_{txx}\ln\frac{2e^2u}{[(x-x_1)+\sqrt{(x-x_1)^2+2u}]\sqrt{(x-x_1)^2+2u}\ln\sqrt{(x-x_1)^2+2u}}+\frac{u_t}{4[(x-x_1)^2+2u]}=\frac{u_tu_x^2}{4u^2}-\frac{u_x}{u}\varphi_x+\frac{2F_R}{\sqrt{u}} \tag{4.4}$$

Система (3.4)—(4.4) для стационарного случая в главных членах при $\sigma\to0$ совпадает с результатом в [7]. Эта система также допускает асимптотику (1.3).

Для оценки остаточного члена в (4.4) необходимо учесть ошибку, связанную с отброшенными членами в разложении (4.1) внутри интервала l_1, и дополнительный член в (4.2), связанный с интегрированием по области вне интервала l_1. Этот интеграл сходится при выполнении (1.3) и оценивается следующим образом.

$$(4.5)\qquad \int\limits_{x+{}^{1}/{}_{2}l_1}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{(R-r\cos\theta)u_t\,d\theta\,d\xi}{[\sqrt{(x-\xi)^2+R^2+r^2-2Rr\cos\theta}]^3}\leqslant\frac{R(x)u_t(x+{}^1/{}_2l_1)}{l_1^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{R(x)u_t(x)}{(x-x_1)^2\ln^2(x-x_1)}\sim\frac{R(x)}{(x-x_1)^2\ln^{5/2}(x-x_1)}$$

Для оценки ошибки внутри интервала l_1 учтем следующий член разложения в (4.1): $(\xi-x)^3u_{txxx}$. При подстановке в (4.2) этот член дает интеграл, расходящийся при $l_1\to\infty$, поэтому главное значение интеграла определяется функцией u_{txxx} вблизи верхнего предела

$$\int\limits_{x_1}^{x+{}^1/{}_2l_1}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{(\xi-x)^3u_{txxx}(R-r\cos\theta)\,d\xi\,d\theta}{R_3}\sim$$

$$(4.6)\qquad \sim u_{txxx}\left(x+\frac{l_1}{2}\right)\frac{l_1}{2}\sim\frac{R(x)l_1}{l_1^{3/2}\ln^{3/2}l_1}\leqslant\frac{R(x)}{(x-x_1)^2\ln^{5/2}(x-x_1)}$$

Аналогично (3.6) получим условие применимости (4.4) в виде (4.7)

$$(4.7)\qquad \sigma\leqslant\frac{1}{(x-x_1)\ln^{5/2}(x-x_1)}$$

Условия (3.6) и (4.7) показывают, что система (3.4), (4.4) значительно точнее системы (3.4), (3.5) применительно к течениям при малых σ.

5. Рассмотрим уравнение для тонких каверн с учетом сжимаемости жидкости. В связи с тем что даже при очень больших давлениях плотность жидкости изменяется мало и почти пропорционально давлению, хорошим приближением является волновое уравнение с постоянной скоростью звука c

$$(5.1)\qquad \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=M^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

где $M=V/c$ — число Маха.

Предположим, что движение установившееся. Положив $\Phi(x,\ t)=$ $=\Phi(x+t)$ и сделав афинное преобразование координат $R_1=\sqrt{1-M^2}\,R$ [3], вместо (5.1) и (2.3) получим

$$(5.2)\qquad \Delta\Phi(R_1,\ x)=0$$

$$(5.3)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1-M^2}{2}r_x^2=\frac{\sigma}{2}$$

Таким образом, в переменных x, R_1 формулировка задачи отличается от формулировки задачи для несжимаемой жидкости, рассмотренной в предыдущих пунктах, только коэффициентом при втором члене (5.3). Выполняя выкладки, аналогичные сделанным в п. 2, вместо (2.8) получим

$$(5.4)\qquad \frac{1}{4}u_{xx}\ln\lambda+\frac{1-M^2}{8}\frac{u_x^2}{u}-\frac{u_x}{4\sqrt{(x-x_1)^2+2u}}+$$

$$+\frac{u_x}{\sqrt{(x_2-x)^2+2u}}=\frac{\sigma}{2}-F_x$$

или аналогичное уравнение с соответствующим λ вместо системы (3.4), (3.5). В этих дифференциальных уравнениях сжимаемость жидкости представлена только числом M. Уравнение (5.4) при $\sigma=0$ содержит вместо (1.3) асимптотику

$$u=Cx(\ln x)^{-1/2(1+M^2)} \tag{5.5}$$

Хотя эта асимптотика получена в афиннопреобразованной системе координат, она сохранится с точностью до постоянной C и в исходной системе координат x, R.

