УДК 533.93

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ В ТЕОРИИ ДИФФУЗИОННОГО ЭКРАНИРУЮЩЕГО СЛОЯ

ЧЕКМАРЕВ И. Б.

Проблема тонкого диффузионного экранирующего слоя как задача сингулярных возмущений впервые была сформулирована на частном примере сферического поглощающего зонда в покоящемся слабоионизованном газе с замороженными реакциями [1, 2]. В этих же работах были построены асимптотические представления решения задачи. В последующие годы выдвинутые в [1, 2] идеи стали основой многочисленных исследований в области диффузионного экранирующего слоя. Не останавливаясь на характеристике отдельных работ, отметим, что достаточно подробный обзор соответствующих зарубежных исследований имеется в монографии [3], среди отечественных работ следует указать на статьи [4–10]. Необходимо отметить, что в подавляющем большинстве исследований речь идет только о первом члене асимптотических разложений искомых функций. Вопрос о возможности продолжения процесса, т. е. о возможности построения высших приближений, имеющий значительный теоретический интерес [11], для большинства случаев остается открытым. Исключением является исследование [12], где высшие приближения были построены для специфического случая замороженных реакций, когда исходную систему уравнений можно свести к единственному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно напряженности электрического поля. Характер решения для остальных неизвестных величин не рассматривался. В настоящей работе показано, что и при учете процессов ионизации и рекомбинации в газе можно в изотермическом случае построить высшие приближения асимптотических разложений для всех искомых функций.

Задача рассматривается в следующей постановке. Верхнее полупространство $z>0$ над поглощающей электропроводной стенкой $z=0$ заполнено плотным слабоионизованным неподвижным газом, концентрация заряженных частиц n_∞ в котором далеко от стенки определяется процессами ионизации электронами с частотой ν_I и трехчастичной рекомбинации. Температуры электронов T_e и ионов T_i предполагаются постоянными. Поведение заряженных компонентов в неравновесной области около стенки определяется в этом случае одномерными уравнениями сохранения числа частиц, сохранения импульса и уравнениями электродинамики ($\alpha=e,\ i$)

$$\frac{d\Gamma_\alpha}{dz}=\nu_I\left(1-\frac{n_e n_i}{n_0^2}\right)n_e$$

$$kT_\alpha\frac{dn_\alpha}{dz}-e_\alpha n_\alpha E=-\frac{m_\alpha}{\tau_\alpha}\Gamma_\alpha \tag{1}$$

$$\varepsilon_0\frac{dE}{dz}=e(n_i-n_e),\qquad E=-\frac{d\varphi}{dz}$$

Используемые здесь обозначения общеприняты.

Перейдем к безразмерным переменным. Выберем за масштабы длины, плотности заряженных частиц, диффузионных потоков, электрического потенциала и напряженности электрического поля соответственно величины

$$L_0=\left(\frac{D_a}{\nu_I}\right)^{1/2},\qquad n_\infty,\qquad \Gamma_0=\frac{D_a n_\infty}{L_0},$$

$$\varphi_0=\frac{kT_e}{e},\qquad E_0=\frac{kT_e}{eL_0},\qquad D_a=k(T_e+T_i)\frac{\tau_i}{m_i}$$

Тогда исходная система (1) при сохранении прежних обозначений примет вид:

$$\frac{d\Gamma_\alpha}{dz}=n_e-n_e^2n_i$$

$$\frac{dn_e}{dz}+n_eE+(1+\varkappa)\mu\Gamma_e=0$$

$$\varkappa\frac{dn_i}{dz}-n_iE+(1+\varkappa)\Gamma_i=0 \tag{2}$$

$$\delta_m{}^3\frac{dE}{dz}=n_i-n_e,\qquad \frac{d\varphi}{dz}=-E$$

$$\varkappa=\frac{T_i}{T_e},\quad \mu=\frac{\mu_i}{\mu_e},\quad \mu_\alpha=\frac{e\tau_\alpha}{m_\alpha},\quad \delta_m=\frac{l_D}{L_0},\quad l_D=\left(\frac{\varepsilon_0 kT_e}{e^2\delta_m n_\infty}\right)^{1/2}$$

Заметим, что дебаевская длина l_D вводится здесь не как обычно, по плотности частиц n_∞ в невозмущенной области, а по плотности $\delta_m n_\infty$, характерной для пристеночной области экранирующего слоя, что больше соответствует существу рассматриваемых задач. Соответственно этому вводится и местное дебаевское число δ_m.

