

УДК 532.5:544.124:501

## СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА С РЕЦИКЛОМ КАК ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОСРЕДСТВОМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

БУЧИН В. А.

В химической технологии известно много реакций, выгодных с точки зрения получения полезного продукта, но неосуществимых на практике из-за сопутствующей им неустойчивости. Независимо от причин, ее порождающих, возникает необходимость стабилизировать рассматриваемый режим с помощью некоторой системы принудительного подавления присущей ему неустойчивости.

Настоящая работа является дальнейшим обобщением подхода, развитого в [1], и посвящена стабилизации неустойчивого стационарного режима работы химического реактора с рециклом с учетом распределения параметров по его длине. Поставлена и решена задача конструирования управляющей системы, которая стабилизирует неустойчивость посредством малого нестационарного изменения скорости реагентов около ее стационарного значения. Величина малых возмущений скорости вырабатывается системой обратной связи по показаниям одного датчика температуры, расположенного внутри реактора. Показано, что такую стабилизирующую систему можно построить при любой сложности кинетики протекающей химической реакции и любого числа компонентов, участвующих в ней, если число неустойчивых мод конечно. Доказано, что последнее всегда имеет место при любом времени задержки в контуре рециркуляции, если коэффициенты диффузии всех компонентов и коэффициент теплопроводности смеси отличны от нуля.

Для любой величины запаздывания  $\tau$  в системе управления построены такие регуляторы, что все собственные числа замкнутой системы имеют отрицательные действительные части. Последнее, однако, еще не гарантирует устойчивости замкнутой системы управления. В п. 6 отмечено, что ограничения на величину допустимого запаздывания  $\tau$  связаны с максимальной скоростью роста амплитуд неустойчивых мод и в конечном счете с условиями применимости метода малых возмущений при исследовании устойчивости замкнутой системы. Указаны примеры нестабилизируемых неустойчивых режимов протекания химической реакции, число неустойчивых мод которых бесконечно.

1. Рассмотрим задачу о стабилизации неустойчивого режима протекания химической реакции в автотермическом (с теплотериями через боковые стенки) трубчатом реакторе с рециклом. Задачу будем исследовать в одномерном приближении. Будем предполагать, что плотность  $\rho_0$  реагирующей смеси в реакторе постоянна, а ее скорость  $u$  зависит только от времени и равна константе  $u_0$  при стационарном протекании реакции. Представим реактор как трубу радиуса  $R$  и длины  $L$ , внутри которой движутся реагенты. Внешняя поверхность трубы омывается теплоносителем, причем коэффициент теплоотдачи от поверхности реактора равен  $\alpha$ , а температура теплоносителя  $T_w$ . Величина  $T_w$  может, вообще говоря, зависеть от времени, но при стационарном протекании реакции постоянна и равна  $T_{w0}$ . Ограничимся рассмотрением лишь тех химических процессов, которые могут быть описаны [2] с помощью системы уравнений для температуры  $T$  и концентраций реагентов  $c_j$ , участвующих в химической реакции. Будем предполагать, что коэффициенты теплопроводности  $\kappa$  и диффузии реагентов  $D_j$ , а также теплоемкости смеси  $C_V$  постоянны внутри реактора. Вне реактора теплопроводностью и диффузией пренебрегаем.

Система нестационарных уравнений для температуры  $T$  и концентраций  $c_j$  внутри реактора в безразмерных переменных имеет вид

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial c_j}{\partial t} + u \frac{\partial c_j}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Pe}_j} \frac{\partial^2 c_j}{\partial x^2} + w_j(T, c_1, \dots, c_n), \quad j=1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Pe}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + w(T, c_1, \dots, c_n) - S(T - T_w) \end{aligned}$$

Здесь  $\text{Pe} = C_v \rho_0 u_0 L / \kappa$ ,  $\text{Pe}_j = u_0 L / D_j$  — числа Пекле (тепловое и диффузионные),  $S = 2\alpha L / (Ru_0 C_v \rho_0)$ , индексом  $j$  отмечены величины, характеризующие  $j$ -ю компоненту. Безразмерные величины введены по формулам  $x_* = Lx$ ,  $t_* = Lt/u_0$ ,  $u_* = u_0 u$ ,  $w_* = C_v \rho_0 u_0 T w_0 w / L$ ,  $w_{j*} = u_0 w / L$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ),  $T_* = T_w T$ ,  $T_{w*} = T_w T_w$ . Индексом \* отмечены размерные переменные. Функции  $w_j(T, c_1, \dots, c_n)$  и  $w(T, c_1, \dots, c_n)$  определяют кинетику и тепловой эффект протекающих реакций. Явные выражения для этих функций, пригодные для описания широкого класса химических реакций, приведены, например, в [2, 3]. Стационарные распределения температуры  $T_0 = T_0(x)$  и концентраций  $c_{j0} = c_{j0}(x)$  удовлетворяют системе (1.1), в которой  $\partial/\partial t = 0$ .

