МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1981

УДК 538.4

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ФЛОУМЕТРИИ

РУТКЕВИЧ И. М.

К настоящему времени электромагнитный метод измерения расхода крови в сосудах получил довольно широкое распространение [1, 2]. При обработке и интерпретации результатов измерения индуцированной разности потенциалов обычно используется допущение о линейности характеристики электромагнитного расходомера. Это допущение основано на теоретическом выводе о независимости чувствительности расходомера от конкретного вида профиля скорости при осесимметричном течении проводящей жидкости в круглой трубе в однородном магнитном поле [3]. Указанный вывод справедлив только при постоянной проводимости среды и теряет силу в случае неоднородно проводящего потока.

Последовательный учет неоднородностей проводимости при электромагнитном измерении расхода проводящих суспензий (в том числе и крови) требует оценок корреляций между неоднородностями проводимости и скорости. Оценки должны проводиться как для макрокорреляций, обусловленных неоднородными распределениями макроскопической (эффективной) проводимости суспензии и ее средней скорости, так и для микрокорреляций, вызванных различием проводимостей несущей и диспергированной фаз и неоднородностью микротечения жидкости в окрестности отдельной частицы. Обоснование континуальных уравнений электродинамики и вывод осредненного закона Ома с учетом микрокорреляций даны в [4].

Влияние неоднородного радиального распределения проводимости за счет образования пристенного слоя, свободного от эритроцитов (эффекта Фареуса – Линдквиста [5]), на измерение расхода в стационарном течении in vitro исследовалось в [6]. Точное решение задачи о распределении электрического потенциала в круглой трубе с конечными электродами получено в [7] для специального класса радиальных распределений электропроводности.

В данной работе исследуется влияние неоднородного профиля концентрации эритроцитов на чувствительность электромагнитного расходомера в условиях пульсирующего течения. Оценивается роль микрокорреляций и применимость односкоростного приближения в осредненном законе Ома. На основе решения электродинамической краевой задачи получена формула для чувствительности расходомера при произвольном осесимметричном профиле скорости и различных проводимостях ядра потока, пристенного слоя и стенки. Приводится обобщение решения задачи о вязком течении под действием осциллирующего градиента давления [8] на случай двухслойного распределения вязкости. Показано, что наличие пристенного слоя чистой плазмы приводит к сдвигу фаз между колебаниями электрического напряжения и объемного расхода суспензии. Если амплитуда колебаний расхода сравнима с постоянной составляющей, мгновенная чувствительность расходомера резко меняется со временем и характеристика прибора становится существенно нелинейной.

1. Распределения квазистационарного электрического поля $\langle \mathbf{E}\rangle$ и плотности тока $\langle \mathbf{j}\rangle$ в суспензии описываются макроконтинуальными уравнениями электродинамики

$$\operatorname{rot}\langle \mathbf{E}\rangle=0,\quad \operatorname{div}\langle \mathbf{j}\rangle=0 \tag{1.1}$$

Величины в угловых скобках – средние по физически малому объему, содержащему много частиц. Уравнения (1.1) получаются путем осреднения уравнений Максвелла для микрополей с учетом разрывов локальной проводимости и выполняются независимо от величины объемной концентрации и формы движущихся частиц [4]. Для слабоконцентрированной монодисперсной суспензии сфер осредненный закон Ома имеет вид [4]

$$\langle \mathbf{j}\rangle=\sigma_e(\langle \mathbf{E}\rangle+\mathbf{U}_e\times\langle \mathbf{B}\rangle) \tag{1.2}$$

$$\sigma_e=\sigma_f\frac{1+2\varkappa c}{1-\varkappa c},\quad \varkappa=\frac{1-\sigma_*}{1+2\sigma_*},\quad \sigma_*=\frac{\sigma_f}{\sigma_s},\quad \mathbf{U}_e=\langle\mathbf{V}\rangle-\frac{3c(1-c)\varkappa}{2(1+2\varkappa c)}\mathbf{W}$$

