

УДК 532.516.013.4

РАСЧЕТ АВТОКОЛЕБАНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В РЕЗУЛЬТАТЕ
ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ
КУЭТТА

КОЛЕСОВ В. В.

Изучается периодический по времени автоколебательный режим (цикл) типа азимутальной волны, ответвляющийся от стационарного неизотермического течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. Применяется методика работ [1, 2]. Доказана единственность цикла (с точностью до сдвига вдоль оси цилиндров z и поворота на любой угол φ) и его устойчивость относительно пространственно-периодических трехмерных возмущений. Приводятся результаты численного расчета первых двух членов разложения цикла в ряды Ляпунова – Шмидта. Рассчитан вращающийся момент, действующий на поверхность внутреннего цилиндра.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая однородная теплопроводная жидкость заполняет полость между двумя твердыми бесконечными концентрическими цилиндрами с радиусами R_1, R_2 ($R_1 < R_2$). Угловые скорости и температуры внутреннего и внешнего цилиндров обозначим соответственно Ω_1, Θ_1 и Ω_2, Θ_2 .

Предположим, что внешние массовые силы отсутствуют и расход жидкости через поперечное сечение полости цилиндров равен нулю. За масштабы длины, скорости, температуры и плотности примем соответственно $R_1, \Omega_1 R_1, \Theta_1$ и плотность жидкости при температуре Θ_1 .

В цилиндрической системе координат r, φ, z (ось z направлена вдоль оси цилиндров) уравнения Навье – Стокса, теплопроводности, неразрывности и уравнение состояния в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}'}{dt} &= -\frac{1}{\rho'} \nabla \Pi' + \frac{1}{\lambda} (\nabla \operatorname{div} \mathbf{V}' - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V}') \\ \frac{\partial T'}{\partial t} &= \frac{1}{\lambda P} \Delta T' - (\mathbf{V}', \nabla) T', \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho' \mathbf{V}') = 0 \\ (1.1) \quad \rho' &= 1 - \beta \Theta_1 (T' - 1), \quad \int_0^{2\pi} \int_1^{R_2/R_1} v_z' r dr d\varphi = 0 \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} \\ \frac{d\mathbf{V}'}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}'}{\partial t} + (\mathbf{V}', \nabla) \mathbf{V}' + \left\{ -\frac{1}{r} (v_\varphi')^2, \frac{1}{r} v_r' v_\varphi', 0 \right\} \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{V}' = \{v_r', v_\varphi', v_z'\}$ – вектор скорости, T' – температура, Π' – давление, ρ' – плотность жидкости, t – время, $\lambda = \Omega_1 R_1^2 / \nu$ – число Рейнольдса, $P = \nu / \chi$ – число Прандтля, ν, χ и β – соответственно коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения.

Здесь и ниже используется евклидово скалярное произведение векторов

$$(\mathbf{V}, \mathbf{U}) = \mathbf{V}\mathbf{U} = v_r u_r + v_\varphi u_\varphi + v_z u_z$$

На поверхностях цилиндров $r=1$ и $r=R$ должны выполняться краевые условия

$$(1.2) \quad \mathbf{V}' = \{0; 1; 0\}, \quad T' = 1 \quad (r=1), \quad \mathbf{V}' = \{0, \Omega R, 0\}, \quad T' = \Theta \quad (r=R)$$

$$R = \frac{R_2}{R_1}, \quad \Omega = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \quad \Theta = \frac{\Theta_2}{\Theta_1}$$

Задача (1.1), (1.2) допускает точное решение

$$(1.3) \quad \mathbf{V}_0 = \left\{ 0, ar + \frac{b}{r}, 0 \right\}, \quad T_0 = c \ln r + 1, \quad a = \frac{\Omega R^2 - 1}{R^2 - 1}, \quad b = 1 - a$$

$$c = \frac{\Theta - 1}{\ln R}, \quad \Pi_0 = \int_1^r \left(a + \frac{b}{x^2} \right)^2 (1 - \beta c \theta_1 \ln x) x dx + \text{const}$$

Течение (1.3) представляет собой круговое ламинарное течение Куэтта с логарифмическим распределением температуры. Требуется установить, при каком значении λ_0 числа Рейнольдса λ оно теряет устойчивость, и найти возникающий при этом автоколебательный режим.