Рассмотрим изменение во времени малых возмущений  $T_1(t, x)$  и  $c_{j1}(t, x)$  стационарных распределений температуры  $T_0(x)$  и концентраций  $c_{j0}(x)$ . При этом будем предполагать, что скорость  $u(t)$  и температура теплоносителя  $T_w(t)$  имеют вид

$$(1.2) \quad u(t) = 1 + u_1(t), \quad T_w(t) = 1 + T_{w1}(t)$$

Здесь  $u_1(t)$  и  $T_{w1}(t)$  — малые нестационарные отклонения значений скорости и температуры теплоносителя от своих стационарных значений, по порядку величины совпадающие с  $T_1$  и  $c_{j1}$ . С учетом соотношений (1.2) система линеаризованных уравнений для малых возмущений  $T_1$  и  $c_{j1}$  может быть получена стандартным образом и имеет вид

$$(1.3) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \mathbf{B}(x) \mathbf{v} + S T_{w1} \mathbf{d} - u_1 \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial x}$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{d}$  — векторы-столбцы размерности  $n+1$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — матрицы размерности  $(n+1) \times (n+1)$  следующего вида ( $\delta_{jm}$  — символ Кронекера):

$$\mathbf{v} = (c_{11}, \dots, c_{n1}, T_1), \quad \mathbf{v}_0 = (c_{10}, \dots, c_{n0}, T_0), \quad \mathbf{d} = (0, \dots, 0, 1)$$

$$\mathbf{A} = \{a_{jm}\}, \quad a_{jm} = \frac{1}{\text{Pe}_j} \delta_{jm}, \quad \text{Pe}_{n+1} = \text{Pe}$$

$$\mathbf{B} = \{b_{jm}(x)\}, \quad b_{jm}(x) = w'_{jc_m}(T_0, c_{10}, \dots, c_{n0}), \quad j, m = 1, 2, \dots, n$$

$$b_{n+1,m}(x) = w'_{c_m}(T_0, c_{10}, \dots, c_{n0}), \quad m = 1, 2, \dots, n$$

$$b_{j,n+1}(x) = w'_{jT}(T_0, c_{10}, \dots, c_{n0}), \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$b_{n+1,n+1}(x) = w'_T(T_0, c_{10}, \dots, c_{n0}) - S$$

Граничные условия для стационарных распределений концентраций  $c_{j0}$  и температуры  $T_0$ , а также для их малых нестационарных возмущений на входе и выходе из реактора с рециклом (в случае пренебрежимо малой теплопроводности и диффузии вне его) могут быть получены так же, как

для реактора без рецикла [4, 5], и имеют вид

$$(1.4) \quad \begin{aligned} -A \frac{\partial v_0(0)}{\partial x} + v_0(0) &= (1-r_0)v_{00} + r_0 v_0(1), \quad \frac{\partial v_0(1)}{\partial x} = 0 \\ -A \frac{\partial v(t,0)}{\partial x} + v(t,0) &= r_0 v(t-\tau_R, 1) + [(1-r_0)v_{00} - v_0(0)]u_1(t), \\ \frac{\partial v(t,1)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь  $v_{00}$  — вектор, компонентами которого являются концентрации и температуры реагентов исходной смеси,  $r_0$  — параметр рецикла,  $\tau_R$  — время, необходимое для транспортировки части конечного продукта от выхода из реактора к его входу. При выводе граничных условий (1.4) структура контура рециркуляции не конкретизировалась, а его влияние учтено лишь введением времени запаздывания  $\tau_R$ . Помимо этого, предполагалось, что в контуре рециркуляции процессы теплопроводности и диффузии смеси несут ответственность, а ее скорость в безразмерных переменных равна единице.

Отметим, что при разных значениях параметров, входящих в сформулированную выше задачу, получаем реакторы разных типов. Так, положив параметр  $S$  равным нулю, получим адиабатический реактор с рециклом, положив нулем параметр  $r_0$  — реактор без рецикла и так далее.

Поставленная задача определения стационарных величин изучалась при отсутствии рецикла (см. литературу к [1]). При этом было показано, что она может иметь неединственное решение. Последнее свидетельствует о том, что реактор может работать в нескольких стационарных режимах. При этом не все из них оказываются устойчивыми. Нестационарные эффекты, свидетельствующие о потере устойчивости некоторых стационарных режимов, изучались, например, в [6–10]. Аналогичные работы, в которых исследовались бы подобные вопросы в реакторах с рециклом, автору неизвестны, но можно не без основания ожидать, что неединственность стационарных режимов и неустойчивость некоторых из них может иметь место и в этом случае.

2. Устойчивость стационарного режима исследуем, рассматривая поведение во времени малых нестационарных возмущений концентраций  $c_{j1}$  и температуры  $T_1$  [1, 9, 10]. Задачу будем решать методом разделения переменных. Введем в рассмотрение вектор-функцию  $Z(\lambda, x)$

$$(2.1) \quad v = e^{\lambda t} A_1(x) Z(\lambda, x)$$

Здесь  $A_1(x)$  — диагональная матрица,  $m$ -й элемент которой имеет вид  $a_{m'} = \exp(i/2 \operatorname{Re} m x)$ ,  $m=1, 2, \dots, n+1$ ,  $\operatorname{Re}_{n+1} = \operatorname{Re}$ , вектор-функция  $v(t, x)$  имеет своими компонентами возмущения концентрации и температуры  $c_{11}, c_{21}, \dots, c_{n1}, T_1$ . При изучении устойчивости стационарных режимов работы химического реактора считаем нестационарные возмущения скорости  $u_1(t)$  и температуры теплоносителя  $T_{w1}(t)$  равными нулю.

С учетом соотношения (2.1),  $u_1(t)=0$ , а также  $T_{w1}(t)=0$  из (1.3) и (1.4) получаем уравнение и граничные условия для вектор-функции  $Z(\lambda, x)$ :

$$(2.2) \quad Z'' + \left[ -\frac{1}{4} A_2^2 - \lambda A_2 + B_1(x) \right] Z = 0, \quad B_1(x) = A_1^{-1}(x) A_2 B(x) A_1(x)$$

$$(2.3) \quad -Z'(\lambda, 0) + \frac{1}{2} A_2 Z(\lambda, 0) = r_0 A_2 A_1(1) e^{-\lambda \tau_R} Z(\lambda, 1)$$

$$Z'(\lambda, 1) + \frac{1}{2} A_2 Z(\lambda, 1) = 0$$

Здесь  $A_2$  — диагональная матрица, обратная постоянной матрице  $A$ .