Граничные условия для системы (2) сформулируем в виде

$$z=0\quad n_e=0,\quad n_i=0,\quad \varphi=0 \tag{3}$$
$$z\to\infty\quad n_e\to 1,\quad n_i\to 1$$

В качестве дополнительного условия, замыкающего систему (2), будем считать заданным текущий на стенку ток

$$j=\Gamma_i-\Gamma_e=\mathrm{const} \tag{4}$$

В дальнейшем рассматривается процедура построения решения системы (2), (4) с граничными условиями (3) в виде асимптотического разложения по степеням параметра δ_m при $\delta_m\to 0$.

Внешнее квазинейтральное разложение системы (2) ищем в виде

$$n_\alpha=n_0+\delta_m n_1+\ldots,\quad \Gamma_\alpha=\Gamma_{\alpha0}+\delta_m\Gamma_{\alpha1}+\ldots \tag{5}$$
$$E=E_0+\delta_m E_1+\ldots,\quad \varphi=A_0\ln\delta_m+\varphi_0+\delta_m\varphi_1+\ldots$$

Подстановка разложений (5) в систему (2) и (4) приводит в нулевом приближении к уравнениям

$$\frac{dn_0}{dz}+n_0E_0+(1+\varkappa)\mu\Gamma_{e0}=0$$

$$\varkappa\frac{dn_0}{dz}-n_0E_0+(1+\varkappa)\Gamma_{i0}=0 \tag{6}$$

$$\frac{d\Gamma_{i0}}{dz}=n_0-n_0{}^3,\qquad \Gamma_{i0}-\Gamma_{e0}=j,\qquad \frac{d\varphi_0}{dz}=-E_0$$

Решение системы (6), удовлетворяющее условию $n_0\to 1$ при $z\to\infty$, имеет вид

$$n_0=\operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{1+\mu}{2}}z+C_0\right),\qquad \Gamma_{i0}=-\frac{1}{1+\mu}\left(\frac{dn_0}{dz}-\mu j\right)$$

$$\Gamma_{e0}=-\frac{1}{1+\mu}\left(\frac{dn_0}{dz}+j\right),\qquad \varphi_0=B_0-\int E_0\,dz \tag{7}$$

$$E_0=\frac{1}{n_0}\left(\frac{1-\varkappa\mu}{1+\mu}\frac{dn_0}{dz}-\frac{\mu(1+\varkappa)}{1+\mu}j\right)$$

Пригодное в области экранирующего слоя внутреннее разложение ищем соответственно в виде

$$n_\alpha=g_\alpha(\eta)=\delta_m g_{\alpha0}+\delta_m{}^2g_{\alpha1}+\ldots,\quad \Gamma_\alpha=G_\alpha(\eta)=G_{\alpha0}+\delta_m G_{\alpha1}+\ldots$$
$$E=\mathrm{E}(\eta)=\frac{1}{\delta_m}\mathrm{E}_0+\mathrm{E}_1+\ldots,\quad \varphi=\Phi(\eta)=\Phi_0+\delta_m\Phi_1+\ldots \tag{8}$$

где $\eta=z/\delta_m$ – погранслойная координата, а для плотности частиц, диффузионного потока, напряженности электрического поля и электрического потенциала в слое приняты обозначения g_α, G_α, Е, Ф. Подстановка разложений (8) в преобразованную к переменной η систему (2) и (4) дает в нулевом приближении уравнения со следующими граничными условиями:

$$\frac{dg_{e0}}{d\eta}+g_{e0}\mathrm{E}_0+(1+\varkappa)\mu G_{e0}=0,\qquad \frac{dG_{e0}}{d\eta}=0$$