Асимптотика (5.5) отличается от результата [3], где для уравнения (5.1) указана асимптотика (1.3) и для исходной, и для преобразованной системы координат. Покажем, что (1.3) не является асимптотикой для фиктивного потенциального потока несжимаемой жидкости в переменных x, R_1. В системе координат x, R_1 уравнение (5.3) представим в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{2}r_x^2=\frac{\sigma+\Delta\sigma}{2}, \quad \Delta\sigma=M^2r_x^2 \tag{5.6}$$

Из (5.6) видно, что в переменных x, R_1 течение эквивалентно течению несжимаемой жидкости, но с дополнительным давлением $\Delta\sigma$ на поверхности каверны. Суммарное сопротивление для системы тело плюс каверна в этом фиктивном потоке при $\sigma=0$ может быть представлено в виде

$$X=X_1-\int\limits_{x_1}^{\infty}\Delta\sigma\pi r r_x\,dx \tag{5.7}$$

где X_1 — сопротивление афиннопреобразованного тела в несжимаемой жидкости. Асимптотика (1.3) получена в [3] из предположения о конечности суммарного сопротивления X. Однако после подстановки (1.3) в (5.7) получается расходящийся интеграл для X, что противоречит исходному предположению [3].

С другой стороны, так как в несжимаемой жидкости конечному сопротивлению может соответствовать только асимптотика (1.3) [3]. Так как асимптотика (5.5) отличается от (1.3), то ей может соответствовать только нулевое сопротивление $X=0$. Это не противоречит (5.7), так как при подстановке (5.5) в (5.7) интеграл сходится и подходящим выбором постоянной C в (5.5) условие $X=0$ может быть удовлетворено.

Из условия $X=0$ не следует отсутствие сопротивления для исходного потока сжимаемой жидкости. Это условие может быть использовано для определения связи между c_x и C, если известно сопротивление X_1 афиннопреобразованного тела для потока несжимаемой жидкости. Из (5.5) следует, что в сжимаемой жидкости площадь поперечного сечения каверны растет медленнее по сравнению с каверной в несжимаемой жидкости. При этом, поскольку энергетическое соотношение (1.3) должно приближенно выполняться при $\sigma\neq0$, следует ожидать увеличения длины каверны в сжимаемой жидкости.

6. Покажем, что граничные условия, соответствующие точной постановке задачи, можно удовлетворить, решая полученные приближенные уравнения, причем этих условий достаточно для нахождения решения выведенных дифференциальных уравнений. В общем случае должны быть заданы условия на теле, начальные и другие дополнительные условия. Для стационарного случая могут быть заданы условия на теле, в миделе каверны или требование выхода на асимптотику (5.5) при $\sigma=0$.

Рассмотрим подробнее случай стационарного движения, заменив в уравнениях t на x. Из (2.8) и (5.4) или из системы (3.4), (3.5) получим одно и то же обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, а из системы (4.3), (4.4) — обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка. При $\sigma=0$ для обеспечения выхода на асимптотику (5.5) необходимо и достаточно задать две постоянные: значение u и u_x в произвольной, достаточно далекой точке. Этим исключается появление постоянного множителя в асимптотическом выражении для u при $x \to \infty$. При $\sigma \neq 0$ в точке максимального диаметра x_{max} имеем тоже два условия

(6.1) $\quad u=1/4\sigma, \quad u_x=0$

Эти условия при заданном $\sigma(x)$ определяют решение для уравнения второго порядка.

На кромке отрыва должно быть выполнено условие $u_0={}^1/_4 c_x$, вытекающее из равенства $r_p=r_0$. При заданной безразмерной форме тела свободными являются его положение на оси x и его характерный размер. Меняя их, в общем случае, когда кромка отрыва не фиксирована, можно удовлетворить условию $u_0={}^1/_4 c_x$ и еще одному условию на линии отрыва, например заданному направлению касательной к контуру каверны в точке отрыва. В случае уравнения третьего порядка кроме указанного условия можно удовлетворить еще двум условиям на кромке отрыва: непрерывности касательной и кривизны, т. е. самому общему случаю «плавного» отрыва [4]. Если кромка отрыва фиксирована или если c_x не зависит от ее положения (например, для конуса), то $u_0={}^1/_4 c_x$ и условию непрерывности касательной в точке отрыва, т. е. и на основе решения дифференциального уравнения третьего порядка можно удовлетворить самому общему случаю «резкого» отрыва [4].

То, что с уравнением второго порядка не удовлетворяются все условия на кромке отрыва, по-видимому, не существенно. Действительно, присоединим к телу часть каверны, которую будем считать заданной. Условие $u_0={}^1/_4 c_x$ при малых σ автоматически выполняется для любой точки каверны вблизи тела. Таким образом, если в некоторой точке решение уравнения второго порядка и заданная часть каверны имеют общую касательную (за счет движения и изменения размера тела), то в силу уравнения совпадут и кривизны. Таким образом, решение уравнения второго порядка может иметь непрерывные первую и вторую производные и может быть продолжено в область отрыва более точным решением. Этот прием может быть использован также и в тех случаях, когда вблизи тела каверна не является тонкой, или вблизи конца каверны, сопрягая решение с более точным, например с частью течения Эфроса.

Автор признателен Л. И. Седову, С. С. Григоряну, В. П. Карликову, В. А. Ерошину и др., принявшим участие в обсуждении работы, а также Л. А. Барминой за помощь в подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С.* Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела.– ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 951–953.
2. *Якимов Ю. Л.* Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации.– ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 499–501.
3. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М.: Физматгиз, 1961. 496 с.
4. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964. 466 с.
5. *Логвинович Г. В.* Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наукова думка, 1969. 215 с.
6. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 426 с.
7. *Якимов Ю. Л.* К постановке задачи о движении тела в воде.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 5, с. 19–26.

Москва

Поступила в редакцию
21.XI.1980