

4. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.— Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1973, № 25, 192 с.
5. Лышевский А. С. Распыливание топлива в судовых дизелях. Л.: Судостроение, 1971. 248 с.
6. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977. 207 с.
7. Епихин В. Е., Шкадов В. Я. Течение и неустойчивость капиллярных струй, взаимодействующих с окружающей средой.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 50.
8. Wang D. P. Finite amplitude effect on the stability of a jet circular cross-section.— J. Fluid Mech., 1968, v. 34, pt 2, p. 299.
9. Juen Man Chuen. Non-linear capillary instability of a liquid jet.— J. Fluid Mech., 1968, v. 33, pt 1, p. 155.
10. Lafrance P. Nonlinear breakup of a liquid jet.— Phys. Fluids, 1974, v. 17, № 10, p. 1913.
11. Chaudhary K. C., Redekopp L. G. Non-linear capillary instability of a liquid jet.— J. Fluid Mech., 1980, v. 96, pt 2, p. 257.
12. Герценштейн С. Я., Филянд Л. В., Шкадов В. Я. Неустойчивость и образование капель во вращающейся капиллярной струе.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977, с. 172.
13. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3.
14. Rutland D. F., Jameson G. J. A non-linear effect in the capillary instability of liquid jets.— J. Fluid Mech., 1971, v. 46, № 2, p. 267.
15. Герценштейн С. Я., Ромашова Н. Б., Сухоруков А. Н., Чернявский В. М. О моделировании распада струйных течений при наличии внешних возмущений и акустических вибраций.— В кн.: Тез. докл. Всес. конф. «Метрология гидрофизических измерений». М.: Наука, 1980.

Москва

Поступила в редакцию
17.VI.1980

УДК 532.516.5

ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛОБМЕН ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

ОМЕЛЬЧЕНКО К. Г., ТРЕНЕВ М. Г.

Изучается задача о течении и теплообмене жидкости (газа), образованной в результате фазового перехода (плавления или сублимации) при соприкосновении торца стержня с нагреваемой поверхностью. Такого рода задачи возникают, в частности, при охлаждении нагреваемой поверхности с помощью теплот фазовых переходов энергоемких веществ. Решается упрощенная система уравнений тепломассообмена, которая получена путем оценки порядка различных членов уравнений Навье — Стокса аналогично тому, как это делается в работах [1—3]. Выделены определяющие процесс параметры и найдено приближенное аналитическое решение для квазистационарного случая. Дается сравнение порядка аналитического решения с численным, полученным с помощью метода последовательных итераций.

1. Пусть на плоскость $y=0$ со стороны $y<0$ подается тепловой поток q_w ; со стороны $y>0$ к ней прижимается с силой F круглый стержень радиуса R_0 , который под действием теплового потока плавится (сублимирует) с линейной скоростью v_n . Образовавшийся в результате плавления расплав вытекает через зазор h , (фигура). Для математического описания рассматриваемой задачи используется соответствующая система уравнений течения жидкой пленки в окрестности критической точки [2, 3] $\partial T / \partial r = 0$ для квазистационарного случая:

$$r \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial ru}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

(1.1)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

(1.2)

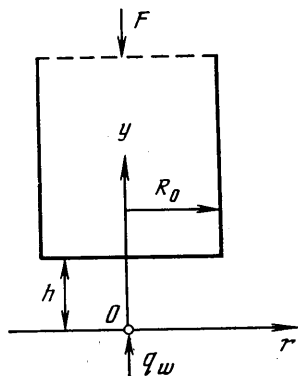
$$y=0: u=0, v=0, \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_w}{\lambda}, \quad y=h: u=0, v=v_n, T=T_n, r=R_0, p=p_0$$

Здесь v , u — составляющие скорости по осям y и r , p — давление, μ , λ , c_p — коэффициенты вязкости, теплопроводности и удельная теплоемкость расплава, зависящие от температуры T , ρ — плотность расплава, принимаемая постоянной. Уравнения и граничные условия (1.1) — (1.2) должны быть дополнены соотношениями, выражающими равновесие сил и условие на плавящейся поверхности (типа Стефана):

$$(1.3) \quad F = 2\pi \int_0^{R_0} (p - p_0) r \, dr,$$

$$q_n = -H\rho v_n - \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{h+0} - \rho c_p v_n T_n$$

Последнее соотношение для квазистационарного случая имеет более простой вид: $q_n = H\rho v_n$. Здесь H — эффективная энтальпия, в рассматриваемом случае равна термодинамической энтальпии при плавлении, T_n — температура фазового перехода (плавления), T_w — температура стенки при $y=0$, q_w — тепловой поток, подходящий к плавящейся стенке со стороны расплава. Последнее соотношение (1.3) удобнее использовать в виде, выражающем общий баланс тепла в рассматриваемом объеме



$$(1.4) \quad H\rho v_n = -q_w + \frac{2}{R_0} \int_0^h \rho c_p u(R_0, y) (T - T_n) dy$$