Если в спектре собственных значений краевой задачи (2.2) — (2.3) для всех собственных чисел  $\lambda_k$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , то рассматриваемый стационарный режим устойчив, если же хотя бы для одного  $k$   $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ , то режим неустойчив.

Рассмотрим стационарный режим, про который известно, что он неустойчив.

Покажем, что при любой кинетике химических реакций, протекающих в реакторе, и при любом времени запаздывания  $\tau_R$  лишь для конечного числа  $\lambda_k$   $\operatorname{Re} \lambda_k \geq 0$ , если все числа Пекле  $Pe_1, Pe_2, \dots, Pe_n, Pe$  отличны от бесконечности.

Так как  $V_1(x)$  — непрерывная дифференцируемая матричная функция своего аргумента, то можно доказать [11], что в уравнении для собственных значений краевой задачи (2.2), (2.3)

$$(2.4) \quad \Delta(\lambda) = 0$$

функция  $\Delta(\lambda)$  есть целая функция от  $\lambda$ . Известно, что для целой функции  $\Delta(\lambda)$ , отличной от нуля, уравнение (2.4) имеет лишь конечное число нулей в любой ограниченной области комплексной плоскости  $\lambda$ . Следовательно, для того чтобы убедиться в справедливости утверждения, сделанного выше, достаточно показать, что асимптотически все собственные числа краевой задачи (2.2) — (2.3) имеют отрицательные действительные части.

Для общего решения уравнения (2.2) справедливо следующее выражение [11]:

$$(2.5) \quad Z(\lambda, x) = Y_1(\lambda, x)C_1 + Y_2(\lambda, x)C_2$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные векторы, матрицы  $Y_1(\lambda, x)$  и  $Y_2(\lambda, x)$  — два линейно-независимых решения уравнения (2.2), в котором вектор  $Z$  заменен матрицей  $Y$ . Для больших значений  $|\lambda|$  матрицы  $Y_1$  и  $Y_2$  имеют вид [11]

$$(2.6) \quad Y_1 = Y_0(\lambda, x) \left[ I + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right],$$

$$Y_2 = Y_0^{-1}(\lambda, x) \left[ I + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \right], \quad O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{D(x, \sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}}$$

$$|D_{ij}(x, \sqrt{\lambda})| \leq M \quad |\sqrt{\lambda}| \geq R, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad M = \text{const}, \quad R = \text{const}$$

Матричная функция  $Y_0(\lambda, x)$  — диагональная,  $m$ -й элемент которой определен формулой

$$(2.7) \quad y_{0m}(\lambda, x) = \exp(\mu_m x), \quad \mu_m = \frac{1}{2} Pe_m \left[ 1 + \frac{4}{Pe_m} \lambda \right]^{1/2}, \quad m = 1, 2, \dots, n+1$$

Подставим выражения (2.5) для  $Z$  с учетом соотношений (2.6) и (2.7) в граничные условия (2.3). Асимптотически главная часть каждого из  $\lambda_k$  удовлетворяет одному из уравнений [11]

$$(2.8) \quad \Delta_m(\lambda) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n+1$$

$$\Delta_m(\lambda) = \frac{1}{\mu_m} \left[ \left( \frac{\mu_m}{Pe_m} + \frac{1}{2} \right)^2 \exp\left(\mu_m - \frac{1}{2} Pe_m\right) - \left( \frac{\mu_m}{Pe_m} - \frac{1}{2} \right)^2 \exp\left(-\mu_m - \frac{1}{2} Pe_m\right) \right] - \frac{2r_0}{Pe_m} e^{-\lambda \tau_R}$$

Докажем, что для каждого значения  $m = 1, 2, \dots, n+1$  уравнение (2.8) имеет при  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  лишь конечное число корней. Заметим, что функция  $f_m(\lambda) = \Delta_m(\lambda) + 2r_0 e^{-\lambda \tau_R} / Pe_m$  не имеет корней в правой полуплоскости и неограниченно возрастает по модулю при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , в то время как функция  $2r_0 e^{-\lambda \tau_R} / Pe_m$ , очевидно, ограничена при  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Тогда из теоремы Руше [12] следует, что при  $|\lambda| \geq R_0$ ,  $R_0 = \text{const}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  уравнение (2.8) при всех значениях  $m$  не имеет корней, причем константа  $R_0$  может быть выбрана не зависящей от  $m$ .

Теорема Руше позволяет также доказать следующее утверждение: всегда существует такое  $R_0$ , что при  $|\lambda| \geq R_0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  число корней уравнений (2.4) и (2.8) совпадает, а так как (2.8) в этой области не имеет корней, то не имеет их в этой области и уравнение (2.4). Функция  $\Delta(\lambda)$  — целая, следовательно, в любой конечной области

она имеет лишь конечное число нулей. Объединяя вышесказанное, заключаем, что функция  $\Delta(\lambda)$  имеет при  $\text{Re}\lambda \geq 0$  лишь конечное число корней.

