

УДК 532.5.011-1 : 538.4

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАСХОДА ГАЗА, ВДУВАЕМОГО
ЧЕРЕЗ БОКОВЫЕ СТЕНКИ КАНАЛА ПЛАЗМОТРОНА ПОСТОЯННОГО ТОКА

ГОНОПОЛЬСКИЙ А. М., СЛОВОДКИНА Ф. А.

Известно, что вдув холодного газа через боковые стенки канала плазмотрона постоянного тока с продольно обдуваемой дугой приводит к увеличению полезной мощности плазмотрона [1]. Увеличение мощности происходит за счет увеличения напряжения горения дуги, а также за счет уменьшения тепловых потоков в стенки канала.

В настоящей работе решается задача об оптимальном распределении расхода газа, вдуваемого через боковые стенки в канал плазмотрона постоянного тока произвольной формы $F(x)$. Течение в основном канале и в протоках боковых стенок описывается квазиодномерными газодинамическими уравнениями, качественно исследованными в [2] и экспериментально обоснованными в [3].

1. Рассмотрим в одномерном приближении стационарное течение электропроводного газа в канале. Вдоль оси канала горит электрическая дуга постоянного тока, продольно обдуваемая газом, втекающим в канал через его начальное сечение и через отверстия в боковых стенках. Через боковые стенки вдувается холодный газ из ресивера, окружающего канал с целью тепловой защиты стенок и для увеличения градиента напряжения вдоль дуги. Полное давление p_1 и энтальпия газа в ресивере считаются постоянными. Вдув газа через боковые стенки осуществляется с малой величиной радиальной составляющей скорости. Предполагается, что за время протекания через стенку газ приобретает ее температуру. Статическое давление на стенке считается равным среднему по сечению канала, энтальпия стенки i известна.

Будем считать, что приэлектродные области дуги находятся вне изучаемого канала и напряженностью собственных магнитных полей можно пренебречь. Ось абсциссов совместим с осью канала, за начало отсчета примем входное сечение канала.

При сделанных предположениях уравнения неразрывности, движения и энергии в осесимметричном канале с учетом джоулевой диссипации, теплообмена со стенками и подвода массы вдоль канала запишутся в виде [2]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} L_1 &= \rho u u' + p' + u g / F = 0 \\ L_2 &= h' + u u' + \frac{g}{\rho u F} \left(h + \frac{u^2}{2} - i \right) - \frac{\eta I^2}{\rho u \sigma F^2} + q = 0 \\ L_3 &= (\rho u F)' - g = 0, \\ g &= g(\rho, h, p_1, i, f, \gamma), \quad \sigma = \sigma(\rho, h), \quad p = p(\rho, h), \\ q &= q(\rho, h, i) \quad \eta = \frac{I^2 i \sqrt{\rho}}{\sigma \cdot p \cdot F \cdot \sqrt{p}} \end{aligned}$$

Здесь ρ , u , p , h , σ — плотность, скорость, давление, энтальпия и электропроводность газа в канале плазмотрона, g — расход вдуваемого газа на единицу длины канала, f — площадь боковой поверхности, по которой производится вдув, отнесенная к площади поперечного сечения F канала (геометрический параметр вдува), i — энтальпия стенки, γ — отношение теплоемкостей газа в ресивере ($\gamma = \text{const}$), I — сила тока в дуге ($I = \text{const}$), η — безразмерный критерий задачи. Штрихом обозначена производная по x . Уравнения (1.1) записаны относительно безразмерных величин. Размерные величины отнесены к соответствующим характерным параметрам, обозначенным внизу звездочкой.

Зависимости функций p , σ , q , g от их аргументов считаются известными. Их выбор определяется свойствами газа, обдувающего дугу. Так, например, для воздуха зависимости p , σ от ρ , h могут быть выбраны так же, как в [2, 3], а для q — как в [4]:

$$(1.2) \quad \sigma = A h^\alpha, \quad p = B \rho h^\beta, \quad q = a H$$

Здесь A, α, B, β — постоянные, a — коэффициент теплообмена со стенками, H — энтальпия торможения газа на оси канала.