2. Решение второго уравнения системы (1.1) при граничных условиях (1.2) имеет вид

$$(2.1) \quad u = \frac{dp}{dr} \left[\int_0^y \frac{\xi \, d\xi}{\mu} - \int_0^y \frac{d\xi}{\mu} \int_0^h \frac{\xi \, d\xi}{\mu} / \int_0^h \frac{d\xi}{\mu} \right] = \frac{dp}{dr} f(y, h)$$

Используя (1.1) и (2.1), можно записать выражение для v :

$$(2.2) \quad v = - \left(\frac{1}{r} \frac{dp}{dr} + \frac{d^2 p}{dr^2} \right) \int_0^y f(\eta, h) d\eta$$

Интегрируя первое уравнение системы (1.1) по y и r и используя (2.1) и (2.2) при $y=h$, получим уравнение для нахождения распределения давления

$$(2.3) \quad \frac{d^2 p}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{dp}{dr}$$

решение которого с учетом (1.3) будет

$$(2.4) \quad p = \frac{2F}{\pi R_0^2} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) + p_0$$

Выражения для u , v и v_n примут окончательный вид

$$(2.5) \quad u = \frac{4Fr}{\pi R_0^4} f(y, h), \quad v = -\frac{8F}{\pi R_0^4} \int_0^y f(\eta, h) d\eta, \quad v_n = \frac{8F}{\pi R_0^4} \int_0^h f(\eta, h) d\eta$$

Если предположить, что $\mu = \text{const}$, что имеет место в рассматриваемой задаче для расплавов металлов при небольших перепадах температур, то выражения (2.5) существенно упрощаются

$$(2.6) \quad u = \frac{2F}{\pi R_0^4 \mu} r(hy - y^2), \quad v = -\frac{4F}{\pi R_0^4 \mu} \left(\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right), \quad v_n = -\frac{2F}{3\pi R_0^4 \mu} h^3$$

Уравнение переноса тепла (1.1) позволяет найти распределение температур в расплаве

$$(2.7) \quad T = q_w \int_y^h \frac{1}{\lambda} \exp \left(\int_0^\xi \frac{c_p \rho v}{\lambda} d\eta \right) d\xi + T_n$$

В предположении о постоянстве теплофизических характеристик λ , c_p , μ , ρ решение (2.7) преобразуется

$$(2.8) \quad T = \frac{q_w}{\lambda} \int_y^h \exp \left[- \frac{2F c_p \rho}{3\pi R_0^4 \mu \lambda} \left(h\xi^3 - \frac{\xi^4}{2} \right) \right] d\xi + T_n$$

Таким образом, выражения (2.5), (2.7) или (2.6), (2.8) являются решением исходной системы уравнений (1.1) – (1.2), однако в эти выражения входит неизвестная заранее величина h .

3. Для нахождения величины h воспользуемся балансом энергии (1.4). Вначале определим h в предположении о постоянстве теплофизических характеристик

$$(3.1) \quad q_w = \frac{2H\rho F h^3}{3\pi R_0^4 \mu} + \frac{4F\rho c_p q_w}{\pi R_0^4 \mu \lambda} \int_0^h (h\eta - \eta^2) \times \\ \times \int_\eta^h \exp \left[- \frac{2F c_p \rho}{3\pi R_0^4 \mu \lambda} \left(h\xi^3 - \frac{\xi^4}{2} \right) \right] d\xi d\eta$$

или, вводя в рассмотрение безразмерные параметры α , и β , запишем

$$(3.2) \quad 1 = \alpha_1 \beta + 6\alpha_1 \int_0^1 (\eta - \eta^2) \int_\eta^1 \exp \left(\alpha_1 \frac{\xi^4}{2} - \alpha_1 \xi^3 \right) d\xi d\eta \\ \alpha_1 = \frac{2Fh^4}{3\pi R_0^4 \mu a}, \quad \beta = \frac{H\rho a}{q_w h}, \quad a = \frac{\lambda}{c_p \rho}$$

Раскладывая выражение $\exp(\alpha_1 \xi^4 / 2 - \alpha_1 \xi^3)$ в (3.2) в ряд и используя первые два члена разложения, получим

$$(3.3) \quad \beta = \frac{1}{\alpha_1} - 0,5 + 0,125\alpha_1 - 0,0208\alpha_1^2$$

