

метра  $\eta$  и формы канала протяженность участка с переменной величиной  $f$  и её распределение по  $x$  будет меняться.

В том случае, когда технологические трудности не позволяют осуществить непрерывного распределения  $f(x)$ , предписываемого оптимизацией, целесообразно рассмотреть такую постановку задачи, когда боковые стенки канала состоят из участков, на каждом из которых величина  $f$  постоянна.

В качестве такого примера послужил цилиндрический канал, стенки которого состоят из двух участков, на одном  $f=f^{(2)}$ , на другом  $f=0$ .

На фиг. 1, 2 такому оптимальному каналу соответствуют линии 2. Вдвух осуществляется оптимальным образом в первой половине канала. Для сравнения рассчитывался канал, где вдвух осуществляется во второй половине канала, а первая половина имеет непроницаемые стенки (линии 3 на фиг. 1, 2). На участках с проницаемыми стенками величина  $f=f^{(2)}$  в обоих случаях. Как следует из сравнения величин  $N(x=1)$  на линиях 2 и 3 фиг. 2, выигрыш в  $N$  в оптимальном канале составляет 3,4% при прочих оптимальных параметрах в обоих случаях и без учета ограничения на  $g$  при вдвухе во второй половине. Выигрыш в  $N$  в канале со вдвухом в первой половине по сравнению с каналом без вдвуха составляет 28,6%.

На тех участках канала, где вдвух отсутствовал, теплоотвод в стенку рассчитывался по формуле (1.2), на участках со вдвухом  $q$  полагалось равным нулю.

Таким образом, показано, что оптимальное распределение вдвуха газа через боковые стенки канала дает существенный выигрыш в мощности для плазмотрона постоянного тока с продольно обдуваемой дугой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск: Наука, 1975.
2. Гонопольский А. М., Слободкина Ф. А. Исследование одномерного течения газа в канале плазмотрона. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1.
3. Гонопольский А. М., Даутов А. И., Исмагилов Р. Х., Слободкина Ф. А. О применимости одномерной модели к расчету характеристик плазмотрона. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
4. Гонопольский А. М., Даутов А. И., Исмагилов Р. Х., Слободкина Ф. А. Исследование теплообмена в канале плазмотрона. — Инж.-физ. ж., 1977, т. 33, № 1.
5. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969.
6. Гонопольский А. М., Слободкина Ф. А. Оптимизация плазмотрона постоянного тока с продольно обдуваемой дугой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 6.

Москва

Поступила в редакцию  
19.IX.1979

УДК 532.51.013.4

### НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И РАСПАД КАПИЛЛЯРНЫХ ЖИДКИХ СТРУЙ В СПУТНОМ ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Филианд Л. В.

Решена задача о развитии и взаимодействии нелинейных двумерных возмущений во вращающейся капиллярной струе. Основное внимание уделяется изучению неоднородного распада струи с учетом влияния спутного потока воздуха и вращения. Решение проводилось методом Галеркина [1–3]. Рассмотрено нелинейное развитие и взаимодействие большого числа возмущений. Выявлено существенное воздействие длинноволновой модуляции на характер каплеобразования. Показано, что увеличение скорости спутного потока приводит к уменьшению относительного размера сателлита (для характерных длин волн). Показано также, что вращение расширяет область неустойчивых волновых чисел во всем диапазоне скоростей потока и плотностей воздуха.

Впервые механизм неустойчивости, связанный с силами поверхностного натяжения, был изучен Рэлеем. Задача о влиянии окружающей среды на устойчивость тонкого жидкого цилиндра в линейном приближении рассматривалась в работе Г. И. Петрова и Т. Д. Калининой [4], а также [5–7]. В работах [8–11] при помощи асимптотических разложений по амплитуде до третьего порядка исследовались нелинейные аспекты распада капиллярных струй. С помощью прямых методов показано возникновение второго максимума на поверхности струи [2]. Многомодовые разложения применялись при исследовании неоднородного распада свободной струи в работе [12].

1. Рассматривается бесконечно длинный тонкий цилиндр жидкости плотности  $\rho_1$ , обтекаемый потоком воздуха плотности  $\rho_2$  с поступательной скоростью  $U_2$ .