$$\mathbf{W}=\langle\mathbf{V}\rangle_f-\langle\mathbf{V}\rangle_s$$

Здесь σ_e — эффективная проводимость по Максвеллу [9], c — объемная концентрация частиц, $\mathbf{W}$ — средняя скорость жидкости относительно частиц (скольжение). Индекс f относится к жидкости, индекс s — к частицам. Для эритроцитов можно принять $\sigma_s=0$, так что

$$\sigma_e=\sigma_f\frac{1-c}{1+{}^1/_2c},\quad \mathbf{U}_e=\langle\mathbf{V}\rangle+\frac{3}{4}c\mathbf{W} \tag{1.3}$$

Применимость формулы Максвелла для расчета эффективной проводимости крови заранее не очевидна, так как эта формула выводится в предположении $c\ll 1$ и не учитывает реальную геометрию эритроцитов. (При малых c вместо (1.3) можно использовать обобщения формулы Максвелла на случай разбавленной суспензии эллипсоидов, полученные рядом авторов (см. обзор [2].) Тем не менее формула (1.3) удовлетворительно согласуется с измеренной в эксперименте зависимостью $\sigma_e(c)$ [6]. Погрешность составляет менее 5% при $c\leqslant 0{,}2$ и увеличивается до 10% при $c=0{,}4$. Это позволяет предположить, что и выражение (1.3) для эффективной скорости $\mathbf{U}_e$, входящей в закон Ома (1.2), будет пригодным для умеренных значений гематокрита.

Влияние микрокорреляций скорости и проводимости выражается разностью между эффективной э.д.с. индукции $\mathbf{U}_e\times\langle\mathbf{B}\rangle$ и средней э.д.с. $\langle\mathbf{V}\rangle\times\langle\mathbf{B}\rangle$. При наличии скольжения $\mathbf{W}$ электрическое напряжение на расходомере, вообще говоря, не будет пропорционально расходу даже при однородном по сечению трубы распределении эффективной проводимости. Для того чтобы вклад микрокорреляционной составляющей в величину измеряемого напряжения был ощутимым, он должен превышать предел точности измерений (1—2%). Тогда при $c\geqslant 0{,}3$ параметр $K=|\mathbf{W}|/|\langle\mathbf{V}\rangle_f|$ должен быть не ниже 0.05.

В тех случаях, когда скольжением можно пренебречь, на чувствительность расходомера, установленного в пульсирующем потоке, будут влиять макрокорреляции эффективной проводимости и скорости.

2. Оценки параметра K в слабоконцентрированной суспензии с одинаковыми массовыми плотностями фаз применительно к различным режимам течений приводят к следующим выводам.

1. Для течения Пуазейля в круглой трубе

$$K\approx{}^4/_3(a/R)^2$$

Здесь и ниже через a обозначен радиус частицы, через R – радиус трубы. При $a=4\cdot 10^{-4}$ см и $R>10^{-2}$ см будет $K<2{,}2\cdot 10^{-3}$, и вклад отставания частиц в сигнал расходомера при $c<0{,}4$ будет меньше 0,07%. Поэтому для развитых течений во всех кровеносных сосудах, кроме капилляров, отставанием частиц можно пренебречь.

2. В трубах, длина которых L удовлетворяет условию $L/R\leqslant 0{,}1\,\mathrm{Re}$, где $\mathrm{Re}=V_fR/\nu_f$ – число Рейнольдса, течение будет неразвитым. Для параметра $K(x)$ в сечении, отстоящем на расстоянии x от входа в трубу, получается оценка

$$K(x)\approx 0{,}1\sqrt{\mathrm{Re}(R/x)}\,(a/R)^2$$

основанная на решении задачи Блазиуса о ламинарном пограничном слое. Если датчик установлен на расстоянии $x\geqslant R$, то десятикратное увеличение K по сравнению с его значением для течения Пуазейля K_P возможно только при $\mathrm{Re}\sim 10^4$. Но даже в этом случае заметного отставания нет, так как столь большие Re достижимы лишь на крупных сосудах, для которых $K_P\sim 10^{-6}$.