Функция g может быть вычислена на основе уравнений одномерного течения газа в канале постоянной площади f с теплоподводом [5]. Граничными условиями при решении этих уравнений являются известные величины давления и энтальпии в сечении, примыкающем к ресиверу, энтальпии стенки канала i и давления p в том сечении основного канала, куда происходит вдув. Дополнительно предположим, что скорость истечения из ресивера мала. Тогда выражение для расхода газа через боковую стенку в данном сечении канала примет вид

$$(1.3) \quad g = f[(p_1 - p)(p_1 + \kappa p)/(2i)]^{1/2} \quad (\kappa = (\gamma + 1)/(\gamma - 1))$$

Будем рассматривать дозвуковые течения в канале плазмотрона. В дополнение к уравнениям (1.1)–(1.3) должны быть заданы два граничных условия во входном сечении плазмотрона ($x=0$) и одно условие в выходном сечении ($x=x_b$).

Будем считать, что при $x=0$ известен расход газа m и его энтальпия h_0 , а при $x=x_b$ задано давление p_∞ среды, куда происходит истечение из плазмотрона. Таким образом

$$(1.4) \quad F\rho u = m, \quad h = h_0 \quad (x=0); \quad p = p_\infty \quad (x=x_b)$$

Уравнения (1.1)–(1.3) и условия (1.4) позволяют рассчитать дозвуковое течение в плазмотроне длиной x_b при силе тока в дуге I и заданных постоянных $m, h_0, p_\infty, i, f, p_1, \eta$. Те из перечисленных величин, которые могут варьироваться в известных пределах, назовем управлениями и сформулируем задачу поиска их оптимальных значений.

2. Пусть задан функционал

$$\int_0^{x_b} \Phi(x, \rho, u, h, f, \dots) dx$$

максимальное значение которого необходимо найти, если управлениями являются x_b, I, h_0, p_∞, g . На управляющие параметры задачи, а также на некоторые параметры течения могут налагаться ограничения. Естественно предположить, что длина канала ограничена некоторой величиной l , значение которой определяется практическим назначением плазмотрона. Источники питания лимитируют величину максимальной силы тока I . Условия существования электрической дуги налагают ограничения на минимальную температуру, а следовательно, энтальпию газа в канале, откуда следует также ограничение на величину вдуваемого через боковые стенки расхода газа $g(x)$. Ограничения по величине $g(x)$ дают пределы изменения геометрического параметра вдува f и давления в ресивере p_1 , которые в свою очередь лимитируются: f — техническими возможностями создания стенок с отверстиями или порами, p_1 — устройствами, нагнетающими газ в ресивер. Величина энтальпии стенки i ограничена свойствами температуростойкости материалов, из которых изготовлен канал. Учитывая сказанное, запишем области существования перечисленных функций в следующем виде:

$$(2.1) \quad 0 \leq x_b \leq 1, \quad 0 < |I| \leq 1, \quad h_0 \geq h_0^{(1)}, \quad p^{(1)} \leq p_\infty \leq p^{(2)}$$

$$g^{(1)} \leq g \leq g^{(2)}, \quad f^{(1)} \leq f \leq f^{(2)}, \quad i \leq i^{(2)}$$

$$h \geq h^{(1)}, \quad p_1 \leq p_1^{(2)}$$

Здесь верхние индексы (1), (2) относятся к минимальному и максимальному значению соответственно. Значения размерных длины канала и силы тока отнесены к их максимальным значениям, поэтому верхним пределом этих величин является 1.

Заметим, что здесь так же, как и в [6] необходимо рассматривать ограничения, связанные с границами применимости квазиодномерного приближения, которые выразятся во введении ограничения на углы сужения и раскрытия канала, а также в ограничении на величину расхода вдуваемого газа. Вопрос об ограничениях на угол раскрытия канала для данной задачи подробно обсуждался в [6], поэтому в этой работе на нем останавливаться не будем, а относительно $g^{(2)}$ предположим, что её величина обеспечивает справедливость уравнений (1.1). Ограничения на $g^{(2)}$ могут быть связаны ещё и с условиями существования дуги, а также с величиной энтальпии на выходе, которая в ряде задач не должна быть меньше некоторого заданного значения.