2. Ряды Ляпунова — Шмидта. Будем разыскивать автоколебательный режим в виде волны, бегущей по азимуту. Для этого введем новую независимую переменную $\theta = \varphi - st$, где s — неизвестная циклическая частота (фазовая скорость азимутальной волны). Возмущенное течение представим в виде $\mathbf{V}' = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}$, $T' = T_0 + cPT$, $\Pi' = \Pi_0 + \Pi/\lambda$.

Задача для отыскания бесконечно малых возмущений \mathbf{V} , T , Π в приближении Буссинеска ($\beta\Theta_1 \ll 1$, [3]) имеет вид

$$(2.1) \quad \lambda(s - \omega_1) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} + M\mathbf{F} - \Gamma\Pi = \lambda N\mathbf{F} + \lambda K(\mathbf{F}, \mathbf{F})$$

$$(\Gamma, r\mathbf{F}) = 0, \quad \mathbf{F}|_{r=1, R} = 0$$

где дифференциальные операторы Γ , M , N , K для гладких векторов $\mathbf{F} = \{\mathbf{V}, T\}$, $\Phi = \{\mathbf{U}, S\}$ определяются равенствами

$$\Gamma \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z}, 0 \right\}$$

$$M\mathbf{F} \equiv \left\{ \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta}, \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}, \Delta v_z, \frac{1}{P} \Delta T \right\}$$

$$N\mathbf{F} \equiv \left\{ Ra\omega_2 T - 2\omega_1 v_\varphi, -g_1 v_r, 0, \frac{g_2}{P} v_r \right\}$$

$$K(\mathbf{F}, \Phi) \equiv \left\{ (\mathbf{F}, \Gamma) u_r - \frac{v_\varphi u_\varphi}{r}, (\mathbf{F}, \Gamma) u_\varphi + \frac{v_r u_\varphi}{r}, (\mathbf{F}, \Gamma) u_z, (\mathbf{F}, \Gamma) S \right\}$$

$$\omega_1 = a + \frac{b}{r^2}, \quad \omega_2 = \omega_1^2 r, \quad g_1 = -\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) (r\omega_1) = -2a, \quad g_2 = \frac{1}{r}$$

Здесь $Ra = \beta c \Theta_1 P$ — число Рэлея.

Исчезающее при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ (λ_0 — критическое значение числа Рейнольдса) решение задачи (2.1) будем искать в виде рядов Ляпунова — Шмидта по

степеням малого параметра $\varepsilon = \sqrt{\lambda - \lambda_0}$ (или $\varepsilon = \sqrt{\lambda_0 - \lambda}$)

$$(2.2) \quad \mathbf{F} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mathbf{F}_k, \quad \Pi = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k, \quad s = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k s_k$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и приравнивая выражения, стоящие при одинаковых степенях ε , получаем рекуррентную цепочку линейных краевых задач

$$(2.3) \quad \left[M - \lambda_0 N + \lambda_0 (s_0 - \omega_1) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \mathbf{F}_k - \Gamma \Pi_k = \lambda_0 \sum_{l=1}^{k-1} \left[K(\mathbf{F}_l, \mathbf{F}_{k-l}) - s_l \frac{\partial \mathbf{F}_{k-l}}{\partial \theta} \right] + \\ + \delta \left[N - (s_0 - \omega_1) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \mathbf{F}_{k-2} + \delta \sum_{l=1}^{k-3} \left[K(\mathbf{F}_l, \mathbf{F}_{k-2-l}) - s_l \frac{\partial \mathbf{F}_{k-2-l}}{\partial \theta} \right]$$

$$(\Gamma, r\mathbf{F}_k) = 0, \quad \mathbf{F}_k|_{r=1, R} = 0, \quad \delta = 1 \quad (\varepsilon = \sqrt{\lambda - \lambda_0}); \quad \delta = -1 \quad (\varepsilon = \sqrt{\lambda_0 - \lambda})$$

При $k=1$ из (2.3) получаем спектральную задачу

$$(2.4) \quad \left[M - \lambda_0 N + \lambda_0 (s_0 - \omega_1) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \mathbf{F}_1 - \Gamma \Pi_1 = 0 \\ (\Gamma, r\mathbf{F}_1) = 0, \quad \mathbf{F}_1|_{r=1, R} = 0$$

Будем предполагать, что разыскиваемый автоколебательный режим периодичен в азимутальном и аксиальном направлениях с заданными периодами $2\pi/m$ и $2\pi/\alpha_0$ соответственно.