Дальнейшее изучение уравнений (2.4) и (2.8) позволяет установить зависимость асимптотического распределения собственных значений краевой задачи (2.2) – (2.3) от параметров  $r_0$ ,  $\tau_R$  и  $\text{Re}m$ ,  $m=1, 2, \dots, n+1$ . Так, при отсутствии рецикла ( $r_0=0$ ,  $\tau_R=0$ ) собственные значения  $m$ -й серии имеют асимптотику [11]

$$(2.9) \quad \lambda_{mk} = -\frac{4\pi^2 k^2}{\text{Re}m} (1+o(1)), \quad m=1, 2, \dots, n+1, \quad \text{Re}m \neq \infty$$

При наличии рецикла и запаздывания в контуре рециркуляции ( $\tau_R \neq 0$ ) для больших номеров  $k$  и отличных от бесконечности числах Пекле  $\text{Re}m$  имеем

$$(2.10) \quad \lambda_{mk} = -\frac{1}{\tau_R} \left( \frac{\pi \text{Re}m}{\tau_R} \right)^{1/2} \sqrt{|k|} (1+o(1)) - \\ - \frac{1}{\tau_R} \left( 2\pi k - \left( \frac{\pi \text{Re}m}{\tau_R} \right)^{1/2} \sqrt{|k|} \right) (1+o(1)) i$$

$$m=1, 2, \dots, n+1, \quad |\lambda_{mk}| \gg \text{Re}m, \quad k - \text{целое}$$

В том случае, когда для всех или части  $m$   $\text{Re}m \gg 1$ , для собственных значений, удовлетворяющих неравенству  $1 \ll |\lambda_{mk}| \ll \text{Re}m$ , имеем

$$(2.11) \quad \lambda_{mk} = \frac{\ln \chi_m}{1+\tau_R} (1+o(1)) + \frac{2\pi k i}{1+\tau_R} (1+o(1)), \quad \text{Re}m \gg 1$$

Здесь  $\chi_m$  – некоторое число, зависящее от величин  $r_0$ ,  $\tau_R$  и кинетики протекающих реакций. В общем случае определение явного выражения для  $\chi_m$  связано со значительными трудностями, но в одном частном случае выражение для  $\chi_m$  определено в п. 7. Когда  $\text{Re}m = \infty$ , асимптотика (2.11) справедлива для всех достаточно больших по модулю собственных значений  $\lambda_{mk}$ . В зависимости от кинетики протекающих химических реакций и величин, характеризующих рецикл, можно ожидать, что  $|\chi_m| > 1$  для некоторого  $m$ . В этом случае при пренебрежении диффузионными процессами для соответствующих компонент оказывается, что существует бесконечное число собственных значений  $\lambda_k$ ,  $\text{Re}\lambda_k > 0$ . Как следует из (2.10), учет диссипативных процессов приводит к тому, что число собственных значений в правой полуплоскости всегда оказывается конечным.

Дальнейшее изложение посвящено построению систем, стабилизирующих неустойчивый режим, путем воздействия на протекание химической реакции.

3. Пусть имеется неустойчивый стационарный режим работы химического реактора. Математически это означает, что  $N$  собственных чисел краевой задачи (2.2) – (2.3) лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости  $\lambda$ . Предполагается, что их значения уже известны из решения задачи об устойчивости (см. п. 2). Для стабилизации рассматриваемого режима можно использовать, например, следующие системы управления. По длине реактора расположены один или несколько датчиков температуры, непрерывно измеряющих ее отклонение от стационарного значения. С помощью линейной системы обратной связи по показаниям этих датчиков вырабатывается малое нестационарное возмущение той величины, с помощью которой осуществляется воздействие на протекание химической реакции. В качестве этой величины можно выбрать: скорость реагирующей смеси; температуру теплоносителя и т. д. Так как исследование для каждой из перечисленных возможностей не содержит принципиальных различий, то задачу построения стабилизирующей системы подробно рассмотрим только для первого случая.

В соответствии с вышесказанным для развития малых нестационарных возмущений при наличии системы управления, изменяющей скорость смеси по показаниям датчика (или датчиков) температуры, справедливы система уравнений (1.3), в которой возмущение температуры теплоносителя  $T_{w1}$  положено равным нулю, и граничные условия (1.4). Помимо этого,

возмущение скорости смеси  $u_1(t)$  связано с изменением температуры внутри реактора соотношением

$$(3.1) \quad u_1(t) = \Phi T_1$$

Здесь  $\Phi$  — линейный непрерывный оператор, конкретное выражение которого зависит, во-первых, от конструкции следящей системы (системы датчиков, измеряющих температуру по длине реактора) и, во-вторых, от того, как эта информация используется в цепи управления. Будем предполагать также, что оператор  $\Phi$  можно представить в виде суперпозиции двух операторов

$$(3.2) \quad \Phi = \Phi_2 \Phi_1$$

Оператор  $\Phi_2$  действует только на временную переменную и является оператором свертки, а оператор  $\Phi_1$  действует только на пространственную переменную и является функционалом.

От переменных  $v$ ,  $u_1$  перейдем к переменным  $Z$ ,  $U_1$  с помощью преобразования (2.1) и

$$(3.3) \quad u_1(t) = e^{st} U_1(\lambda)$$

После подстановки (2.1) и (3.3) в систему уравнений (1.3), граничные условия (1.4) и соотношения (3.1) и (3.2) получим

$$(3.4) \quad Z'' + \left[ -\frac{1}{4} A_2^2 - \lambda A_2 + B_1(x) \right] Z = U_1(\lambda) A_2 A_1^{-1}(x) \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$(3.5) \quad -Z'(\lambda, 0) + \frac{1}{2} A_2 Z(\lambda, 0) = r_0 A_2 A_1(1) e^{-\lambda r_0} Z(\lambda, 1) + U_1(\lambda) A_2 v^\circ$$

$$Z'(\lambda, 1) + \frac{1}{2} A_2 Z(\lambda, 1) = 0, \quad v^\circ = (1 - r_0) v_{00} - v_0(0)$$

$$(3.6) \quad U_1(\lambda) = \Phi_2(\lambda) F_1 Z_{n+1}(\lambda, \cdot)$$

Здесь  $\Phi_2(\lambda)$  — образ преобразования Лапласа от ядра оператора  $\Phi_2$ , а функционал  $F_1$  связан с функционалом  $\Phi_1$  соотношением

$$(3.7) \quad \Phi_1 T_1^*(\lambda, \cdot) = F_1 Z_{n+1}(\lambda, \cdot), \quad T_1(t, x) = e^{st} T_1^*(\lambda, x)$$

Будем называть задачу на собственные значения (3.4) — (3.6) — обобщенной краевой задачей.