Вводится цилиндрическая система координат  $r, z, \theta$ . Предполагается, что рассматриваемое течение потенциально. Потенциалы скорости течения в жидкой среде и в воздухе обозначены соответственно  $\Phi_i = \Phi_i(r, z, \theta, t)$ ;  $i=1, 2$ . Потенциалы основного течения представляются в виде  $\Phi_1 = \Gamma\theta / 2\pi$ ,  $\Phi_2 = U_2 z$ .

Задача сводится к решению уравнений Лапласа в струе и в воздухе с обычными граничными условиями

$$(1.1) \quad \Delta\Phi_1=0, \quad 0 < r \leq 1+\eta, \quad \Delta\Phi_2=0, \quad r > 1+\eta, \quad -\infty < z < \infty$$

$$(1.2) \quad \left. \frac{\partial\Phi_i}{\partial r} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial z} \frac{\partial\eta}{\partial z} + U_i \frac{\partial\eta}{\partial z} \right|_{r=1+\eta}, \quad i=1, 2$$

$$(1.3) \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \Phi_{2t} - \Phi_{1t} = \frac{1}{2} [(\Phi_{1r})^2 + (\Phi_{1z})^2] + k - 1 - \\ - \frac{\rho_2}{\rho_1} \left\{ \frac{1}{2} [(\Phi_{2r})^2 + (\Phi_{2z})^2] + U_2 \Phi_{2z} \right\} - W \left[ 1 + \frac{1}{(1+\eta)^2} \right]_{r=1+\eta} \\ k = \frac{1}{(1+\eta z^2)^{1/2}} \left\{ \frac{1}{1+\eta} (1+\eta z^2) - \eta_{zz} \right\}, \quad W = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 V_*^2 a^2}$$

Здесь  $\eta(z, t)$  — возмущенная поверхность,  $a$  — характерный размер (диаметр невозмущенной струи),  $V_* = (T / \rho_1 a)^{1/2}$  — характерная скорость,  $T$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Рассматриваемая задача решалась прямыми методами (метод Галеркина) [1–3]. Решение предполагалось осесимметричным и периодическим по продольной координате

$$(1.4) \quad \Phi_1 = \sum_{n=0}^N I_0(\alpha n r) [A_n^{(1)}(t) \cos \alpha n z + B_n^{(1)}(t) \sin \alpha n z] \\ \Phi_2 = C(t) \ln r + \sum_{n=1}^N K_0(\alpha n r) [A_n^{(2)}(t) \cos \alpha n z + B_n^{(2)}(t) \sin \alpha n z] \\ \eta = \sum_{n=0}^N [\eta_n(t) \cos \alpha n z + \xi_n(t) \sin \alpha n z]$$

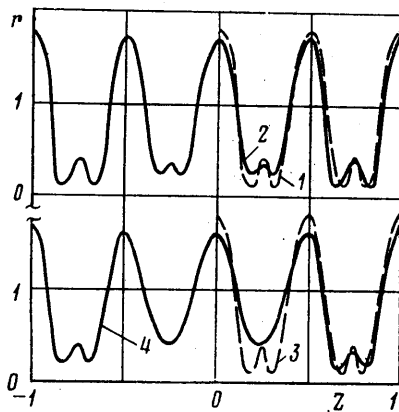
Эти выражения удовлетворяют исходному уравнению Лапласа. Зависимость решения от вертикальной координаты задается только модифицированными функциями Бесселя для струи (так как при  $r=0$   $K_0(r) \rightarrow \infty$ ). Для течения в воздухе решение по  $r$  задается функциями Макдональда (при  $r \rightarrow \infty$   $I_0(r) \rightarrow \infty$ ).

При подстановке решения (1.4) в граничные условия (1.2) и (1.3) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных амплитуд возмущений  $A_n^{(1)}(t), B_n^{(1)}(t), \eta_n(t), \xi_n(t)$ . Формирование такой системы

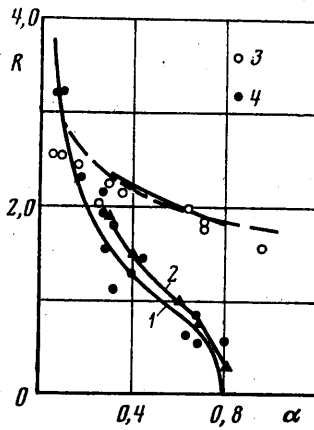
сводится к многократному перемножению тригонометрических рядов, которое выполняется на ЭВМ в общем виде, допускающем произвольное, но конечное число базисных функций. Такая процедура позволяет исследовать нелинейное взаимодействие большого числа возмущений [3]. При этом для малых амплитуд решение совпадает с обычными разложениями по малому параметру [9].