Решение задачи (2.4) ищем в виде

$$(2.5) \quad \mathbf{F}_1 = \beta_1 \mathbf{X}_1, \quad \Pi_1 = \beta_1 Q_1 \\ \mathbf{X}_1 = \text{Re } \mathbf{x}_1(r, \theta, z), \quad Q_1 = \text{Re } q_1(r, \theta, z)$$

$$\mathbf{x}_1 = \{u_1(r) \cos \alpha z, v_1(r) \cos \alpha z, w_1(r) \sin \alpha z, \tau_1(r) \cos \alpha z\} e^{im\theta} \\ q_1 = p_1(r) \cos \alpha z e^{im\theta}, \quad \alpha = n\alpha_0$$

Здесь β_1 — неизвестная постоянная (амплитуда автоколебательного режима), m, n — натуральные числа, $m^2 + n^2 \neq 0$.

Подставляя (2.5) в (2.4), получаем спектральную задачу для определения критического значения λ_0 числа Рейнольдса λ , главного члена s_0 разложения циклической частоты s в ряд (2.2) и соответствующих им собственных функций $u_1, v_1, w_1, \tau_1, p_1$:

$$(2.6) \quad \frac{dp_1}{dr} = 2\lambda_0 \omega_1 v_1 - \lambda_0 \text{Ra } \omega_2 \tau_1 - (\gamma_1 - i\gamma_2) u_1 - \frac{im}{r} \left(\frac{dv_1}{dr} + \frac{v_1}{r} \right) - \alpha \frac{dw_1}{dr} \\ \frac{du_1}{dr} = -\frac{u_1}{r} - \frac{im}{r} v_1 - \alpha w_1 \\ (L - \gamma_1 + i\gamma_2) v_1 = imp_1 r^{-1} - (\lambda_0 g_1 + 2imr^{-2}) u_1 \\ (L + r^{-2} - \gamma_1 + i\gamma_2) w_1 = -\alpha p_1, \quad (L + r^{-2} - \gamma_1 + iP\gamma_2) \tau_1 = \lambda_0 g_2 u_1 \\ u_1 = v_1 = w_1 = \tau_1 = 0 \quad (r=1, r=R) \\ L \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}, \quad \gamma_1 = \alpha^2 + \frac{m^2}{r^2}, \quad \gamma_2 = m\lambda_0 (s_0 - \omega_1)$$

Задача, сопряженная с задачей (2.4) относительно скалярного произведения

$$[F, \Phi] = - \int_{-\pi/\alpha_0}^{\pi/\alpha_0} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \int_1^R F \overline{\Phi} r dr d\theta dz$$

имеет вид

$$(2.7) \quad \left[M^* - \lambda_0 N^* - \lambda_0 (s_0 - \omega_1) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] X - \Gamma Q = 0$$

$$(\Gamma, rX) = 0, \quad X|_{r=1, R} = 0$$

Здесь $M^* = M$ (M — самосопряженный оператор), а линейный оператор N^* определяется равенством

$$N^* F = \{g_2 T / P - g_1 v_\varphi, -2\omega_1 v_r, 0, \text{Re } \omega_2 v_r\}$$

Решение задачи (2.7) ищем в виде

$$(2.8) \quad X = \{u(r) \cos \alpha z, v(r) \cos \alpha z, w(r) \sin \alpha z, P_\tau(r) \cos \alpha z\} e^{im\theta}$$

$$Q = p(r) \cos \alpha z e^{im\theta}$$

Подставляя (2.8) в (2.7), нетрудно выписать задачу для определения функций u, v, w, τ, p .