Функция $g(x)$ может иметь разрывы первого рода и точки этих разрывов d являются точками разрыва производных u' , ρ' , h' , в то время как сами функции u , ρ , h остаются непрерывными.

Решение поставленной задачи оптимизации проводится методом введения переменных множителей Лагранжа $\mu_i(x)$. Составим вспомогательный функционал

$$(2.2) \quad N = \int_0^{x_b} (\Phi + \mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \mu_3 L_3) dx$$

Метод получения необходимых условий максимума и уравнений, определяющих множители Лагранжа, для функционала (2.2) изложен в [6], где построен оптимальный по форме канал и получены условия оптимальности для постоянных, входящих в граничные условия и в уравнения, для плазмотрона без вдува. Используя те же методы, получим условие оптимальности по величине вдува газа через боковые стенки канала плазмотрона

$$(2.3) \quad K \operatorname{sign}(2g - g^{(1)} - g^{(2)}) \geq 0 \quad (g^{(1)} \leq g \leq g^{(2)})$$

$$K = \Phi_g + \mu_1 \frac{u}{F} + \mu_2 \frac{h + 1/2 u^2 - i}{\rho u F} - \mu_3$$

Нижний индекс g означает частную производную по g . Равенство в условии (2.3) выполняется тогда, когда по управлению $g(x)$ реализуется двусторонний экстремум. Если $g(x)$ достигает своего предельного максимального $g^{(2)}$ или минимального $g^{(1)}$ значения, то условие максимума функционала N выполняется и при знаке равенства и при знаке неравенства в (2.3).

Поскольку функция $g(x)$ может иметь разрывы первого рода, выпишем необходимое условие максимума N в точке разрыва d

$$(2.4) \quad X_d = X_d \\ X = \Phi + \mu_1 \frac{ug}{F} + \mu_2 \left[q + g \frac{h + 1/2 u^2 - i}{\rho u F} - \frac{\eta I^2}{\rho u \sigma F^2} \right] - \mu_3 g$$

Нижний индекс d (d_+) означает, что величина X вычислена перед (за) разрывом. Величина вдуваемого расхода пропорциональна площади f , поэтому условия оптимальности по величине f будут отличаться от (2.3) на множитель g_f , который положителен при $g > 0$, т. е.

$$g_f K \operatorname{sign}(2f - f^{(1)} - f^{(2)}) \geq 0 \quad (f^{(1)} \leq f \leq f^{(2)})$$

Необходимые условия максимума N по величине давления в ресивере p_1 и по величине энтальпии стенки i ввиду предположения о постоянстве этих параметров формулируются в виде

$$(2.5) \quad \frac{\partial N}{\partial p_1} = \left(\int_0^{x_b} \frac{\partial g}{\partial p_1} K dx \right) \operatorname{sign}(2p_1 - p_1^{(1)} - p_1^{(2)}) \geq 0 \\ (p_1^{(1)} \leq p_1 \leq p_1^{(2)})$$

$$\frac{\partial N}{\partial i} = \int_0^{x_b} \frac{\partial g}{\partial i} K dx \geq 0 \quad (i \leq i^{(2)})$$

В (2.5) выражение для K то же, что и в (2.3).

Оптимальная длина канала определяется условием

$$(2.6) \quad X_b \geq 0 \quad (x_b \leq 1)$$

Выражение для X здесь то же, что и в (2.4). Нижний индекс b означает, что эта величина вычисляется в выходном сечении канала. В формулах (2.5), (2.6) равенство нулю выполняется тогда, когда по соответствующему управлению максимум достигается внутри области определения управления.

Необходимые условия максимума N по величинам p_∞ , h_0 и I такие же, как и в [6].