При удовлетворении граничным условиям на возмущенной поверхности  $r=1+\eta(z, t)$  функции Бесселя и Макдональда представлены разложениями в ряд Тейлора

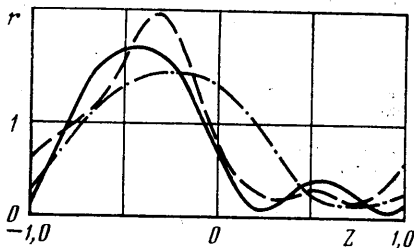
$$(1.5) \quad I_0(\alpha n r) = \sum_{m=0}^M \frac{I_0^{(m)}(\alpha n) (\alpha n)^m}{m!} \eta^m \\ K_0(\alpha n r) = \sum_{m=0}^M \frac{K_0^{(m)}(\alpha n) (\alpha n)^m}{m!} \eta^m$$



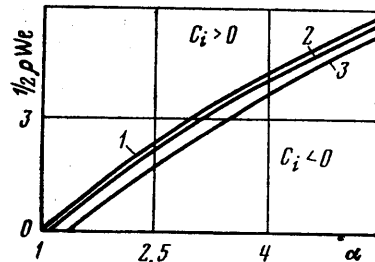
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Второе граничное условие содержит выражение для кривизны, в которое входят члены вида  $1/(1+\eta)$ ,  $1/(1+\eta z^2)^{1/2}$ . Для аппроксимации этих членов первоначально применялось разложение в ряд Тейлора [12]. Использовалась также замена типа  $f=(1+\eta)^{-1}$ ; для  $f$  выписывалось дифференциальное уравнение  $\partial f/\partial t = -f^2\eta$ , которое затем интегрировалось совместно с уравнениями для амплитуд [13, 15]. Сравнение расчетов, проведенных по двум различным способам аппроксимации кривизны, показало, что для малых  $\eta$  они дают полное совпадение результатов. Небольшие различия наблюдаются при  $\eta$ , близких к  $(-1)$ , где разложение в ряд Тейлора оказывается недостаточно точным. Введение такой замены для членов  $1/(1+\eta)$  и  $1/(1+\eta z^2)^{1/2}$  позволяет учесть больше нелинейных членов, а также продвинуться в область больших волновых чисел.

Интегрирование полученной системы дифференциальных уравнений проводилось методом Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шага интегрирования.

2. В численных расчетах учитывалось различное число гармоник при разложении в ряд Фурье, которое менялось в пределах от 4 до 21 гармоники в зависимости от цели расчета.

На начальной стадии численного анализа была проведена серия методических расчетов. Критерием качественно правильного описания распада считалось выполнение соотношения

$$(2.1) \quad |\eta^{(n)} - \eta^{(n-1)}| \leq 10^{-2}$$

где  $\eta^{(n)}$  — форма поверхности, полученная с учетом  $n$  гармоник.

Показано, что необходимое число нелинейных членов разложения с увеличением относительной скорости струи и плотности воздуха возрастает. Объясняется это, по-видимому, тем, что с ростом  $U$  и  $\rho$  максимально растущими становятся более коротковолновые режимы. Например, при скорости  $U=1,2$  м/с быстрее других растет  $\alpha=0,7$ , и расчеты показали, что достаточно учесть пять гармоник в разложении. При скорости  $U=4$  м/с (наиболее растущее по линейной теории возмущение с  $\alpha=1,2$ ) требуется учет семи гармоник для выполнения неравенства (2.1).

