

УДК 532.546+517.946

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ФИЛЬТРАЦИИ В СРЕДАХ С «ДВОЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ»

АМЕТОВ И. М., КАПЦАНОВ Б. С.

Фильтрация жидкости в трещиновато-пористом пласте имеет целый ряд особенностей по сравнению с фильтрацией в пористой среде. При рассмотрении движения жидкости в средах с «двойной пористостью» приходится решать систему дифференциальных уравнений параболического типа. Однако если в линейном случае не возникает особых трудностей [1], то при учете зависимости параметров пласта и жидкости от давления нахождение точного решения становится невозможным. В связи с этим в ряде работ (см., например, [2]) предлагаются различные приближенные методы, но нет критериев, позволяющих судить о точности этих методик расчета.

В настоящей работе описывается метод построения оценок решения системы нелинейных дифференциальных уравнений параболического типа. Полученные оценки можно использовать и для определения интервалов применимости того или иного приближенного метода, и для определения точности этих методов.

Основным свойством решения уравнений параболического типа является принцип максимума [3] в слабой или сильной форме. Существование такого свойства позволяет доказать и использовать в случае общего параболического уравнения важную в приложениях теорему сравнения решений.

В предлагаемой работе эти результаты распространяются на систему двух параболических уравнений, которая имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial u_l}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik}^{(l)}(x, t) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) - (-1)^l \alpha_l f(u_1, u_2, x, t) \quad (l=1, 2)$$

причем для функций $a_{ik}^{(l)}(x, t)$ $l=1, 2$ выполняется условие параболичности [3]. Предполагается, что имеет место теорема существования решений системы (1). Рассматриваются классические решения, функции $a_{ik}^{(l)}$ непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам. Функция $f(r_1, r_2, r_3, r_4)$ непрерывна по двум последним аргументам и непрерывно дифференцируема по первым двум, при этом должны выполняться следующие условия:

$$(2) \quad \begin{aligned} f_{r_1} \leq 0; \quad f_{r_2} \geq 0, \quad f(r_1, r_2, r_3, r_4) \neq 0, \quad r_1 \neq r_2 \\ f(r_1, r_1, r_3, r_4) = 0, \quad \max |f_{r_1}, f_{r_2}| \leq M_1 \end{aligned}$$

Для решений системы (1) имеет место принцип максимума в следующей форме.

Пусть D — $(n+1)$ -мерная область, ограниченная областью B_0 ($t=0$), областью B_T ($t=T$) и цилиндрической поверхностью $\Gamma(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Пусть функции $u_i(x, t)$ удовлетворяют системе (1) при $(x, t) \in D+B_T$. Тогда экстремальные значения пары (u_1, u_2) достигаются на части $B_0 + \Gamma$ границы области D .

Доказательство проведем от противного для максимального значения. Пусть максимальное значение пары (u_1, u_2) достигается в $D+B_T$ в точке (x_i, t_i) . Не ограничивая общности, достаточно показать справедливость теоремы в следующих трех случаях: а) максимальное значение достигается внутри области функцией u_1 ; б) максимальное значение достигается внутри области функцией u_2 ; в) максимальное значение пары (u_1, u_2) достигается внутри области обеими функциями в точках (x_i, t_i) .

Пусть осуществляется случай а). В точке (x_1, t_1) имеем $\partial u_1 / \partial t \geq 0$, $\partial u_1 / \partial x_i = 0$. Производя соответствующее преобразование координат, приводящее квадратичную форму $a_{ik}^{(1)} \xi_i \xi_k$ в точке (x_1, t_1) к каноническому виду, получим

$$a_{ik}^{(1)}(x_1, t_1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_k} \leq 0$$

Учитывая первое уравнение системы (1), отсюда и из (2) имеем $u_1(x_1, t_1) = u_2(x_2, t_2)$. Это противоречит сделанному предположению а).

Рассуждая аналогичным образом и используя второе уравнение системы (1), можно показать справедливость теоремы и в случае б).