3. В качестве примера приводится расчет течения воздуха в канале плазмотрона цилиндрической формы со вдувом, если ищется максимум функционала для функции $\Phi = \eta I^2 / \sigma F$, представляющей собой величину джоулевой диссипации. Управляющими

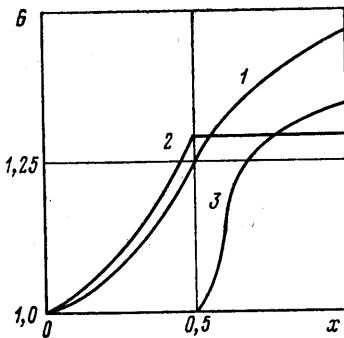
параметрами данной задачи считаются: расход газа через боковые стенки $g(x)$ при заданом давлении в ресивере p_1 , длина канала x_b , энтальпия воздуха h_0 во входном сечении, давление на выходе из плазматрона и сила тока в дуге I .

Постоянные, входящие в уравнения (1.1)–(1.4), выбраны следующим образом:

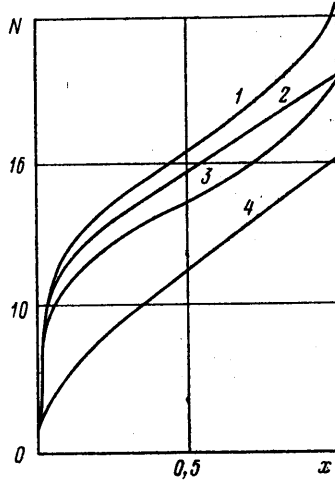
$$\eta=1, A=10^{-4}, \alpha=4, B=1/3, \beta=5/6, m=0,1653, \\ a=0,05, i=0,287, p_1=3/2 p_0, h_0^{(1)}=1, f^{(2)}=10^{-2}, g^{(1)}=0.$$

Энтальпия стенки i соответствует температуре 300°K .

Решение задачи сводится к интегрированию системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений – трех уравнений (1.1) и трех уравнений для множителей



Фиг. 1



Фиг. 2

Лагранжа μ_i при шести граничных условиях, три из которых заданы при $x=0$ и три – при $x=x_b$. Здесь не приводятся уравнения для μ_i' , так как их вид отличается от полученных в [6] только членами, содержащими $g(x)$ и $g'(x)$, принцип вычисления которых известен.

В процессе интегрирования проверяется выполнение необходимых условий максимума (2.3)–(2.6) и в соответствии с ними выбираются управления. Расчеты показали, что оптимальная длина канала и сила тока в дуге равны своим максимально допустимым значениям, т. е. $x_b=1, I=1$, энтальпия воздуха во входном сечении равна своему минимально возможному значению, а оптимальное давление на выходе таково, что истечение должно происходить со скоростью звука.

Оптимальное распределение суммарного расхода воздуха $G=\rho uF/m$ по длине канала представлено на фиг. 1 линией 1. Оказалось, что оптимальная величина площади отверстия в боковой стенке равна своему максимально допустимому значению. Распределение по x величины

$$(3.1) \quad N = \int_0^x \frac{\eta I^2}{\sigma F} dx$$

в канале с оптимальным вдувом представлено на фиг. 2 линией 1. Для сравнения рассчитывался канал без вдува воздуха через боковые стенки при том же расходе в начальном сечении и при всех других оптимальных параметрах. Распределение величины (3.1) в таком канале дано на фиг. 2 линией 4. Видно, что за счет оптимального вдува воздуха через боковые стенки получается выигрыш N , равный 54,6%, по сравнению с каналом без вдува. В этом случае считалось, что верхняя граница по величине расхода вдуваемого газа $g^{(2)}$ внутри канала не достигается.

Если ограничение по g таково, что расход дополнительно вдуваемого газа достигает своего максимально допустимого значения во внутренней точке канала, то оптимальное распределение площади f , через которую осуществляется вдув, будет таким: $f=f^{(2)}$ при $0 \leq x \leq x_c$, а при $x_c \leq x \leq x_d \leq 1$ величина f должна изменяться в соответствии с формулой $g=g(f, p_1, p, \dots)$, например (1.3), чтобы обеспечить $g=g^{(2)}$. Далее снова может появиться участок $f=f^{(2)}$. В зависимости от величины $g^{(2)}$, пара-

метра η и формы канала протяженность участка с переменной величиной f и её распределение по x будет меняться.