Выведем уравнение для собственных значений обобщенной краевой задачи (3.4) — (3.6) с произвольным непрерывным функционалом  $F_1$ .

Введем в рассмотрение вектор-функцию  $p(\lambda, x)$

$$(3.8) \quad Z(\lambda, x) = \Phi_2(\lambda) F Z_{n+1}(\lambda, \cdot) p(\lambda, x)$$

Уравнение и граничные условия для вектор-функции  $p(\lambda, x)$  совпадают с (3.4) и (3.5), если заменить  $U_1(\lambda)$  единицей. Из соотношения (3.8) следует, что

$$(3.9) \quad Z_{n+1}(\lambda, x) = \Phi_2(\lambda) F_1 Z_{n+1}(\lambda, \cdot) p_{n+1}(\lambda, x)$$

Вектор-функцию  $p(\lambda, x)$  можно однозначно определить при любом значении  $\lambda$ , отличном от собственных значений краевой задачи (2.2), (2.3) [11]. После того как функция  $p(\lambda, x)$  определена, функция  $Z(\lambda, x)$ , заданная соотношением (3.8), автоматически удовлетворяет обобщенной краевой задаче (3.4) — (3.6) при всех значениях  $\lambda$ , отличных от собственных значений краевой задачи (2.2), (2.3) и особенностей функции  $\Phi_2(\lambda)$ . Бу-

дем предполагать, что особенности функции  $\Phi_2(\lambda)$  не совпадают с собственными числами задачи (2.2), (2.3). Собственными значениями обобщенной краевой задачи (3.4) — (3.6) будут те значения  $\lambda$ , при которых эта однородная задача имеет ненулевые решения. Покажем, что собственными значениями задачи (3.4) — (3.6) будут те  $\lambda$ , для которых выполнено условие (3.9) после того, как на обе части его подействовали функционалом  $F_1$ , при условии, что  $F_1 Z_{n+1}(\lambda, \cdot) \neq 0$  (последнее гарантирует необращение в нуль собственного вектора задачи (3.4) — (3.6)). Результат действия  $F_1$  на обе части соотношения (3.9) представим в виде

$$F_1 Z_{n+1}(\lambda, \cdot) [1 - \Phi_2(\lambda) F_1 p_{n+1}(\lambda, \cdot)] = 0$$

Полученное выражение обращается в нуль, когда либо первый, либо второй сомножитель равен нулю. Случай, когда  $F_1 Z_{n+1}(\lambda_k, \cdot) = 0$ , где  $\lambda_k$  какое-нибудь собственное значение задачи (2.2), (2.3), означает, что рассматриваемая система управления не взаимодействует с модой, отвечающей данному собственному значению, оставляя ее невозмущенной. Система управления должна взаимодействовать со всеми неустойчивыми модами, поэтому необходимо выполнение условий

$$(3.10) \quad F_1 Z_{n+1}(\lambda_k, \cdot) \neq 0, \quad k=1, 2, \dots, N$$

Здесь  $\lambda_k$  — собственные числа задачи (2.2), (2.3), соответствующие неустойчивым модам. В том случае, когда корень уравнения  $F_1 Z_{n+1}(\lambda, \cdot) = 0$  не есть собственное число задачи (2.2), (2.3), он не является также и собственным числом краевой задачи (3.4) — (3.6), так как для вектор-функции  $Z(\lambda, x)$  справедливо равенство  $Z(\lambda, x) = 0$ . Последнее следует из того, что функция  $Z(\lambda, x)$  при этом есть решение однородной краевой задачи (2.2), (2.3) при значении  $\lambda$ , отличном от собственного значения.

Таким образом, уравнение для собственных значений обобщенной краевой задачи (3.4) — (3.6) имеет вид

$$(3.11) \quad \Phi_2(\lambda) F_1 p_{n+1}(\lambda, \cdot) = 1$$

4. Переходим к построению класса управляющих систем, стабилизирующих неустойчивый режим работы химического реактора. Ограничимся рассмотрением систем, имеющих лишь один датчик температуры, помещенный внутри реактора в точку с координатой  $x_0$ ,  $0 < x_0 < 1$ . Обобщение на случай нескольких датчиков не представляет затруднений. Размером датчика пренебрегаем. Сигнал от датчика попадает в устройство  $A$  с передаточной функцией  $A(\lambda)$ . Преобразованный в нем сигнал определяет величину малого нестационарного возмущения скорости реагирующей смеси. Будем также предполагать, что система управления срабатывает с некоторым запаздыванием  $\tau$ . С учетом вышесказанного, а также результатов, полученных в предыдущем пункте уравнение (3.11) для собственных значений обобщенной краевой задачи (3.4) — (3.6), запишем в виде

$$(4.1) \quad A(\lambda) e^{-\tau \lambda} p_{n+1}(\lambda, x_0) = 1$$

Здесь, таким образом, для функции  $\Phi_2(\lambda)$ , функционала  $F_1 Z_{n+1}(\lambda, \cdot)$ , а также с учетом соотношения (3.7) и преобразования (2.1) для функционала  $\Phi_1 T_1^*(\lambda, \cdot)$  выбраны следующие выражения:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Phi_2(\lambda) &= A(\lambda) e^{-\tau \lambda}, \quad F_1 Z_{n+1}(\lambda, \cdot) = Z_{n+1}(\lambda, x_0), \quad \Phi_1 T_1^*(\lambda, \cdot) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Re} x_0\right) T_1^*(\lambda, x_0) \end{aligned}$$

Будем искать передаточную функцию  $A(\lambda)$  в виде отношения двух полиномов от  $\lambda$

$$(4.3) \quad A(\lambda) = P_l(\lambda)/Q_s(\lambda), \quad l \leq s$$

Неравенство  $l \leq s$  необходимо для физической осуществимости передаточной функции  $A(\lambda)$  [13].