Перейдем к рассмотрению последнего пункта в). В соответствии с предыдущим нетрудно получить, что максимальное значение функций (u_1, u_2) достигается в одной точке

$$(x_1, t_1) = (x_2, t_2) = (x^*, t^*), \quad \sup_{D+B_T} u_l = M = u_l(x^*, t^*), \quad l=1; 2$$

Пусть $\sup_{\Gamma+B_0} (u_1, u_2) = m < M$. Введем в рассмотрение функции $v_l = u_l + \varepsilon(t^* - t)$, $\varepsilon = (M - m)/2T$, $l=1; 2$. Легко получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} < \frac{\partial}{\partial x_k} \left[a_{ik}^{(l)}(x, t) \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right] - (-1)^l \alpha_{lf}(v_1 - \varepsilon(t^* - t), v_2 - \varepsilon(t^* - t), x, t) \quad (l=1; 2)$$

Далее имеем

$$\sup_{D+B_T} (v_1, v_2) \geq M, \quad \sup_{\Gamma+B_0} (v_1, v_2) \leq \frac{M+m}{2}$$

Поэтому функции $v_i(x, t)$ достигают своих максимальных значений соответственно в некоторых внутренних точках $(y_i, \tau_i) \in D+B_T$. Не ограничивая общности, можно положить, что

$$(3) \quad v_1(y_1, \tau_1) \geq v_2(y_2, \tau_2)$$

Из необходимых условий максимума функции v_1 в точке (y_1, τ_1) и неравенства (3) следует, что в точке (y_1, τ_1)

$$f(v_1 - \varepsilon(t^* - t), v_2 - \varepsilon(t^* - t), x, t) > 0.$$

Однако (3) в сочетании с (2) дает, что в этой точке $f \leq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Докажем теперь следующую теорему сравнения решений.

Пусть выполняются все условия предыдущей теоремы и функции $u_i(x, t)$, $v_i(x, t)$ удовлетворяют следующим системам неравенств в $D+B_T$:

$$\max_{D+B_T} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right| < M_2$$

$$(4) \quad \frac{\partial u_l}{\partial t} > \frac{\partial}{\partial x_k} \left[a_{ik}^{(l)}(x, t) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right] - (-1)^l \alpha_{lf}(u_1, u_2, x, t) \quad (l=1; 2)$$

$$(5) \quad \frac{\partial v_l}{\partial t} \leq \frac{\partial}{\partial x_k} \left[a_{ik}^{(l)}(x, t) \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right] - (-1)^l \alpha_{lf}(v_1, v_2, x, t) \quad (l=1; 2)$$

Если $u_i > v_i$ ($i=1; 2$) при $(x, t) \in B_0 + \Gamma$, то $u_i > v_i$ ($i=1; 2$) при $(x, t) \in D$.

Для доказательства последней теоремы рассмотрим множество R точек σ в интервале $(0, T)$, таких, что $u_l > v_l$ ($l=1; 2$) для всех $(x, t) \in D$ при $0 \leq t < \sigma$ (это множество обозначим D_σ), при этом достаточно показать, что $\sup \sigma = T$. Предположим, что $\sup \sigma = t_0 < T$. В силу условия теоремы $t_0 > 0$. В области D_{t_0} имеем $u_i \geq v_i$. Отсюда, используя условие (2), из неравенств (4), (5) получаем

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} > \frac{\partial}{\partial x_k} \left[a_{ik}^{(l)}(x, t) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right] - (-1)^l \alpha_{lf}(u_1, u_2, x, t)$$

(6)

$$\frac{\partial v_l}{\partial t} \leq \frac{\partial}{\partial x_k} \left[a_{ik}^{(l)}(x, t) \frac{\partial v_l}{\partial x_i} \right] - (-1)^l \alpha_{lf}(v_1, v_2, x, t)$$

$$\min_D \left| \left(\frac{\partial u_l}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\quad \right] \right), \left(\frac{\partial v_l}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\quad \right] \right) \right| = \varepsilon$$

Выбирая $\Delta = \varepsilon/2M_1M_2$, получим, что данные неравенства справедливы в области $D_{t_0+\Delta}$.

Применяя теорему сравнения Вестфала (см., например, [3]) к неравенствам (6), получаем, что в области D_{t_0} $u_i > v_i$. Следовательно, $\sup \sigma = T$, что и доказывает теорему.

