

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
2. Авакян Э. А., Горбунов А. Т., Николаевский В. Н. Нелинейно-упругий режим фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах. В кн.: Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1968, 165-173 с.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 427 с.

Ухта, Москва

Поступила в редакцию
20.VII.1979

УДК 532.594

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ДЕМЕХИН Е. А., ШКАДОВ В. Я.

Исследовано численным методом развитие начальных возмущений в тонком слое вязкой жидкости с течением времени. Показано, что формирующаяся волновая структура проходит через сложные промежуточные формы, такие, как уединенная волна возвышения поверхности и уединенная волна углубления. При больших временах в слое формируется волновой режим, близкий к оптимальному режиму по значению волнового числа. Картина промежуточных волновых форм зависит от начальных данных, конечный результат развития от начальных данных зависит слабо. Течение тонкого слоя вязкой жидкости по твердой плоской поверхности под действием силы тяжести можно описать уравнениями для локальных значений толщины слоя $h(x, t)$ и расхода $q(x, t)$:

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) - \frac{1}{W} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{3}{\text{Re}} \left(\frac{q}{h^2} - h \right) = 0$$

$$W = \rho U_0^2 h_0 / \sigma, \quad \text{Re} = U_0 h_0 / \nu$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, ν — коэффициент вязкости жидкости, U_0, h_0 — характерные скорость и толщина.

Безволновому течению слоя соответствует решение $h=1, q=1$. Наряду с ним при заданном Re существует бесконечное множество стационарных волновых решений, каждое из которых определяется значением волнового числа из интервала $0 < \alpha \leq \alpha_h$. При $\alpha = \alpha_h$ амплитуда волны равна нулю, при $\alpha = \alpha_c$ она достигает максимального значения. Решения для стационарных волн даны в [1, 2], волны, соответствующие α_c , названы оптимальными. Параметры стационарных оптимальных режимов хорошо согласуются с экспериментами [3] при умеренно больших значениях Re. В экспериментах [4] при малых значениях Re получены результаты, не согласующиеся с теорией стационарных нелинейных волн. Рассмотрим влияние нестационарности, различий в начальных условиях возбуждения волн на их последующее развитие.

Уравнения (1) были выведены в [5] и применялись к изучению образования стационарных нелинейных режимов из малых начальных синусоидальных возмущений, определяемых по линейной теории устойчивости. Пусть теперь в начальный момент $t=0$ задано произвольное возмущение $h(x, 0), q(x, 0)$. Исследуем развитие этого возмущения с течением времени. Выберем на отрезке $[-L, L], L = \pi/\Delta\alpha$ полную систему попарно ортогональных функций $\exp(in\Delta\alpha x), n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и разложим h, q в ряды

$$(2) \quad h = \sum_n h_n(t) \exp(in\Delta\alpha x), \quad h_{-n} = \bar{h}_n$$

$$q = \sum_n q_n(t) \exp(in\Delta\alpha x), \quad q_{-n} = \bar{q}_n$$

Чтобы исключить операцию деления в нелинейных членах (1), сделаем замену $f=1/h$, тогда

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = f^2 \frac{\partial q}{\partial x}, \quad f(x, 0) = \frac{1}{h(x, 0)}$$

Будем решать систему уравнений (1), (3) для h , q , f с начальными условиями. Подставляя (2) в уравнения (1), (3), получаем бесконечную систему для фурье-коэффициентов

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dq_n}{dt} &= -\frac{6}{5} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (q^2 f) \right\}_n + \frac{1}{W} \left\{ h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right\}_n - \frac{3}{\text{Re}} \{qf^2\}_n + \frac{3}{\text{Re}} h_n \\ \frac{dh_n}{dt} &= -inq_n \Delta \alpha, \quad \frac{df_n}{dt} = \left\{ f^2 \frac{\partial q}{\partial x} \right\}_n \end{aligned}$$

Разложение (2) ограничим конечным числом членов N . Величина N определяется по наибольшему значению волнового числа для незатухающих мод α_k , а именно $N\Delta\alpha \sim 2\alpha_k$. Решение (2) удобно рассматривать в системе, перемещающейся с фазовой скоростью волн $c=3+\Delta c$. Для определения Δc представим h_n в виде

$$(5) \quad h_n = \exp(-i\theta_n(t)), \quad \theta_n = \theta_{nr} + i\theta_{ni}$$

Дифференцируя (5) по t , найдем

$$\frac{d\theta_n}{dt} = \frac{i}{h_n} \frac{dh_n}{dt}, \quad \Delta c_n = \left\{ \frac{1}{n\Delta\alpha h_n} \frac{dh_n}{dt} \right\}_{\text{Im}}$$