Для того чтобы рассматриваемая система управления стабилизировала все  $N$  неустойчивых мод, необходимо, чтобы функционал (4.2) не обращался в нуль при  $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \dots, \lambda = \lambda_N$ ; здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  — все собственные числа краевой задачи (2.2) — (2.3), отвечающие неустойчивым модам,  $\operatorname{Re} \lambda_1 \geq 0, \operatorname{Re} \lambda_2 \geq 0, \dots, \operatorname{Re} \lambda_N \geq 0$ . (В число собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  включены также все собственные числа, для которых выполнено условие  $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$ ). Как это видно из соотношения (4.2),  $N$  условий (3.10) будут выполнены тогда и только тогда, когда, во-первых, функция  $A(\lambda)$  не обращается в нуль при  $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots, N$ , и, во-вторых, когда функция  $Z_{n+1}(\lambda, x_0)$  также не обращается в нуль при тех же значениях  $\lambda$ .

Функция  $Z_{n+1}(\lambda_k, x)$  есть  $n+1$ -я компонента собственного ( $k$ -го) вектора краевой задачи (2.2), (2.3), соответствующего собственному значению  $\lambda_k$ . При этом либо  $Z_{n+1}(\lambda_k, x) \neq 0$  при всех  $k = 1, 2, \dots, N$ , либо  $Z_{n+1}(\lambda_k, x) \equiv 0$  при одном или нескольких значениях  $k$ . В первом случае существует такое значение  $x = x_0$ , при котором для всех  $k = 1, 2, \dots, N$  справедливо  $Z_{n+1}(\lambda_k, x_0) \neq 0$ .

Возможность осуществления второго случая накладывает ограничение на вид матричной функции  $B_1(x)$  и, следовательно, в конечном счете ограничения на кинетику и условия стационарного протекания реакции. Можно показать, например, что в случае протекания одной химической реакции ( $n=1$ ) с учетом тепловых эффектов обращение в нуль величины  $Z_{n+1}(\lambda_k, x)$  при каком-нибудь значении  $k$  имеет следствием равенство

$$\frac{\partial w(T_0(x), c_0(x))}{\partial c} \equiv 0$$

которое, во всяком случае, не имеет места для широкого класса химических реакций (см., например, кинетику реакций [8]). При  $n > 1$ , по-видимому, возможны ситуации, при которых стационарный режим протекания химической реакции будет неустойчивым лишь по части переменных и, в частности, устойчив в смысле теплового эффекта и неустойчив в смысле сохранения стационарных значений концентраций (последнее возможно, если  $Z_{n+1}(\lambda_k, x) \equiv 0$  для всех значений  $k = 1, 2, \dots, N$ ). Выяснение условий, при которых возможно осуществление таких режимов протекания химических реакций, выходит за рамки настоящей работы, но, по всей видимости, осуществление их скорее исключение, чем правило.

Отметим, что если все-таки описанная выше ситуация имеет место ( $Z_{n+1}(\lambda_k, x) \equiv 0$  при одном или нескольких значениях  $k$ ), то использовать переменную  $Z_{n+1}(\lambda, x)$  в качестве измеряемой величины нельзя и следует заменить ее другой величиной  $Z_m(\lambda, x)$  (или линейной комбинацией нескольких  $Z_m(\lambda, x)$ ) такой, что ее значение отлично от нуля при некоторых значениях  $x$  и при всех  $\lambda = \lambda_k, k = 1, 2, \dots, N$ . Дальнейшее изложение без труда обобщается и на этот случай.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что кинетика и условия протекания химической реакции таковы, что выполнены условия (3.10) и  $Z_{n+1}(\lambda_k, x_0) \neq 0$ .

5. Построим класс передаточных функций  $A(\lambda)$  вида (4.3) таких, что соответствующие им системы управления (4.2) стабилизируют неустойчивый стационарный режим протекания химической реакции. Последнее ма-



тематически означает, что корни уравнения (4.1) для собственных значений обобщенной краевой задачи (3.4) — (3.6) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости  $\lambda$ . Будем искать функции  $A(\lambda)$  в следующем виде:

$$(5.1) \quad A(\lambda) = \alpha \left[ 1 + \alpha \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{\lambda - \nu_k} + \alpha D_L \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right]^{-1}, \quad D_L(\xi) = \sum_{r=0}^L \gamma_r \xi^r$$

Значения констант  $\alpha$ ,  $\alpha_k$ ,  $\nu_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $L$  подлежат определению в процессе решения. В том случае, когда  $N=0$ , следует константу  $\alpha$  положить равной нулю.

Рассмотрим уравнение (4.1). Функция  $p_{n+1}(\lambda, x)$  есть решение неоднородной задачи, для которой однородной краевой задачей является (2.2), (2.3), поэтому функция  $p_{n+1}(\lambda, x_0)$  имеет полюсы при  $\lambda = \lambda_k$ ,  $k=1, 2, \dots, N$  [11]. Ограничимся рассмотрением случая однократных собственных чисел  $\lambda_k$ ,  $\text{Re } \lambda_k \geq 0$  (обобщение нижеизложенного на тот случай, когда кратность собственных чисел отлична от единицы, — тривиально). Таким образом, функцию  $e^{-\tau\lambda} p_{n+1}(\lambda, x_0)$  при  $\text{Re } \lambda \geq 0$  можно представить в виде

$$(5.2) \quad e^{-\tau\lambda} p_{n+1}(\lambda, x_0) = \sum_{k=1}^N \frac{e^{-\tau\lambda_k} \beta_k}{\lambda - \lambda_k} + R(\lambda)$$

Здесь  $\beta_k$  — вычеты функции  $p_{n+1}(\lambda, x_0)$  в точках  $\lambda = \lambda_k$ ,  $R(\lambda)$  — функция аналитическая при  $\text{Re } \lambda \geq 0$ .