Аналогичным образом доказывается и следующая теорема.

Пусть все условия предыдущей теоремы остаются без изменений, кроме последнего, которое заменяется на следующее:

$$u_i > v_i, \quad (x, t) \in B_0$$

$$(7) \quad \frac{\partial u_i}{\partial \gamma} + \beta(x, t, u_i) < \frac{\partial v_i}{\partial \gamma} + \beta(x, t, v_i), \quad (x, t) \in \Gamma \quad (l=1; 2)$$

где $\beta(x, t, r)$ — любая функция, производная $\partial/\partial\gamma$ от искомым функций определена в соответствии с [3] и существует.

Тогда $u_l > v_l$ ($l=1; 2$) при $(x, t) \in D$.

Проиллюстрируем применение доказанных выше теорем на примере задачи о фильтрации жидкости в средах с «двойной пористостью» с учетом экспоненциальной зависимости параметров пласта и жидкости от давления. При предположении о том, что пористость трещин и проницаемость блоков пренебрежимо малы по сравнению с пористостью блоков и проницаемостью трещин соответственно, имеем [2]

$$(8) \quad \kappa \Delta u_1 + \frac{1}{\tau} (u_2 - u_1^n) = 0, \quad -\frac{1}{\tau} (u_2 - u_1^n) = \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

$$u_1 = e^{-\alpha_1(p_0 - p_1)}, \quad u_2 = e^{-\alpha_2(p_0 - p_2)}, \quad 0 < n = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \leq 1, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

Здесь индекс 1 относится к трещинам, а 2 — к блокам, p — текущее давление, p_0 — начальное давление в системе.

Рассмотрим задачу о пуске центральной скважины с постоянным дебитом q в радиально-симметричном пласте радиуса R . Граничные и начальные условия имеют вид

$$(9) \quad r=r_c: r \frac{\partial u_1}{\partial r} = -\lambda = -\frac{q\mu_0\alpha_1}{2\pi K_{10}h}, \quad r=R: u_1 = u_2 = 1$$

$$t=0: u_1 = u_2 = 1$$

где μ_0 — вязкость жидкости при начальном давлении p_0 , h — мощность пласта, K_{10} — проницаемость трещин при давлении p_0 , r_c — радиус скважины.

В работе [2] решалась аналогичная задача в случае бесконечного пласта. Полученное решение линеаризованной системы не зависит от параметров n и λ .

Введем новые функции $u_l = 1 + \lambda v_l(r, t)$ ($l=1; 2$). Нетрудно показать, что функции $v_l(r, t)$ положительны и система уравнений (8), (9) переписывается следующим образом:

$$(10) \quad \kappa \Delta v_1 + \frac{1}{\tau} \left[v_2 - \frac{(1 + \lambda v_1)^{n-1}}{n\lambda} \right] = 0$$

$$-\frac{1}{\tau} \left[v_2 - \frac{(1 + \lambda v_1)^{n-1}}{n\lambda} \right] = \frac{\partial v_2}{\partial t}$$

$$(11) \quad t=0: v_2=0; \quad r=R: v_2=v_1=0; \quad r=r_c: r \frac{\partial v_1}{\partial r} = -1$$

Очевидно, что $\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(r, t) = \ln R/r$. Учитывая это и положительность функции $v_1(r, t)$, получим следующие неравенства:

$$(12) \quad A v_1(r, t) \leq \frac{(1 + \lambda v_1)^{n-1}}{n\lambda} \leq A v_1(r, t) + B$$

$$A = \frac{(1 + \lambda \ln R/r_c)^{n-1}}{n\lambda \ln R/r_c}, \quad B = \frac{A}{\lambda} \left[1 + \frac{u_0(1-n)-1}{n} \right], \quad u_0 = A^{(1-n)}$$

Доказанные выше теоремы сравнения решений справедливы и в частном случае (10), когда в исходной системе дифференциальных уравнений (1) вместо $\partial u_1/\partial t$ стоит нуль. В этом случае в левых частях неравенств (6) и (4), (5) также $\partial u_1/\partial t$ следует заменить на нуль.