3. При течении в трубке переменного сечения и больших Re (стационарные течения в сужающихся сосудах, в местах разветвления и т. п.) скольжение $\mathbf{W}$ определяется градиентом скорости в ядре потока. Оценка для K в этом случае имеет вид

$$K\approx{}^2/_9(a^2/\nu_f)\,|\partial V_f/\partial x|\approx{}^2/_9(a/l)\mathrm{Re}_a,\qquad \mathrm{Re}_a=a\Delta V_f/\nu_f$$

Здесь l — характерная длина изменения сечения, ΔV_f — перепад скорости на этой длине. При $l>2\cdot10^{-2}$ см и $\Delta V_f<40$ см/с будет $K<10^{-2}$, так что в реальных условиях скольжение, вызванное переменностью сечения, также несущественно.

4. Для нестационарных течений, удовлетворяющих условию $8\nu T/R^2\ll1$, где T — характерное время процесса, можно пренебречь трением жидкости о стенку по сравнению с инерцией и прийти к соотношению

$$K\approx {}^2/_9 a^2/(\nu T)$$

Условие $K>4\cdot10^{-2}$ приводит к требованию $T<10^{-4}$ с. Для естественных пульсационных течений in vivo столь высокие частоты могут быть связаны только с ангармонизмом колебаний, и их амплитуды пренебрежимо малы по сравнению с амплитудой основной низкочастотной составляющей поля скоростей. Относительное движение частиц может проявляться в экспериментах по воздействию ультразвука на проводящую суспензию. При частоте колебаний $\sim10^5$ *гц* регистрация расхода электромагнитным методом может приводить к ошибкам в десятки процентов.

5. Эффект скольжения может быть существенным при импульсном возбуждении собственных звуковых мод при воздействии распределенного внешнего давления на боковую поверхность трубки. Такое воздействие возможно за счет внешних механических вибраций установки либо при быстром пережатии сосуда, которое может осуществляться в эксперименте in vivo для проверки реакции датчика на изменение расхода. Для стенки толщиной $\sim0{,}1$ мм, скорость звука в материале которой $\gtrsim10^4$ см/с, время передачи внешнего давления к жидкости будет меньше 10^{-6} с, поэтому включение возмущения можно считать мгновенным. Для трубки длиной 1 см, на концах которой поддерживаются неизменные давления, при эффективной скорости звука $\approx3\cdot10^4$ см/с частота первой гармоники осевых акустических колебаний $\approx1{,}6\cdot10^4$ *гц* и $K=0{,}11$.

Итак, из приведенных оценок следует, что, за исключением специальных случаев высокочастотных и импульсных процессов, в теории электромагнитной флоуметрии можно применять односкоростную гидродинамику. В дальнейшем будем считать $\mathbf{U}_e=\langle\mathbf{V}\rangle$.

3. Проведем расчет величины индуцированного напряжения при осесимметричном течении неоднородно проводящей среды в круглой трубе радиуса R, стенка которой имеет проводимость σ_w и толщину d. Если магнитное поле однородно ($\mathbf{B}=-B\mathbf{e}_z=\mathrm{const}$), а эффективная проводимость и скорость $\mathbf{V}=V\mathbf{e}_x$ зависят только от радиальной координаты r, электрический потенциал $\varphi(y,z)$ определяется из решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{d\ln\sigma_e}{\partial\ln\xi}\right)\frac{\partial\varphi_*}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial\theta^2}=\frac{\sin\theta}{\sigma_e}\frac{d}{d\xi}(\sigma_e u) \tag{3.1}$$

$$\varphi_*=\varphi/(V_0BR),\quad u=V/V_0,\quad \xi=r/R,\quad \operatorname{tg}\theta=y/z$$

$$(\varphi_*)_{\xi=0}=0,\quad \left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial\xi}\right)_{\xi=1-0}=\frac{\sigma_w}{\sigma_e(1)}\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial\xi}\right)_{\xi=1+0},\quad \left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial\xi}\right)_{\xi=1+d/R}=0 \tag{3.2}$$