При $k=2$ из (2.3) получаем неоднородную краевую задачу

$$(2.9) \quad \left[M - \lambda_0 N + \lambda_0 (s_0 - \omega_1) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] F_2 - \Gamma \Pi_2 = \lambda_0 \left[K(F_1, F_1) - s_1 \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right]$$

$$(\Gamma, rF_2) = 0, \quad F_2|_{r=1, R} = 0$$

Из условия разрешимости задачи (2.9), согласно [1], получаем $s_1 = 0$.

Решение задачи (2.9) ищем в виде

$$(2.10) \quad F_2 = \beta_2 X_1 + \lambda_0 \beta_1^2 (X_2 + X_0), \quad \Pi_2 = \beta_2 Q_1 + \lambda_0 \beta_1^2 (Q_2 + Q_0)$$

$$X_2 = \text{Re } x_2(r, \theta, z), \quad Q_2 = \text{Re } q_2(r, \theta, z)$$

$$X_0 = x_0(r, z), \quad Q_0 = q_0(r, z)$$

где β_2 — неизвестная вещественная постоянная.

Подставляя (2.10) в (2.9), получаем две неоднородные краевые задачи для определения функций x_2, q_2 и x_0, q_0 :

$$(2.11) \quad [M - \lambda_0 N] x_0 - \Gamma q_0 = \frac{1}{4} K(x_1, \bar{x}_1) + \frac{1}{4} K(\bar{x}_1, x_1)$$

$$(\Gamma, r x_2) = 0, \quad x_2|_{r=1, R} = 0$$

$$(2.12) \quad [M - \lambda_0 N] x_0 - \Gamma q_0 = \frac{1}{4} K(x_1, \bar{x}_1) + \frac{1}{4} K(\bar{x}_1, x_1)$$

$$(\Gamma, r x_0) = 0, \quad x_0|_{r=1, R} = 0$$

Решения задач (2.11), (2.12) ищем в виде

$$(2.13) \quad x_2 = \{u_{2,2}(r) \cos 2\alpha z + u_{2,0}(r), v_{2,2}(r) \cos 2\alpha z + v_{2,0}(r), w_{2,2}(r) \sin 2\alpha z + w_{2,0}(r), \tau_{2,2}(r) \cos 2\alpha z + \tau_{2,0}(r)\} e^{2im\theta}$$

$$(2.14) \quad q_2 = [p_{2,2}(r) \cos 2\alpha z + p_{2,0}(r)] e^{2im\theta}$$

$$x_0 = \{u_{0,2}(r) \cos 2\alpha z + u_{0,0}(r), v_{0,2}(r) \cos 2\alpha z + v_{0,0}(r), w_{0,2}(r) \sin 2\alpha z + w_{0,0}(r), \tau_{0,2}(r) \cos 2\alpha z + \tau_{0,0}(r)\}$$

$$q_0 = p_{0,2}(r) \cos 2\alpha z + p_{0,0}(r)$$

Подставляя (2.13) в (2.11) и (2.14) в (2.12), нетрудно получить четыре неоднородные краевые задачи для определения функций $u_{n,l}, v_{n,l}, w_{n,l}, \tau_{n,l}, p_{n,l}$ ($n, l = 0, 2$). Заметим только, что $w_{2,0} = u_{0,0} = w_{0,0} = 0$.

Зафиксируем решение X сопряженной задачи (2.7), потребовав, чтобы выполнялось условие нормировки

$$\int_1^R (u_1 \bar{u} + v_1 \bar{v} + w_1 \bar{w} + P \tau_1 \bar{\tau}) r dr = 1$$

Из условий разрешимости краевых задач (2.3) при $k=3; 4$ получаем, согласно [1]:

$$\begin{aligned} \lambda_0^2 \beta_1^2 &= \delta \delta_1^2 g, & \beta_2 &= 0, & s_3 &= 0 \\ \lambda_0 s_2 &= -\delta [(\operatorname{Im} I_1 + g \operatorname{Im} I_2) m \alpha_0 / 2\pi^2 + s_0] \\ \delta_1 &= 1 \quad (m \neq 0); & \delta_1 &= \sqrt{3}/2 \quad (m = 0) \\ g &= -\frac{\operatorname{Re} I_1}{\operatorname{Re} I_2}, & I_1 &= \int_{-\pi/\alpha_0}^{\pi/\alpha_0} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \int_1^R \bar{X} N x_1 r dr d\theta dz \end{aligned}$$