Рассмотрим функции $\psi_i(r, t)$ и $\eta_i(r, t)$, удовлетворяющие граничным и начальным условиям (11) и являющиеся решением следующих систем линейных дифференциальных уравнений:

$$(13) \quad \kappa \Delta \psi_1 + \frac{1}{\tau} [\psi_2 - A\eta_1^{(0)}] = 0, \quad -\frac{1}{\tau} [\psi_2 - (A\psi_1^{(0)} + B)] = \frac{\partial \psi_2}{\partial t}$$

$$(14) \quad \kappa \Delta \eta_1 + \frac{1}{\tau} [\eta_2 - (A\psi_1^{(0)} + B)] = 0, \quad -\frac{1}{\tau} [\eta_2 - A\eta_1^{(0)}] = \frac{\partial \eta_2}{\partial t}$$

$$\eta_1^{(0)}(r, t) \leq v_1(r, t) \leq \psi_1^{(0)}(r, t)$$

С учетом неравенства (12) и в соответствии с доказанной теоремой сравнения решений функции $\psi_i(r, t)$ и $\eta_i(r, t)$ являются оценками соответственно сверху и снизу решений исходной системы дифференциальных уравнений (10).

В качестве первоначальных оценок для функции $v_i(r, t)$ сверху и снизу можно использовать следующие функции:

$$(15) \quad \eta_i^{(0)}(r, t) = 0, \quad \psi_i^{(0)}(r, t) = \ln R/r$$

Выпишем решение системы дифференциальных уравнений (13) и (14) с учетом зависимости (15) и условия $r_c/R \ll 1$:

$$(16) \quad \begin{aligned} \eta_i^{(1)}(r, t) &= -\ln \xi - a \{ A [1 - \xi^2 + \xi^2 \ln \xi] + B [1 - \xi^2] \}, \quad a = \frac{R^2}{4\kappa\tau} \\ \psi_i^{(1)}(r, t) &= -\ln \xi + [\ln \xi - \eta_i(r)] e^{-t/\tau} + aB + a^2 A \left\{ (A+B) \left[\frac{3}{4} - \xi^2 + \frac{1}{4} \xi^4 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} A \left[\xi^4 \left(\frac{1}{2} - \ln \xi \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} - aB \xi^2 \\ \xi &= r/R \end{aligned}$$

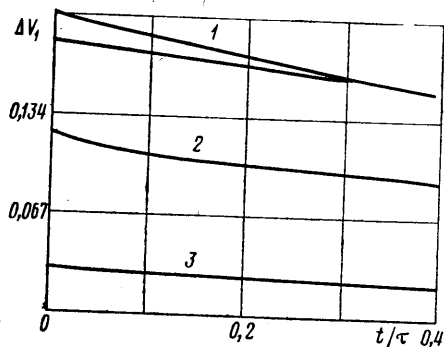
Необходимо отметить, что повторное применение теорем сравнения решений позволяет улучшить оценки решения исходной системы дифференциальных уравнений (10).

Рассмотрим, например, системы дифференциальных уравнений (13), (14), в которых в качестве функций $\eta_i^{(0)}(r, t)$ и $\psi_i^{(0)}(r, t)$ использованы полученные на предыдущем этапе оценки (16).

Аналогично предыдущему нетрудно показать, что соответствующие решения указанных систем $\eta_i^{(2)}(r, t)$ и $\psi_i^{(2)}(r, t)$ также являются оценками снизу и сверху для решений исходной системы дифференциальных уравнений (10), причем

$$\psi_i^{(1)}(r, t) > \psi_i^{(2)}(r, t) \quad \text{и} \quad \eta_i^{(1)}(r, t) < \eta_i^{(2)}(r, t).$$

Таким образом, заменяя в системах (13), (14) функции $\eta_i^{(0)}(r, t)$ и $\psi_i^{(0)}(r, t)$



на рассчитанные оценки решения исходной системы $v_i(r, t)$ соответственно снизу и сверху, получим последовательность улучшающихся оценок для функций $v_i(r, t)$.

В качестве приближенного решения исходной системы дифференциальных уравнений (10) можно использовать функции $v_i(r, t) = \frac{1}{2} [\psi_i(r, t) + \eta_i(r, t)]$.