В том случае, когда технологические трудности не позволяют осуществить непрерывного распределения $f(x)$, предписываемого оптимизацией, целесообразно рассмотреть такую постановку задачи, когда боковые стенки канала состоят из участков, на каждом из которых величина f постоянна.

В качестве такого примера послужил цилиндрический канал, стенки которого состоят из двух участков, на одном $f=f^{(2)}$, на другом $f=0$.

На фиг. 1, 2 такому оптимальному каналу соответствуют линии 2. Вдвух осуществляется оптимальным образом в первой половине канала. Для сравнения рассчитывался канал, где вдвух осуществляется во второй половине канала, а первая половина имеет непроницаемые стенки (линии 3 на фиг. 1, 2). На участках с проницаемыми стенками величина $f=f^{(2)}$ в обоих случаях. Как следует из сравнения величин $N(x=1)$ на линиях 2 и 3 фиг. 2, выигрыш в N в оптимальном канале составляет 3,4% при прочих оптимальных параметрах в обоих случаях и без учета ограничения на g при вдвухе во второй половине. Выигрыш в N в канале со вдвухом в первой половине по сравнению с каналом без вдвуха составляет 28,6%.

На тех участках канала, где вдвух отсутствовал, теплоотвод в стенку рассчитывался по формуле (1.2), на участках со вдвухом q полагалось равным нулю.

Таким образом, показано, что оптимальное распределение вдвуха газа через боковые стенки канала дает существенный выигрыш в мощности для плазмотрона постоянного тока с продольно обдуваемой дугой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск: Наука, 1975.
2. Гонопольский А. М., Слободкина Ф. А. Исследование одномерного течения газа в канале плазмотрона. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1.
3. Гонопольский А. М., Даугов А. И., Исмагилов Р. Х., Слободкина Ф. А. О применимости одномерной модели к расчету характеристик плазмотрона. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 4.
4. Гонопольский А. М., Даугов А. И., Исмагилов Р. Х., Слободкина Ф. А. Исследование теплообмена в канале плазмотрона. — Инж.-физ. ж., 1977, т. 33, № 1.
5. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969.
6. Гонопольский А. М., Слободкина Ф. А. Оптимизация плазмотрона постоянного тока с продольно обдуваемой дугой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 6.

Москва

Поступила в редакцию
19.IX.1979

УДК 532.51.013.4

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И РАСПАД КАПИЛЛЯРНЫХ ЖИДКИХ СТРУЙ В СПУТНОМ ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Филианд Л. В.

Решена задача о развитии и взаимодействии нелинейных двумерных возмущений во вращающейся капиллярной струе. Основное внимание уделяется изучению неоднородного распада струи с учетом влияния спутного потока воздуха и вращения. Решение проводилось методом Галеркина [1–3]. Рассмотрено нелинейное развитие и взаимодействие большого числа возмущений. Выявлено существенное воздействие длинноволновой модуляции на характер каплеобразования. Показано, что увеличение скорости спутного потока приводит к уменьшению относительного размера сателлита (для характерных длин волн). Показано также, что вращение расширяет область неустойчивых волновых чисел во всем диапазоне скоростей потока и плотностей воздуха.

Впервые механизм неустойчивости, связанный с силами поверхностного натяжения, был изучен Рэлеем. Задача о влиянии окружающей среды на устойчивость тонкого жидкого цилиндра в линейном приближении рассматривалась в работе Г. И. Петрова и Т. Д. Калининой [4], а также [5–7]. В работах [8–11] при помощи асимптотических разложений по амплитуде до третьего порядка исследовались нелинейные аспекты распада капиллярных струй. С помощью прямых методов показано возникновение второго максимума на поверхности струи [2]. Многомодовые разложения применялись при исследовании неоднородного распада свободной струи в работе [12].