(2.15)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\pi/\alpha_0}^{\pi/\alpha_0} \int_{-\pi/m}^{\pi/m} \int_1^R \bar{X} \left[K(x_1, x_0) + K(x_0, x_1) + \frac{1}{2} K(\bar{x}_1, x_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} K(x_2, \bar{x}_1) \right] r dr d\theta dz \end{aligned}$$

Если постоянная g положительна, то ветвление направлено в сверхкритическую область ($\lambda > \lambda_0$) и автоколебания возбуждаются мягко. Если постоянная g отрицательна, то имеет место докритическое ветвление ($\lambda < \lambda_0$) и жесткое возбуждение вторичного режима.

Оба случая ветвления можно описать единообразно, если положить

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{(\lambda - \lambda_0) \operatorname{sign}(g)}, & \beta_1 &= \frac{\delta_1}{\lambda_0} \sqrt{|g|} \\ s_2 &= \left[\left(\frac{\operatorname{Re} I_1 \operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2} - \operatorname{Im} I_1 \right) \frac{m \alpha_0}{2\pi^2} - s_0 \right] \frac{\operatorname{sign}(g)}{\lambda_0} \end{aligned}$$

и находить постоянные g, I_1, I_2 по формулам (2.15).

Если $\operatorname{Re} I_1 \operatorname{Re} I_2 \neq 0$, то при переходе числа Рейнольдса λ через критическое значение λ_0 возникает автоколебательный режим, представимый в виде

$$\begin{aligned} F' &= F_0 + \{V, cPT\}, & \Pi' &= \Pi_0 + \Pi/\lambda \\ F &= \{V, T\} = \varepsilon \beta_1 X_1 + \varepsilon^2 \lambda_0 \beta_1^2 (X_2 + X_0) + O(\varepsilon^3) \\ \Pi &= \varepsilon \beta_1 Q_1 + \varepsilon^2 \lambda_0 \beta_1^2 (Q_2 + Q_0) + O(\varepsilon^3) \\ s &= s_0 + \varepsilon^2 s_2 + O(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

Для исследования расположения спектров устойчивости течений (1.3) и (2.17) применим метод возмущений, обоснование которого содержится в работе [2].

Уравнения бесконечно малых возмущений для течений (1.3) и (2.17) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda(s - \omega_1) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \lambda \sigma \Phi + M \Phi - \lambda N \Phi + \Gamma E &= 0 \\ (\Gamma, r \Phi) &= 0, & \Phi|_{r=1, R} &= 0 \\ \lambda(s - \omega_1) \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} - \lambda \sigma' \Phi' + M \Phi' - \lambda N \Phi' - \Gamma E' &= \end{aligned}$$

(2.18)

$$(2.19) \quad = \varepsilon \lambda_0 \beta_1 [K(\Phi', X_1) + K(X_1, \Phi')] + \varepsilon^2 \lambda_0^2 \beta_1^2 [K(\Phi', X_2 + X_0) + K(X_2 + X_0, \Phi')] + \dots$$

$$(\Gamma, r\Phi') = 0, \quad \Phi' |_{r=1, R} = 0$$

Собственные числа σ и σ' задач (2.18) и (2.19), исчезающие при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, раскладываются в ряды теории возмущений

$$(2.20) \quad \sigma = \sigma_2(\lambda - \lambda_0) + \sigma_4(\lambda - \lambda_0)^2 + \dots$$

$$\sigma' = \sigma_2' \varepsilon^2 + \sigma_4' \varepsilon^4 + \dots, \quad \varepsilon = \sqrt{(\lambda - \lambda_0) \operatorname{sign}(g)}$$

где декременты σ_2 и σ_2' течений (1.3) и (2.17) связаны соотношениями

$$(2.21) \quad \operatorname{Re} \sigma_2 = -\frac{m\alpha_0}{2\pi^2\lambda_0} \operatorname{Re} I_1, \quad \operatorname{Im} \sigma_2 = -\frac{m\alpha_0}{2\pi^2\lambda_0} \frac{\operatorname{Re} I_1 \operatorname{Im} I_2}{\operatorname{Re} I_2}$$

$$\operatorname{Re} \sigma_2' = -\delta_2 \operatorname{Re} \sigma_2 \operatorname{sign}(g), \quad \delta_2 = 1 \quad (m \neq 0); \quad \delta_2 = 2 \quad (m = 0)$$