На фигуре приведены кривые $\Delta v_i = \ln R/r_c - v_i(r_c, t)$, соответствующие различным значениям безразмерного дебита λ ($2 - \lambda = 1$, $3 - \lambda = 10$) при наличии сильной нелинейности ($n = 0,1$), а также отмечена область 1 изменения функции $v_i(r_c, t)$ в линейном случае ($n = 1$).

Все кривые изменения безразмерного давления, приведенные на фигуре, построены для следующих значений параметров: $\kappa\tau = 10^4 \text{ м}^2$, $R = 100 \text{ м}$, $r_c = 0,1 \text{ м}$.

Указанные кривые построены в результате двукратного использования теорем сравнения решений.

Как и следовало ожидать, полученные оценки в линейном случае не зависят от величины безразмерного дебита λ . Однако при наличии сильной нелинейности решение исходной системы уже существенно зависит от параметров n и λ .

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о возможности использования приближенных решений (не зависящих от величин n и λ), полученных в работе [2], лишь при значениях параметра нелинейности n , близких к 1. Интерпретация кривых по этой методике при $n \ll 1$ может привести к значительным ошибкам в величинах определяемых фильтрационных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
2. Авакян Э. А., Горбунов А. Т., Николаевский В. Н. Нелинейно-упругий режим фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах. В кн.: Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1968, 165-173 с.
3. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968, 427 с.

Ухта, Москва

Поступила в редакцию
20.VII.1979

УДК 532.594

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ В СЛОЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ДЕМЕХИН Е. А., ШКАДОВ В. Я.

Исследовано численным методом развитие начальных возмущений в тонком слое вязкой жидкости с течением времени. Показано, что формирующаяся волновая структура проходит через сложные промежуточные формы, такие, как уединенная волна возвышения поверхности и уединенная волна углубления. При больших временах в слое формируется волновой режим, близкий к оптимальному режиму по значению волнового числа. Картина промежуточных волновых форм зависит от начальных данных, конечный результат развития от начальных данных зависит слабо. Течение тонкого слоя вязкой жидкости по твердой плоской поверхности под действием силы тяжести можно описать уравнениями для локальных значений толщины слоя $h(x, t)$ и расхода $q(x, t)$:

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) - \frac{1}{W} h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{3}{\text{Re}} \left(\frac{q}{h^2} - h \right) = 0$$

$$W = \rho U_0^2 h_0 / \sigma, \quad \text{Re} = U_0 h_0 / \nu$$

Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, ν — коэффициент вязкости жидкости, U_0, h_0 — характерные скорость и толщина.

Безволновому течению слоя соответствует решение $h=1, q=1$. Наряду с ним при заданном Re существует бесконечное множество стационарных волновых решений, каждое из которых определяется значением волнового числа из интервала $0 < \alpha \leq \alpha_h$. При $\alpha = \alpha_h$ амплитуда волны равна нулю, при $\alpha = \alpha_c$ она достигает максимального значения. Решения для стационарных волн даны в [1, 2], волны, соответствующие α_c , названы оптимальными. Параметры стационарных оптимальных режимов хорошо согласуются с экспериментами [3] при умеренно больших значениях Re. В экспериментах [4] при малых значениях Re получены результаты, не согласующиеся с теорией стационарных нелинейных волн. Рассмотрим влияние нестационарности, различий в начальных условиях возбуждения волн на их последующее развитие.

Уравнения (1) были выведены в [5] и применялись к изучению образования стационарных нелинейных режимов из малых начальных синусоидальных возмущений, определяемых по линейной теории устойчивости. Пусть теперь в начальный момент $t=0$ задано произвольное возмущение $h(x, 0), q(x, 0)$. Исследуем развитие этого возмущения с течением времени. Выберем на отрезке $[-L, L], L = \pi/\Delta\alpha$ полную систему попарно ортогональных функций $\exp(in\Delta\alpha x), n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и разложим h, q в ряды

$$(2) \quad h = \sum_n h_n(t) \exp(in\Delta\alpha x), \quad h_{-n} = \bar{h}_n$$

$$q = \sum_n q_n(t) \exp(in\Delta\alpha x), \quad q_{-n} = \bar{q}_n$$