Воздействие длинноволновой модуляции на естественные колебания струи может приводить к нарушению упорядоченного разбиения струи на капли. На фиг. 1 кривая 1 соответствует форме поверхности струи, полученной для возмущения с  $\alpha=0,7$  и начальной амплитудой 0,01 ( $U=1,2$  м/с;  $\rho=0,0012$ ;  $N=20$ ). (Горизонтальная ось  $Z=\alpha z/2\pi$  является осью струи.) Видно, что размер как крупной, так и мелкой капель остается постоянным на нескольких характерных длинах волн. Кривой 2 показана форма струи при наложении длинноволнового колебания  $\alpha=0,175$  ( $\eta_1=0,01$ ). При таком распаде сателлиты, перемежающие крупные капли, могут заметно отличаться друг от друга размером. Этот эффект более отчетливо проявляется при больших начальных возмущениях. Кривой 3 соответствует волна с  $\alpha=0,7$  ( $\eta_1=0,1$ ), а кривой 4 — волна с  $\alpha=0,175$  ( $\eta_1=0,05$ ), наложенная на  $\alpha=0,7$  ( $\eta_1=0,1$ ). Описанный результат может служить объяснением широкого разброса в размерах капель, наблюдаемого экспериментально. Расчет для вращающейся ( $W=0,2$ ) струи с характерным  $\alpha=0,9$  ( $\eta_1=0,1$ ) и длинноволновой составляющей  $\alpha=0,18$  ( $\eta_1=0,05$ ) показал, что вращение никак не искажает описанного эффекта воздействия длинных волн на распад струи.

Применяемые многомодовые разложения позволили обнаружить наличие сателлитов в области коротких волн. Например, при  $\alpha=0,8$  ( $\eta_1=0,01$ ;  $N=6$ ) для струи, движущейся со скоростью  $U=1,2$  м/с в воздухе атмосферной плотности, расчетная длина сателлита составляет примерно  $1/5$  длины волны. Сравнение данных расчетов с экспериментом, а также с асимптотическим решением до  $\epsilon^3$  приведено на фиг. 2. Видно (кривая 2), что расчетный размер мелкой капли хорошо (до 10%) соответствует экспериментальным данным [10, 14]. (Значками 3, 4 обозначены размеры крупной и мелкой капель соответственно.) В оценке размера большой капли различие между расчетом и экспериментом еще меньше. С увеличением волнового числа расхождение уменьшается. Отметим, что расчеты с меньшим числом гармоник ( $N=3$ ) оказываются неточными. В частности, они предсказывают [9, 10] однородный распад при  $\alpha=0,8$  ( $\eta_1=0,01$ ) (кривая 1).

В эксперименте при каждой конкретной скорости возникают колебания с определенной длиной волны, которая примерно соответствует максимально растущей по линейной теории. Расчеты, проведенные для характерных длин волн, показали, что при постоянном давлении с увеличением скорости относительный размер капли уменьшается. На фиг. 3 представлены формы поверхности струи вблизи распада для трех разных скоростей движения струи с волновыми числами, характерными для этих скоростей ( $Z=\alpha z/2\pi$ ). Сплошной линией обозначена поверхность струи, движущейся со скоростью  $U=1,2$  м/с, характерное  $\alpha=0,7$ . Штриховая линия соответствует скорости  $U=3$  м/с и  $\alpha=0,9$ , а штрихпунктирная линия —  $U=4$  м/с и  $\alpha=1,2$ . Сопоставление кривых 1–3 иллюстрирует факт убывания сателлита с ростом скорости.

Во всем рассмотренном диапазоне скоростей (0–10 м/с) и плотностей (0–0,01) вращение способствует развитию коротковолновых колебаний и заметно расширяет область неустойчивых волновых чисел. На фиг. 4 построены зависимости  $1/2\rho We = f(\alpha)$  для различных  $W$  [5] ( $We=U^2\rho_1 2a/T$  — безразмерное число Вебера). Кривая 1 ( $C_1=0$ ) соответствует струе без вращения ( $W=0$ ), а кривые 2, 3 ( $C_1=0$ ) —  $W=0,2$ ; 1 соответственно. Видно, что увеличение вращения  $W$  от 0 до 1 приводит к тому, что свободная струя становится неустойчивой по отношению к возмущениям с  $\alpha=1-1,2$ , а водяная струя, обтекаемая потоком воздуха ( $\rho=0,01$ ) со скоростью  $U=5$  м/с,  $a=1$  мм, будет неустойчива к возмущениям с  $\alpha=2,2-2,7$ . Нелинейный анализ ( $N=5-7$ ) сохраняет описанный результат линейной теории. При наличии спутного потока сохраняется тенденция к уменьшению размера сателлитов за счет вращения [12].