Применяя далее результаты работ [1, 2], убеждаемся, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Предположим, что is_0 — простое собственное значение задачи (2.6), среди чисел ils_0 (l — целое число, $l \neq \pm 1$) нет собственных значений задачи (2.6), постоянная $\operatorname{Re} \sigma_2$, определяемая равенствами (2.21), положительна и вещественные части постоянных I_1, I_2 , определяемых равенствами (2.15), отличны от нуля.

Тогда течение (1.3) устойчиво при малых докритичностях ($\lambda < \lambda_0$) и неустойчиво при малых сверхкритичностях ($\lambda > \lambda_0$).

При переходе числа Рейнольдса λ через критическое значение λ_0 возникает периодический по времени автоколебательный режим (цикл), представимый в виде рядов Ляпунова — Шмидта (2.17) и единственным образом (с точностью до сдвига вдоль оси цилиндров z и поворота на любой угол φ) определяемый волновыми числами α и m .

Если $g > 0$, то цикл ответвляется в сверхкритическую область и устойчив относительно трехмерных возмущений того же периода. Если $g < 0$, то цикл ответвляется в докритическую область и неустойчив.

Исследовать знаки постоянных $\operatorname{Re} \sigma_2$, g удастся в настоящее время только численно.

3. Численные результаты. Для расчета первых двух членов разложения автоколебательного режима в ряды Ляпунова — Шмидта (2.17) требовалось решить спектральную задачу (2.6), сопряженную задачу и четыре неоднородные краевые задачи для определения компонент векторов x_2, x_0 и функций q_2, q_0 . Каждая из этих шести краевых задач решалась методом «пристрелки» с использованием метода ортогонализации [4, 5] для подавления быстрорастущих решений. Аналогичные вычисления для изотермического случая ($Ra = 0$) были выполнены в [6].

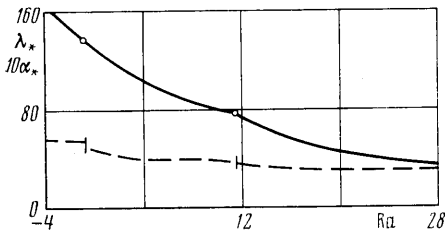
Результаты расчета автоколебательного режима (2.17), ответвляющегося от течения (1.3), для случая $R = 2$ (радиус внешнего цилиндра в два раза больше радиуса внутреннего цилиндра), $\Omega = -0,6$ (цилиндры вращаются в разные стороны), $P = 0,7$ (рабочая среда — воздух) представлены на фиг. 1—4.

Одновременно с расчетом автоколебательного режима вычислялись первые два члена разложения безразмерного момента сил трения, действующих на поверхность внутреннего цилиндра, в ряд Ляпунова — Шмидта

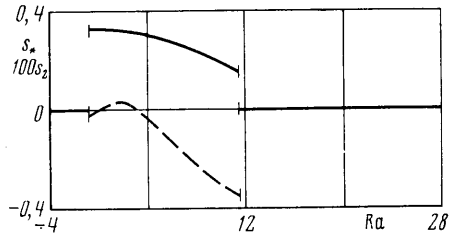
$$(3.1) \quad G = G_0 + \varepsilon^2 G_2 + \dots, \quad \varepsilon = \sqrt{(\lambda - \lambda_0) \operatorname{sign}(g)}$$

$$G_0 = 2b\lambda_0, \quad G_2 = 2b \operatorname{sibn}(g) - \delta_2 \lambda_0^2 \beta_1^2 \left. \frac{dv_{0,0}}{dr} \right|_{r=1}$$