Здесь и ниже угловые скобки для обозначения макроконтинуальных переменных опущены; φ_* — безразмерный потенциал, V_0 — характерное значение скорости. Предполагается, что на внутренней стенке трубы выполнено условие прилипания. На внешней поверхности трубы отсутствует нормальная плотность тока (электроды считаются точечными и установленными на концах диаметра, перпендикулярного магнитному полю). Зависимость $\varphi_*(\xi,\theta)$ имеет вид $F(\xi)\sin\theta$, где радиальное распределение $F(\xi)$ определяется из некоторого обыкновенного дифференциального уравнения, разрешимого в замкнутой форме для кусочно-степенных зависимостей $\sigma_e(\xi)$ [7].

По определению, чувствительность расходомера S вычисляется по формуле

$$S=\frac{\pi R}{2B}\frac{\Phi}{Q},\quad \Phi=2\varphi\Big|_{\substack{r=R+d\\ \theta=\pi/2}},\quad Q=2\pi\int_0^R V(r)r\,dr \tag{3.3}$$

При наличии эффекта Фареуса — Линдквиста для проводимости можно принять трехслойное кусочно-постоянное распределение

(3.4) $\sigma_e=\sigma_b(0\leqslant\xi<\xi_*),\quad \sigma_e=\sigma_p(\xi_*\leqslant\xi<1),\quad \sigma=\sigma_w(1\leqslant\xi<h)$

Здесь σ_b, σ_p и σ_w — значения электропроводности крови, плазмы и стенки соответственно, $1-\xi_*$ — безразмерная толщина пристенного слоя, $h-1=d/R$ — безразмерная толщина стенки. Приведем выражение для чувствительности, соответствующее точному решению краевой задачи (3.1), (3.2) для распределения (3.4):

$$S=\frac{2h[1+{}^1/_2(\alpha-1)Q_p/Q]}{1-\gamma+(1+\gamma)h^2+{}^1/_2(\alpha-1)[1-\gamma+(1+\gamma)h^2-\xi_*^2\{1+\gamma+(1-\gamma)h^2\}]}\cdot$$

(3.5)

$$\alpha=\frac{\sigma_p}{\sigma_b},\quad \gamma=\frac{\sigma_w}{\sigma_p},\quad \frac{Q_p}{Q}=\int\limits_{\xi_*}^{1}\xi u d\xi\Big/\int\limits_0^1\xi u d\xi$$

В этой формуле Q_p/Q — отношение расхода плазмы в пристенном слое к полному расходу крови через внутреннее сечение трубы. В частном случае однородной проводимости ($\alpha=1$) выражение (3.5) переходит в формулу, приведенную в [3]. В случае $h=1$, отвечающем нулевой толщине стенки,— в формулу работы [6].

4. Влияние макрокорреляций скорости и проводимости на чувствительность расходомера учитывается членом ${}^1/_2(\alpha-1)Q_p/Q$ в формуле (3.5). Если пренебречь зависимостью толщины пристенного слоя от величины расхода (для широкого диапазона значений расхода это допущение согласуется с данными работы [10]), то для течения с постоянным во времени градиентом давления и разными значениями вязкости крови η_b и плазмы η_p чувствительность не будет зависеть от Q. В этом случае характеристика расходомера будет линейной. В [6] рассчитано отношение Q_p/Q для стационарного развитого течения при $\eta_b\neq\eta_p$, и с помощью упрощенного варианта зависимости S от параметров, получаемой из (3.5) при $h=1$, определена зависимость толщины слоя от напряжения трения на стенке τ_w на основе электрических измерений. Эта зависимость оказалась весьма слабой при $c\geqslant0{,}5$.