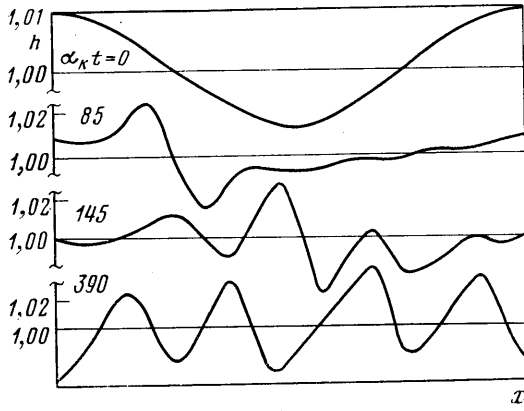
Как показывают расчеты, Δc_n близки по значению при различных n , поэтому принималось $\Delta c = \Delta c_1$. Система (4) интегрировалась численно от заданных начальных значений h_{n0} , q_{n0} , f_{n0} , которые находились с помощью фурье-преобразования функций $h(x, 0)$, $q(x, 0)$, $f(x, 0)$.

Приведем некоторые результаты расчетов при $\text{Re}=2$. На фиг. 1 показано развитие начального синусоидального возмущения поверхности с амплитудой $\epsilon = h_{\text{max}} - h_{\text{min}} = 0.02$, волновым числом $\Delta\alpha = 0.2\alpha_k$, $N=10$. Вначале происходит рост амплитуды возмущений и нелинейное укрупнение его фронта. На этой стадии поверхность слоя напоминает по форме стационарную уединенную волну [2], имеются участки невозмущенной поверхности почти постоянной толщины впереди и позади гребня волны. Затем возмущение переходит в волновой пакет с гладкой поверхностью перед и за пакетом. При дальнейшем увеличении времени развивается волновой режим со слабой нестационарностью, в котором четко выделяется преимущественная мода. Волновое число этой моды $\alpha = 0.8\alpha_k$ соответствует примерно стационарному оптимальному решению, и в этом смысле можно говорить о переходе начального возмущения к регулярному оптимальному режиму.

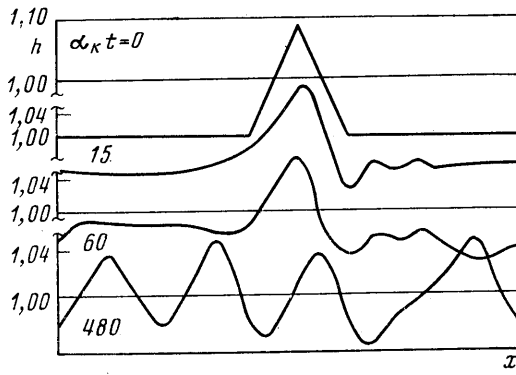
На фиг. 2 показано развитие уединенного возмущения в виде локального возвышения поверхности треугольной формы с амплитудой $\epsilon=0.1$, волновым числом $\Delta\alpha=0.2\alpha_k$, $N=10$. Ширина начального сигнала $\delta=0.2L$ соответствует по порядку величины ширине отрицательного стационарного солитона [2]. На начальной стадии происходит укрупнение передней части сигнала, задняя часть становится более полой, впереди сигнала возникают характерные осцилляции. В течение некоторого времени эта волновая структура, названная в [4] положительным солитоном, сохраняется. В дальнейшем происходит образование волнового пакета и его переход в волны почти регулярного режима с $\alpha \approx 0.8\alpha_k$.

Подобным образом развивается начальное уединенное возмущение в виде локального углубления поверхности. Различие состоит в том, что формируется отрицательный солитон, который затем переходит в волны регулярного режима. Положительный сигнал движется с фазовой скоростью $c > 3$ ($\Delta c = 0.24$), отрицательный сигнал — со скоростью $c < 3$ ($\Delta c = -0.24$). Имеется почти линейная зависимость между амплитудой возмущения и скоростью сигнала, отмечавшаяся в экспериментах [4].