Одновременно с параметром α_1 целесообразно рассмотреть параметр α , который не содержит h , и параметр γ , получающийся из уравнения (2.8):

$$(3.4) \quad \alpha = \beta \gamma \alpha_1 = \frac{H\rho a}{q_w R_0} \sqrt{\frac{2F}{3\pi \mu a}}, \quad \gamma = 1 - 0,15\alpha_1 + 0,0228\alpha_1^2$$

$$(3.5) \quad h = \frac{H\rho a}{q_w \beta}, \quad \Delta T = T_w - T_n = \frac{q_w h}{\lambda} \gamma$$

Решение уравнения (3.2) в виде зависимости β от α , а также соответствующие значения γ представлены ниже:

α	β	γ	α	β	γ
0	0	0,7534	7	13,45	0,9893
0,05	0,045	0,7605	8	16,19	0,9909
0,1	0,09	0,7675	9	18,39	0,9925
0,2	0,17	0,7900	10	21,73	0,9933
0,4	0,37	0,8390	15	37,5	0,9960
0,6	0,59	0,8730	20	55	0,9973
0,8	0,83	0,8980	25	73,5	0,9980
1,0	1,11	0,9145	30	93,5	0,9984
1,3	1,54	0,9323	40	137,5	0,9988
1,5	1,85	0,9405	50	186,5	0,9991
2,0	2,67	0,9542	60	236,5	0,9993
3,0	4,48	0,9709	70	288,5	0,9994
4,0	6,5	0,9788	80	343	0,9995
5,0	8,7	0,9837	90	402	0,9996
6,0	11,13	0,9893	100	463,5	0,9997

Таким образом, по найденному значению α (3.4) находятся значения β и γ , после чего определяются по формулам (3.5) величины h и ΔT .

Для решения задачи в случае характеристик c_p , λ , μ , зависящих от температуры, необходимо решать совместно уравнения (2.5) и (2.7).

Первоначально определяем из уравнения (1.4) скорость плавления по приближенному соотношению $v_n = -q_w / \rho H$.

Из (2.5) и полученного выражения для v_n , используя предварительное предположение о линейном профиле температур по толщине, с учетом зависимости $\mu(T)$ находим h . Далее определяется T по формуле (2.7) и методом итераций значения h и T . После чего рассчитывается интеграл

$$\frac{2}{R_0} \int_0^h u(R_0, y) (T - T_n) \rho c_p dy$$

представляющий количество тепла, необходимое для нагрева расплава выше температуры плавления T_n , и с использованием (1.4) определяется v_n . Новое приближение рассчитывается по формуле $v_n = 1/2(v_{n0} + v_{n1})$, где v_{n0} — значение скорости плавления с предыдущей итерации. v_n подставляется в формулу (2.5) и снова определяются величины h , T , v_n до сходимости с определенной точностью по v_n . Как показали проведенные расчеты, для получения решения с точностью до 1% требуется 3–5 итераций.

4. Проведен ряд методических расчетов, в которых предполагалось, что расплав имеет следующие теплофизические характеристики: $\lambda = 0,165$ ккал/м·град·с, $c_p = 0,252$ ккал/кг·град, $T_n = 1766$ К, $\rho = 8790$ кг/м³. Внешние условия нагрева и плавления: $F = 10$ кг, $q_w = 6800$ ккал/м²·с, $H = 280$ ккал/кг. Зависимость вязкости μ [кг·с/м²] от температуры T [°К] представлена ниже:

T	1773	1823	1873	1923	1973
$\mu \cdot 10^3$	0,475	0,436	0,392	0,370	0,343

Результаты расчетов величины h , м и ΔT , °К по данной методике, учитывающей зависимость вязкости расплава от температуры, в широком диапазоне R_0 , м представлены ниже:

$R_0 \cdot 10^3$	4,5	7,5	10,5	15	45	75	105
$h \cdot 10^5$	0,639	1,261	1,97	3,16	13,3	25,8	39,2
ΔT	2,7	5,3	8,2	13,2	59	104,3	154
$h \cdot 10^5$	0,64	1,25	1,95	3,14	13,1	25,9	40
ΔT	2,68	5,18	8,13	13,1	58,1	104,4	156

В двух последних строках даны для сравнения соответствующие значения h и ΔT , полученные по приближенным формулам (3.5) для постоянного значения вязкости, взятого при температуре плавления.

Из сравнения приведенных данных следует, что приближенные соотношения (3.5) позволяют с достаточной точностью определять основные параметры теплообмена в зазоре: величину h и перепад температур ΔT .

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Изд-во иностр. лит., 1956, 528 с.
2. Полежаев Ю. В., Юревич Ф. В. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976, 391 с.
3. Турский Г. А. Оплавление тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке газа. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961, т. 1, № 3, с. 481.

Москва

Поступила в редакцию
17.X.1979