С учетом (5.1) преобразуем соотношение (4.1)

$$(5.3) \quad \alpha^{-1} H(\lambda, \alpha) = R(\alpha) - D_L \left( \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)$$

$$(5.4) \quad H(\lambda, \alpha) = 1 + \alpha \sum_{k=0}^N \frac{\alpha_k}{\lambda - \nu_k} - \alpha \sum_{k=1}^N \frac{e^{-\tau\lambda_k} \beta_k}{\lambda - \lambda_k}$$

Потребуем, чтобы все корни уравнения  $H(\lambda, \alpha) = 0$  лежали в левой полуплоскости. Пусть этими корнями будут числа  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ ,  $\text{Re } \Lambda_m < 0$ ,  $m=1, 2, \dots, 2N$ . В таком случае функцию  $H(\lambda, \alpha)$  можно представить в виде

$$(5.5) \quad H(\lambda, \alpha) = \prod_{m=1}^{2N} (\lambda - \Lambda_m) \left[ \prod_{s=1}^N (\lambda - \lambda_s) (\lambda - \nu_s) \right]^{-1}$$

Определим константы  $\alpha_k$  и  $\nu_k$  так, чтобы выражения (5.4) и (5.5) для функции  $H(\lambda, \alpha)$  совпадали. Для этого необходимо и достаточно, чтобы  $\nu_k$  были корнями следующего алгебраического уравнения  $N$ -й степени относительно переменной  $\lambda$ , а  $\alpha_k$  определялись с помощью следующих формул:

$$(5.6) \quad (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_N) + \sum_{k=1}^N B_N(\lambda_k) \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \frac{\lambda - \lambda_r}{\lambda_k - \lambda_r} = 0$$

$$B_N(\lambda_k) = -\frac{1}{\alpha \beta} \prod_{m=1}^{2N} (\lambda_k - \Lambda_m) \left[ \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^N (\lambda_k - \lambda_s) \right]^{-1}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\alpha} \prod_{m=1}^{2N} (\nu_k - \Lambda_m) \left[ (\nu_k - \lambda_k) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^N (\nu_k - \lambda_s) (\nu_k - \nu_s) \right]^{-1}, \quad k=1, 2, \dots, N$$

Для любого фиксированного значения  $\alpha$ , отличного от нуля и бесконечности, используя теорему Руше [12], можно показать [1], что уравнение (5.3) не имеет корней в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ , если

$$(5.7) \quad |\alpha^{-1} H(\lambda, \alpha)| > \left| R(\lambda) - D_L \left( \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \right) \right|, \quad \lambda = i\mu, \quad -\infty < \mu < \infty$$

Неравенство (5.7) будет заведомо выполнено, если выполнено более сильное неравенство

$$(5.8) \quad d(\alpha) > \rho(R, D_L)$$

$$d(\alpha) = \min_{-\infty < \mu < \infty} |\alpha^{-1} H(\lambda, \alpha)|, \quad d(\alpha) > 0,$$

$$\rho(R, D_L) = \max_{-\infty < \mu < \infty} \left| R(i\mu) - D_L \left( \frac{i\mu-1}{i\mu+1} \right) \right|$$

Функция  $R(\lambda)$  — аналитическая при  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . Можно показать, что  $R(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ . С помощью конформного преобразования  $\zeta = (\lambda-1)/(\lambda+1)$  отобразим правую полуплоскость  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  на внутренность единичного круга на плоскости  $\zeta$ . При этом получим, что функция  $R_1(\zeta) = R(\lambda)$  — аналитическая внутри круга  $|\zeta| < 1$  и непрерывная на его границе, причем  $R_1(1) = 0$ . Такую функцию можно с произвольной наперед заданной точностью равномерно приблизить в замкнутой области  $|\zeta| \leq 1$  многочленами  $D_L(\zeta)$  [14–19]. Следовательно, всегда можно найти такие значения  $L$  и констант  $\gamma_r$ , что неравенство (5.8) будет выполнено. Очевидно, наименьшее значение  $L$  можно получить в том случае, когда полином  $D_L(\zeta)$  совпадает с полиномом наилучшего приближения  $P_L(\zeta)$  в замкнутой комплексной области  $|\zeta| \leq 1$ .

Пусть  $\rho_L(R_1) = \max_{|\zeta| \leq 1} |R_1(\zeta) - P_L(\zeta)|$  при  $|\zeta| \leq 1$ . В таком случае  $L$  равно минимальному целому числу, при котором справедливо неравенство  $d(\alpha) > \rho_L(R_1)$ . Конструктивное построение полинома наилучшего приближения  $P_L(\zeta)$  (вместо полиномов наилучшего приближения можно рассматривать рациональные функций наилучшего приближения, аналитические внутри области  $|\zeta| \leq 1$ . Сходимость их к  $R_1(\zeta)$  будет быстрее, чем у  $P_L(\zeta)$ , но фактическое их построение связано с еще большими трудностями [18]) для функции  $R_1(\zeta)$  представляет большие вычислительные трудности [20]. Поэтому ниже аналитически построим полиномы  $G_L(\zeta)$ , равномерно приближающие функцию  $R_1(\zeta)$  при  $|\zeta| \leq 1$  с несколько меньшей точностью, чем полиномы  $P_L(\zeta)$ .