Для нестационарных инерционных течений отношение Q_p/Q зависит от времени, следовательно, и $S=S(t)$. Между электрическим напряжением и расходом должен возникать сдвиг по фазе, поэтому характеристика расходомера $\Phi(Q)$, получаемая в результате исключения t из зависимостей $\Phi(t)$, $Q(t)$, должна быть нелинейной. Для пульсирующего течения вязкой жидкости в круглой трубе с жесткой стенкой под действием осциллирующего градиента давления $-\partial p/\partial x=A_0+A_\omega\exp(i\omega t)$ величина Q_p/Q может быть рассчитана на основе точного решения нестационарных уравнений Навье — Стокса. Известно классическое решение И. С. Громеки [8] для жидкости с однородной вязкостью. Ниже приводится выражение для комплексной скорости $V(\xi,\,t)$ в случае неоднородной вязкости ($\eta=\eta_b$ при $0<\xi<\xi_*$ и $\eta=\eta_p$ при $\xi_*<\xi<1$)

$$V=\frac{A_\omega}{i\omega\rho}\left[1-C_1\frac{J_0(\chi_b\xi)}{J_{0p}}\right]e^{i\omega t}+\frac{A_0R^2}{4\eta_b}[\xi_*^2(1-\zeta^2)+\zeta^2-\xi^2],\quad(0\leqslant\xi<\xi_*)$$

(4.1)

$$V=\frac{A_\omega}{i\omega\rho}\left[1-\frac{J_0(\chi_p\xi)}{J_{0p}}-C_2\frac{J_{0p}H_0(\chi_p\xi)-H_{0p}J_0(\chi_p\xi)}{J_{0p}}\right]e^{i\omega t}+$$
$$+\frac{A_0R^2}{4\eta_p}(1-\xi^2)\quad(\xi_*\leqslant\xi<1)$$

$$C_1=\frac{(1-\zeta)J_{1p}{}^*(H_{0p}J_{0p}{}^*-J_{0p}H_{0p}{}^*)+J_{0p}(H_{0p}{}^*J_{1p}{}^*-J_{0p}{}^*H_{1p}{}^*)}{H_{0p}(J_{1p}{}^*J_{0b}{}^*-J_{0p}{}^*J_{1b}{}^*)+J_{0p}(H_{0p}{}^*J_{1b}{}^*-H_{1p}{}^*J_{0b}{}^*)}$$

$$C_2=\frac{\zeta J_{0b}{}^*J_{1p}{}^*-J_{1b}{}^*J_{0p}{}^*}{H_{0p}(J_{1p}{}^*J_{0b}{}^*-J_{0p}{}^*J_{1b}{}^*)+J_{0p}(H_{0p}{}^*J_{1b}{}^*-H_{1p}{}^*J_{0b}{}^*)},$$

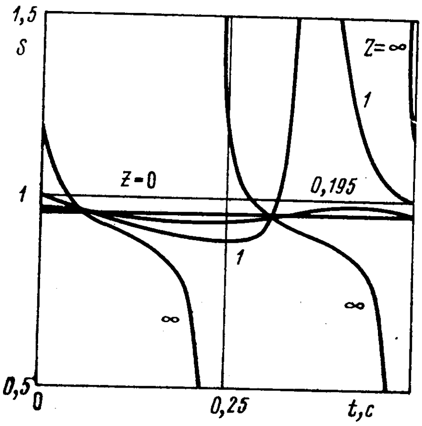
$$\chi_{b,p}=i^{3/2}R\sqrt{\frac{\omega}{\nu_{b,p}}},\quad \zeta=\sqrt{\frac{\eta_b}{\eta_p}}$$