Оценим влияние спутного потока воздуха на вынужденные колебания капиллярной струи. Оказывается, относительный размер мелких капель слабо зависит в этом случае от скорости потока и плотности воздуха. Однако форма поверхности струи с увеличением  $U$  и  $\rho$  заметно искажается. «Возвышение» теряет свою синусоидальную форму, становится более острым, а «склоны» его имеют разный угол наклона. Мелкая капля становится более вытянутой вдоль продольной оси.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Г. И. Петрову, В. Я. Шкадову и С. Я. Герценштейну за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. — ПММ, 1940, т. 4, вып. 3, с. 3.
2. Шкадов В. Я., Маркова М. П. О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3, с. 31.
3. Герценштейн С. Я., Шмидт В. М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя. — Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 1, с. 59.

4. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.— Науч. тр. Ин-та мех. МГУ, 1973, № 25, 192 с.
5. Лышевский А. С. Распыливание топлива в судовых дизелях. Л.: Судостроение, 1971. 248 с.
6. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977. 207 с.
7. Епихин В. Е., Шкадов В. Я. Течение и неустойчивость капиллярных струй, взаимодействующих с окружающей средой.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 50.
8. Wang D. P. Finite amplitude effect on the stability of a jet circular cross-section.— J. Fluid Mech., 1968, v. 34, pt 2, p. 299.
9. Juen Man Chuen. Non-linear capillary instability of a liquid jet.— J. Fluid Mech., 1968, v. 33, pt 1, p. 155.
10. Lafrance P. Nonlinear breakup of a liquid jet.— Phys. Fluids, 1974, v. 17, № 10, p. 1913.
11. Chaudhary K. C., Redekopp L. G. Non-linear capillary instability of a liquid jet.— J. Fluid Mech., 1980, v. 96, pt 2, p. 257.
12. Герценштейн С. Я., Филянд Л. В., Шкадов В. Я. Неустойчивость и образование капель во вращающейся капиллярной струе.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977, с. 172.
13. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О нестационарных волнах в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3.
14. Rutland D. F., Jameson G. J. A non-linear effect in the capillary instability of liquid jets.— J. Fluid Mech., 1971, v. 46, № 2, p. 267.
15. Герценштейн С. Я., Ромашова Н. Б., Сухоруков А. Н., Чернявский В. М. О моделировании распада струйных течений при наличии внешних возмущений и акустических вибраций.— В кн.: Тез. докл. Всес. конф. «Метрология гидрофизических измерений». М.: Наука, 1980.

Москва

Поступила в редакцию  
17.VI.1980

УДК 532.516.5

### ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛОБМЕН ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

ОМЕЛЬЧЕНКО К. Г., ТРЕНЕВ М. Г.

Изучается задача о течении и теплообмене жидкости (газа), образованной в результате фазового перехода (плавления или сублимации) при соприкосновении торца стержня с нагреваемой поверхностью. Такого рода задачи возникают, в частности, при охлаждении нагреваемой поверхности с помощью теплот фазовых переходов энергоемких веществ. Решается упрощенная система уравнений тепломассообмена, которая получена путем оценки порядка различных членов уравнений Навье — Стокса аналогично тому, как это делается в работах [1—3]. Выделены определяющие процесс параметры и найдено приближенное аналитическое решение для квазистационарного случая. Дается сравнение порядка аналитического решения с численным, полученным с помощью метода последовательных итераций.

1. Пусть на плоскость  $y=0$  со стороны  $y<0$  подается тепловой поток  $q_w$ ; со стороны  $y>0$  к ней прижимается с силой  $F$  круглый стержень радиуса  $R_0$ , который под действием теплового потока плавится (сублимирует) с линейной скоростью  $v_n$ . Образовавшийся в результате плавления расплав вытекает через зазор  $h$ , (фигура). Для математического описания рассматриваемой задачи используется соответствующая система уравнений течения жидкой пленки в окрестности критической точки [2, 3]  $\partial T / \partial r = 0$  для квазистационарного случая:

$$r \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial ru}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

(1.1)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

(1.2)

$$y=0: u=0, v=0, \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_w}{\lambda}, \quad y=h: u=0, v=v_n, T=T_n, r=R_0, p=p_0$$