$$\varkappa\frac{dg_{i0}}{d\eta}-g_{i0}\mathrm{E}_0+(1+\varkappa)G_{i0}=0,\qquad \frac{dG_{i0}}{d\eta}=0 \tag{9}$$

$$\frac{d\mathrm{E}_0}{d\eta}=g_{i0}-g_{e0},\qquad \frac{d\Phi_0}{d\eta}=-\mathrm{E}_0,\qquad G_{i0}-G_{e0}=j$$

$$\eta=0\quad g_{e0}=0,\quad g_{i0}=0,\quad \Phi_0=0 \tag{10}$$

Условия, недостающие для решения системы (9), а также для определения неизвестных постоянных A_0, B_0, C_0 во внешнем нулевом приближении, получим в результате процедуры асимптотического сращивания внешнего и внутреннего разложений [13]. В результате находим, во-первых, условие $n_0(0)=0$, следствием которого будет $C_0=0$, а также

$$g_{a0}|_{\eta\to\infty}\to\left.\frac{dn_0}{dz}\right|_{z=0}\eta+n_1|_{z=0}$$

$$G_{e0}=\Gamma_{e0}|_{z=0},\quad G_{i0}=\Gamma_{i0}|_{z=0} \tag{11}$$

Соотношения (10) и (11) позволяют теперь получить решение системы (9), а также определить

$$n_1|_{z=0}=n_1(0)=-\frac{\mathrm{E}_{0w}^2}{2(1+\varkappa)},\qquad \mathrm{E}_{0w}=\mathrm{E}_0|_{\eta=0}$$

Процедуру сращивания потенциала рассмотрим более подробно. В области слоя потенциал можно представить как

$$\Phi_0=-\int_0^{\eta^*}\mathrm{E}_0\,d\eta-\int_{\eta^*}^{\eta}(\mathrm{E}_0-\mathrm{E}_0^*)\,d\eta-\int_{\eta^*}^{\eta}\mathrm{E}_0^*\,d\eta$$

$$\eta^*=\frac{1-n_1(0)}{\sqrt{{}^1/_2(1+\mu)}},\qquad \mathrm{E}_0^*=-\frac{(1-\varkappa\mu)\sqrt{{}^1/_2(1+\mu)}-(1+\varkappa)\mu j}{(\sqrt{{}^1/_2(1+\mu)}\,\eta+n_1(0))\,(1+\mu)}$$

Вычисляя последний интеграл, находим

$$\Phi_0=-\int_0^{\eta^*}\mathrm{E}_0\,d\eta-\int_{\eta^*}^{\eta}(\mathrm{E}_0-\mathrm{E}_0^*)\,d\eta+ \tag{12}$$

$$+\frac{(1-\varkappa\mu)\sqrt{{}^1/_2(1+\mu)}-(1+\varkappa)\mu j}{(1+\mu)\sqrt{{}^1/_2(1+\mu)}}\ln(\sqrt{{}^1/_2(1+\mu)}\,\eta+n_1(0))$$

Тогда из условия

$$\lim_{\delta_m\to 0}(A_0\ln\delta_m+\varphi_0-\Phi_0)=0$$

получим

$$A_0=-\frac{(1-\varkappa\mu)\sqrt{{}^1/_2(1+\mu)}-(1+\varkappa)\mu j}{(1+\mu)\sqrt{{}^1/_2(1+\mu)}},$$

$$B_0=-\int_0^{\eta^*}\mathrm{E}_0\,d\eta-\int_{\eta^*}^{\infty}(\mathrm{E}_0-\mathrm{E}_0^*)\,d\eta \tag{13}$$

Для следующего приближения во внешнем разложении получим систему со следующими граничными условиями:

$$\frac{dn_1}{dz}+n_0E_1+n_1E_0+(1+\varkappa)\mu\Gamma_1=0$$

(14)
$$\varkappa \frac{dn_1}{dz} - n_0E_1 - n_1E_0 + (1+\varkappa)\Gamma_1 = 0$$

$$\frac{d\Gamma_1}{dz} = (1-3n_0^2)n_1, \qquad \frac{d\varphi_1}{dz} = -E_1$$

(15)
$$z=0 \quad n_1=n_1(0), \quad z\to\infty \quad n_1\to 0, \quad \Gamma_1\to 0$$