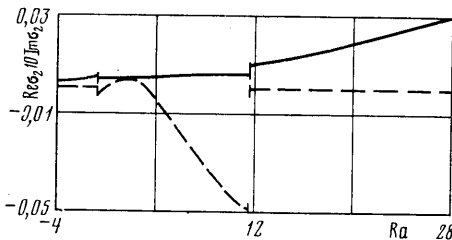
Собственное решение задачи (2.6), определяемое с точностью до произвольного постоянного множителя, нормировалось таким образом, чтобы амплитуда автоколебательного режима β_1 совпадала с моментом сил тре-



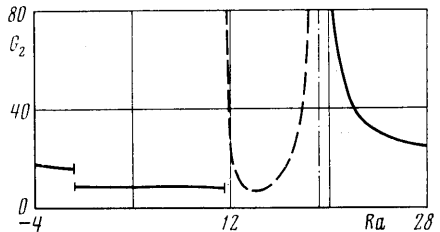
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ния, действующих на поверхность внутреннего цилиндра при $\lambda = \lambda_0$ ($\beta_1 = G_0 = 2b\lambda_0$), при дополнительном условии

$$\int_1^R \operatorname{Im} u_1 r dr = 0$$

Такая нормировка придает постоянной β_1 простой физический смысл.

При вычислениях проводилась численная минимизация критического значения $\lambda_0(m, \alpha)$ числа Рейнольдса по волновым числам m и α , так как потери устойчивости течения (1.3) в экспериментах следует ожидать при

$$\lambda > \lambda_* = \min_{m, \alpha} \lambda_0(m, \alpha) = \lambda_0(m_*, \alpha_*)$$

Соответствующую λ_* циклическую частоту будем обозначать s_* .

На фиг. 1 представлены зависимости критического значения числа Рейнольдса λ_* и аксиального волнового числа α_* от числа Рэлея Ra . Сплошной линией изображена функция $\lambda_*(Ra)$, штриховой — $10\alpha_*(Ra)$.

При $-0,8 < Ra < 11,5$ самыми опасными в классе пространственно периодических возмущений оказались 2π -периодические в азимутальном направлении возмущения ($m_* = 1$), и после потери устойчивости течения (1.3) в экспериментах следует ожидать возникновения автоколебаний. При $Ra < -0,8$ и при $Ra > 11,5$ самыми опасными являются вращательно-симметричные возмущения ($m_* = 0$) и в экспериментах следует ожидать возникновения вторичного стационарного течения. При $Ra = -0,8$ и $11,5$ одинаково опасными являются возмущения с $m_* = 0$ и 1 (у функции $\lambda_0(m, \alpha)$ имеются два глобальных минимума). В этих точках на нейтраль-

ной кривой $\lambda_*(Ra)$ имеются изломы, а функция $\alpha_*(Ra)$ претерпевает разрыв.

На фиг. 2 представлены зависимости от Ra двух первых членов разложения циклической частоты s в ряд (2.17). Сплошной линией изображена функция $s_*(Ra)$, штриховой — $100s_2(Ra)$. При $Ra < -0,8$ и при $Ra > 11,5$ $s_* = s_2 = 0$.

На фиг. 3 представлены результаты расчета декремента σ_2 неизотермического течения Куэтта (1.3). Сплошной линией изображена функция $Re \sigma_2(Ra)$, штриховой — $10 Im \sigma_2(Ra)$.

На фиг. 4 представлена зависимость от Ra второго члена G_2 разложения вращающего момента G в ряд Ляпунова — Шмидта (3.1). Кривая $G_2(Ra)$ изображена сплошной линией в случае сверхкритического ветвления и штриховой линией в случае докритического ветвления. Вертикальная штрихпунктирная линия соответствует значению числа Рэлея $Ra = 19,2$, при котором разложения (2.17) и (3.1) теряют силу в результате обращения в ноль постоянной $Re I_2$.

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, с. 638.
2. Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 450.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
4. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.— Усп. матем. наук, 1961, т. 16, вып. 3, с. 171.
5. Conte S. D. The numerical solution of linear boundary value problems.— SIAM Review, 1966, v. 8, № 3, p. 309.
6. Уринцев А. Л. Расчет автоколебаний типа азимутальных волн, возникающих при потере устойчивости течения вязкой жидкости между концентрическими цилиндрами, вращающимися в разные стороны.— ПМТФ, 1976, № 2, с. 68.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
23.X.1979