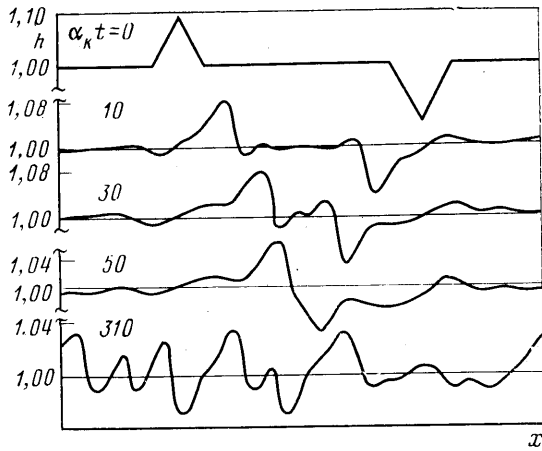
Так как положительные и отрицательные солитоны распространяются с разными скоростями, можно рассмотреть их взаимодействие. Зададим в начальный момент возмущение, составленное из возвышения и углубления поверхности, которые разделены участками постоянной толщины слоя. Пусть амплитуда $\epsilon=0.2$, $\Delta\alpha=0.1\alpha_k$, $\delta_1=\delta_2=0.1L$, $N=20$. Развитие формы поверхности показано на фиг. 3. После столкновения сигналы несколько замедляются, формируется единый волновой пакет, а в дальнейшем постепенно развиваются волны, близкие по α к волнам оптимального режима.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Для малых значений числа Re система уравнений (1) приводится в пределе при $\alpha_h \rightarrow 0$ к одному модельному уравнению

$$(6) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + 2h \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = 0$$

В [6] уравнение такого типа выводилось разложением по α_h . Численные решения уравнения (6) требуют меньше машинного времени, что позволяет увеличить количество гармоник в (2), тем самым повысив точность решения. Расчет развития начальной периодической волны с волновым числом $\alpha = 1,1 \alpha_h$, амплитудой $\epsilon = 0,1$ при $\Delta\alpha = 0,05 \alpha_h$, $N = 40$ показывает ее неустойчивость к возмущениям типа боковых полюсов. В результате устанавливается почти регулярный волновой режим с волновым числом $\alpha \approx 0,8 \alpha_h$. Аналогичные результаты получаются для развития уединенного положительного сигнала при $\epsilon = 0,737$, $\Delta\alpha = 0,05 \alpha_h$, $\delta = 0,2 L$, $N = 40$, для взаимодействия положительного и отрицательного уединенных сигналов при $\epsilon = \pm 0,734$, $\Delta\alpha = 0,025 \alpha_h$, $\delta = 0,1 L$, $N = 80$.

Общим свойством нестационарных решений уравнений (1) и (6) является постепенная перестройка начального возмущения и переход к волновому состоянию, в котором четко прослеживается преимущественная мода. Волновое число этой моды близко по значению к волновому числу оптимального стационарного режима. Эволюция решения проходит через сложные промежуточные состояния, зависящие от формы начального импульса. При малых значениях Re развитие волновых форм происходит медленно, поэтому промежуточные нестационарные состояния могут занимать в эксперименте основную часть времени наблюдения. Эти результаты согласуются качественно с экспериментами по стеканию тонких свободных пленок на вертикальной поверхности [4]. Их можно обобщить и на течения пленок жидкости под воздействием граничного потока газа, так как уравнения движения в этом случае [7] несущественно отличаются от системы (1).

Авторы благодарят А. А. Бунова за помощь в проведении расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
2. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1.
3. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. — ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2.
4. Накоряков В. Е., Покусавев Б. Г., Троян Е. Н., Алексеенко С. В. Течение тонких пленок жидкости. — В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, 1975.
5. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 2.
6. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3.
7. Есмайль Набиля М., Шкадов В. Я. К нелинейной теории волн в слое вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 4.

Москва

Поступила в редакцию
1.X.1979

УДК 532.62:532.59

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКИХ ТОНКИХ ПЛЕНОК

ДЕЙЧ М. Е., ТЕТЕРА И. П.

В статье представлены корреляционные и спектральные характеристики волновых процессов на поверхности тонких жидких пленок, движущихся под действием потока газа в плоском горизонтальном канале постоянного сечения. Исследование проведено на воздушно-водяной смеси при нормальных условиях на участке стабилизированного течения пленки [1] в диапазоне чисел Рейнольдса пленки и газа $Re_l = 30-600$, $Re_{xg} = (1,6-8,5) \cdot 10^5$, где

$$(1) \quad Re_l = \frac{Q}{v_l} = \frac{\langle h \rangle v}{v_l}, \quad Re_{xg} = \frac{U_0 x}{v_g}$$

Здесь Q — объемный расход жидкости на единицу ширины пленки, $\langle h \rangle$ — средняя толщина пленки, v — среднерасходная скорость жидкости, v_l — кинематическая