Из (14) для n_1 находим уравнение

$$\frac{d^2n_1}{dz^2} + (1-3n_0^2)n_1 = 0$$

решение которого, удовлетворяющее условиям (15), обладает свойством, что при $z=0$ $dn_1/dz=0$. Далее

(16)
$$\Gamma_1 = -\frac{1}{1+\mu}\frac{dn_1}{dz}, \qquad \varphi_1 = B_1 - \int E_1\,dz$$

$$E_1 = -\frac{1}{n_0}\left(\frac{1-\varkappa\mu}{1+\mu}\frac{dn_1}{dz} + n_1E_0\right)$$

В области экранирующего слоя в первом приближении имеем систему с граничными условиями

(17)
$$\frac{dg_{e1}}{d\eta} + g_{e0}\mathrm{E}_1 + g_{e1}\mathrm{E}_0 + (1+\varkappa)\mu G_1 = 0$$

$$\varkappa\frac{dg_{i1}}{d\eta} - g_{i0}\mathrm{E}_1 - g_{i1}\mathrm{E}_0 + (1+\varkappa)G_1 = 0$$

$$\frac{d\mathrm{E}_1}{d\eta} = g_{i1} - g_{e1}, \qquad \frac{d\Phi_1}{d\eta} = -\mathrm{E}_1, \qquad \frac{dG_1}{d\eta} = 0$$

$$\eta=0, \quad g_{e1}=0, \quad g_{i1}=0, \quad \Phi_1=0$$

Процедура сращивания искомых величин с точностью до $O(\delta_m^2)$ дает $G_1=0$, $B_1=\Phi_1(\infty)$, а также приводит к условиям $g_{i1}-g_{e1}\to 0$, $dg_{e1}/d\eta\to 0$, $\mathrm{E}_1\to 0$ $\eta\to\infty$.

Однородная система (17) с нулевыми граничными условиями имеет тривиальное решение $g_{e1}=g_{i1}=\mathrm{E}_1=\Phi_1=0$. Отсюда следует также, что $B_1=0$.

Естественно, что аналогичным образом могут быть рассмотрены сферический и цилиндрический случаи.

Приведенное выше асимптотическое решение описывает поведение заряженных компонентов в окрестности поглощающего электрода в случае сравнительно слабых процессов ионизации и рекомбинации, когда $l_D \ll L_0$. Поэтому по своим свойствам оно похоже на разложение типа Су – Лэма – Коэна для случая замороженных реакций. Здесь также плотности заряженных частиц в нулевом приближении сращиваются по производной. Рассогласование порядка δ_m устраняется только при учете следующего приближения.

Вторая характерная особенность разложения, также являющаяся следствием незначительного влияния неупругих процессов на распределение плотности заряженных частиц вблизи стенки, заключается в слабой локализации электрического поля в области пограничного экранирующего слоя. Это проявляется в медленном, алгебраическом затухании последнего при $\eta\to\infty$, а также в том, что величина A_0 зависит от плотности электрического тока j. Последнее обстоятельство может препятствовать использованию подобных разложений при рассмотрении соответствующих пространственных задач. Исследование первого приближения помогает не только лучше понять детали сращивания внешнего и внутреннего разложений. Оно позволяет также определить область равномерной пригодности разложения. Действительно, как следует из (16)

$$z\to 0, \quad E = E_0 + \delta_m E_1 + \ldots = E_0\left[1 + O\left(\frac{\delta_m}{z}\right)\right]$$

Отсюда видно, что нулевое приближение справедливо при $z \gg \delta_m$.