Решение (4.1) выписано для случая однородной массовой плотности $\rho=\mathrm{const}$. Здесь введены следующие обозначения:

$$J_{0p}=J_0(\chi_p),\quad J_{0p}{}^*=J_0(\chi_p\xi_*),\quad J_{1p}{}^*=J_1(\chi_p\xi_*),\quad J_{0b}{}^*=J_0(\chi_b\xi_*)$$

$$J_{1b}{}^*=J_1(\chi_b\xi_*),\quad H_{0p}=H_0(\chi_p),\quad H_{0p}{}^*=H_0(\chi_p\xi_*),\quad H_{1p}{}^*=H_1(\chi_p\xi_*)$$

где через H_k ($k=0$, 1) обозначена функция Ганкеля $H_k^{(1)}=J_k+iN_k$, а J_k и N_k — функции Бесселя и Неймана k-го индекса. В частном случае $\eta_b=\eta_p$ будет $C_1=1$, $C_2=0$, и (4.1) переходит в решение И. С. Громеки. При построении решения (4.1) использованы условия непрерывности скорости и сдвигового напряжения при $\xi=\xi_*$. Отношение Q_p/Q выражается через табулированные функции Кельвина нулевого и первого индексов и здесь не приводится ввиду его громоздкости. Для градиента давления вида



$$-\partial p/\partial x=A_0(1+Y\cos\omega t)$$

зависимость $Q(t)$ имеет вид

$$Q(t)=D[1+Z\cos(\omega t+\beta)]$$

На фигуре для нескольких значений Z — отношения амплитуды колебаний расхода к постоянной составляющей — приведены результаты расчета чувствительности $S(t)$ на отрезке времени, равном периоду колебаний $2\pi/\omega=0{,}5$ с. Для параметров приняты значения: $R=2$ мм, $d=0{,}2$ мм, $\xi_*=0{,}96$, $c=0{,}3$, $\gamma=0{,}1$, $\zeta=2$, $\nu_p=10^{-2}$ см^2/с. Существенная нелинейность характеристики расходомера (большие изменения S на значительной части периода колебаний) видна уже из кривой, отвечающей значению $Z=1$. Сингулярное поведение функций $S(t)$ для $Z=1$ и $Z=\infty$ связано с переходом $Q(t)$ через нуль при некотором $t=t_*$; вследствие этого вклад величины $^1/_2(\alpha-1)Q_p/Q$ в чувствительность оказывается определяющим в довольно широкой окрестности точки t_*. Механическая причина такого поведения состоит в появлении значительного сдвига фаз между колебаниями полного расхода Q и его составляющей Q_p в слое с пониженной вязкостью.

Автор признателен С. А. Региреру за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зарецкий В. В., Князев М. Д., Сандриков В. А., Выховская А. Г.* Электромагнитная флоуметрия. М.: Медицина, 1974.
2. *Woodcock J. P.* Physical properties of blood and their influence on blood-flow measurement.— Rep. Prog. Phys., 1976, v. 39, No. 1.
3. *Шерклиф Дж.* Теория электромагнитного измерения расхода. М.: Мир, 1965.
4. *Руткевич И. М.* Континуальные уравнения электродинамики проводящих суспензий, движущихся в магнитном поле.— ПММ, 1977, т. 41, № 1.
5. *Fahraeus R., Lindquist T.* The viscosity of the blood in narrow capillary tubes.—

Amer. J. Physiol., 1931, v. 96, No. 3.
6. *Dennis J., Wyatt D. G.* Effect of hematocrit value upon electromagnetic flowmeter sensitivity.— Circulat. Res., 1969, v. 24, No. 6.
7. *Медин С. А., Руткевич И. М.* Интегральные характеристики МГД-генератора с каналом кругового сечения при неоднородной электропроводности потока.— Магнитная гидродинамика, 1974, № 2.
8. *Громека И. С.* Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
9. *Maxwell J. C.* A treatise on electricity and magnetism, vol. 1–2. Oxford, Clarendon Press, 1873. Dover publ. Inc., 1954.
10. *Charm S. E., Kurland G. S., Brown S. L.* The influence of radial distribution and marginal plasma layer on the flow of red cell suspensions.— Biorheology, 1968, v. 5, No. 1.

Москва

Поступила в редакцию
19.IX.1979