В заключение автор выражает свою глубокую благодарность Г. А. Любимову и М. С. Бенилову за весьма полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Su C. H., Lam S. H.* Continuum theory of spherical electrostatic probes.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, № 10, p. 1479.
2. *Cohen I. M.* Asymptotic theory of spherical electrostatic probes in a slightly ionized, collision — dominated gas.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, № 10, p. 1492.
3. *Chung P. M., Talbot L., Touryan K. J.* Electric probes in stationary and flowing plasmas: theory and application, Berlin [a. o.], Springer, 1975, 150 p.
4. *Ястребов А. А.* Точное решение задачи об измерении параметров плотной плазмы при помощи сферического зонда.– Ж. техн. физики, 1972, т. 42, № 4, с. 809.
5. *Ястребов А. А.* О методе решения краевых задач для зонда Ленгмюра в плотной плазме.– Ж. техн. физики, 1972, т. 42, № 6, с. 1143.
6. *Малявин Л. А., Москаленко А. М.* Электрическое поле и структура слабоионизованной плазмы в окрестности большого заряженного тела.– Ж. техн. физики, 1974, т. 44, № 2, с. 311.
7. *Малявин Л. А., Москаленко А. М.* Структура возмущенной зоны в окрестности сильно заряженного тела в слабоионизованной плазме.– Ж. техн. физики, 1974, т. 44, № 2, с. 325.
8. *Бенилов М. С., Тирский Г. А.* Об одном точном решении задачи о проводящей сфере в покоящейся слабоионизованной плазме.– Докл. АН СССР, 1978, т. 240, № 6, с. 1324.
9. *Бенилов М. С., Тирский Г. А.* К расчету электрических эффектов в ионизованном многокомпонентном газе около электропроводящих тел. Метод расщепления.– ПММ, 1979, т. 43, № 2, с. 288.
10. *Панкратьева И. Л., Полянский В. А.* Анализ задачи об электрическом зонде в плотной плазме с разными температурами компонент.– В кн.: Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. М.: Изд-во МГУ, 1979, с. 181.
11. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. *Toba K., Sayano S.* A continuum theory electrostatic probes in a slightly ionized gas.— J. Plasma Phys., 1967, v. 1, № 4, p. 407.
13. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.

Ленинград

Поступила в редакцию 28.III.1979

УДК 624.131+532.529

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНЫ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ С ПРЕГРАДОЙ

ЛЯХОВ А. Г.

Модель многокомпонентной жидкой среды с нелинейными предельными диаграммами сжатия и постоянным коэффициентом вязкости [1] усовершенствована введением коэффициента вязкости, изменяющегося в процессе деформации. На основе новой модели приводится численное решение задачи о распространении создаваемой ударной нагрузкой плоской волны и о взаимодействии ее с неподвижной преградой. Ранее [2] такая задача в случае вязкой среды решалась при линейных диаграммах статического и динамического сжатия и постоянном коэффициенте вязкости.

Показано, что нелинейность диаграммы статического сжатия приводит с возрастанием давления сначала к увеличению коэффициента отражения, а затем к его уменьшению. При достаточной длительности нагрузки в начальном сечении преграда испытывает последовательное воздействие нескольких волн, число которых увеличивается с увеличением длительности и амплитуды нагрузки.

Расчет проводится для глицерина с пузырьками воздуха. Принято, что при давлениях до $400\cdot10^5$ н/м^2 глицерин является линейно-упругой средой. В этом случае динамическая диаграмма сжатия двухкомпонентной среды – глицерин с пузырьками газа – линейна. Уравнение модели выводится из следующих предпосылок.

1. Деформацию двухкомпонентной двухфазной среды можно представить как сумму деформации жидкого и газообразного компонентов

$$V_0-V=\alpha_1 V_0-\alpha_1 V_0 W/W_0+(p-p_0)/A^2 \tag{1}$$

Здесь V, p – удельный объем и давление двухкомпонентной среды, α_1 и α_2 – начальное объемное содержание газообразного и жидкого компонентов, $\alpha_1+\alpha_2=1$; W – объем пузырька газа, $W=4\pi r^3/3$; r – радиус пузырька газа, $A=c_{20}\sqrt{\rho_{20}\rho_0/\alpha_2}$; ρ_{20} – плотность жидкости, для глицерина $\rho_{20}=1,26\cdot10^3$ кг/м^3; c_{20} – скорость звука в жидкости, для глицерина $c_{20}=1925$ м/с; $1/V_0=\rho_0=\rho_{10}\alpha_1+\rho_{20}\alpha_2$; ρ_{10} – плотность газа,