В качестве таких полиномов  $G_L(\zeta)$  рассмотрим интерполяционные полиномы Лагранжа степени  $L$ , совпадающие с  $R_1(\zeta)$  в  $L+1$ -й точке

$$(5.9) \quad G_L(\zeta) = \sum_{S=1}^{L+1} l_{LS}(\zeta) R_1(\zeta_{LS})$$

$$l_{LS}(\zeta) = \frac{\omega_L(\zeta)}{(\zeta - \zeta_{LS}) \omega_L'(\zeta_{LS})}, \quad \omega_L(\zeta) = \prod_{S=1}^{L+1} (\zeta - \zeta_{LS})$$

Здесь  $\zeta_{LS}$ ,  $S=1, 2, \dots, L+1$  — корни уравнения  $\zeta^{L+1} - 1 = 0$ . Заметим, что сумма (5.9) фактически содержит лишь  $L$  слагаемых, так как  $R_1(\zeta_{L+1}) = 0$ ,  $\zeta_{L+1} = 1$ . Для полиномов Лагранжа  $G_L(\zeta)$  с вышеприведенным расположе-

нием узлов интерполяции справедливы следующие неравенства [21]:

$$(5.10) \quad |R_1(\xi) - G_L(\xi)| \leq (\Omega_{L+1} + 1) \rho_L(R_1), \quad \Omega_{L+1} < 6 + \frac{4}{\pi} \ln(L+1)$$

Таким образом, полиномы Лагранжа  $G_L(\xi)$  лишь немногим медленнее сходятся к аппроксимируемой функции  $R_1(\xi)$ , чем полиномы наилучшего равномерного приближения  $P_L(\xi)$ . Имеет место следующая оценка величины  $\rho_L(R_1)$  через модуль непрерывности  $\omega(R_1, \delta)$  приближаемой функции в рассматриваемой области [19, 22, 23]:

$$(5.11) \quad \rho_L(R_1) < \omega\left(R_1, \frac{\pi}{L+1}\right),$$

$$\omega(R_1, \delta) = \max_{|\xi_2 - \xi_1| < \delta, |\xi_1|, |\xi_2| \leq 1} |R_1(\xi_1) - R_1(\xi_2)|$$

Функция  $R_1(\xi)$  непрерывна вместе со своей производной при  $|\xi| = 1$  и аналитична при  $|\xi| < 1$ , поэтому в замкнутой области  $|\xi| \leq 1$  справедливо следующее неравенство:

$$(5.12) \quad \omega(R_1, \delta) \geq \omega_1 \delta, \quad \omega_1 = \max_{|\xi| \leq 1} |R_1'(\xi)|$$

Объединяя соотношения (5.8), (5.10) — (5.12), получим

$$(5.13) \quad (L+1) \left[ 6 + \frac{4}{\pi} \ln(L+1) \right] > \pi \omega_1 / d(\alpha)$$

Из этого неравенства следует оценка снизу (завышенная) для величины  $L$ . Величина  $L$ , как это видно из неравенств (5.8) и (5.13), будет тем меньше, чем больше значение  $d(\alpha)$ . Варьируя величину  $\alpha$ , задавшись некоторыми интервалами ее изменения, не содержащими нуля и бесконечности, можно на ЭВМ определить то значение  $\alpha$ , при котором значение  $d(\alpha)$  максимально. Так, в качестве области определения  $\alpha$  можно выбрать объединение двух интервалов  $(-\alpha_2^\circ, -\alpha_1^\circ) \cup (\alpha_1^\circ, \alpha_2^\circ)$ ,  $0 < \alpha_1^\circ < \alpha_2^\circ < \infty$ . Значения констант  $\alpha_1^\circ$  и  $\alpha_2^\circ$  в конечном счете определяются возможностью реализации передаточной функции  $A(\lambda)$ .

После того как все искомые константы  $\alpha$ ,  $\alpha_k$ ,  $\nu_k$ ,  $\gamma_r$  и  $L$  определены из соотношений (5.6), (5.9) — (5.13) и условия максимума функции  $d(\alpha)$ , вид передаточной функции  $A(\lambda)$  системы управления, подавляющей неустойчивость стационарного режима работы химического реактора, полностью определен. Алгоритм, описанный выше, требует вполне стандартных вычислений, но это достигается ценой увеличения сложности передаточной функции  $A(\lambda)$ . Сложность передаточной функции  $A(\lambda)$  можно уменьшить, если, например, удовлетворять неравенству (5.8). При этом по-прежнему вычисление правой и левой частей неравенства можно производить независимо друг от друга, но необходимый объем вычислений возрастет. Уменьшить сложность передаточной функции  $A(\lambda)$  также можно, если расположить по длине реактора не один, но несколько датчиков.

Из вышеизложенного видно, что построенная система управления при малом изменении своих параметров сохраняет способность стабилизировать неустойчивый стационарный режим работы химического реактора. Последнее означает, что данная система обладает свойством грубости.

В заключение этого пункта отметим, что можно учесть конечные размеры и структуру датчика температуры и, следовательно, предел его чувствительности и при этом, так же как это было сделано выше, построить аналогичную стабилизирующую систему управления. Чувствительность датчика должна быть достаточной, чтобы наблюдать неустойчивую моду с минимальной длиной волны  $l$ . Конечность числа неустойчивых мод обеспечивает выполнение неравенства  $l > 0$ .

6. В предыдущем пункте показано, что при любых величинах запаздываний  $\tau_R$  и  $\tau$  в рефлексе и в управляющей системе соответственно всегда можно построить конечномерную управляющую систему с передаточной функцией  $A(\lambda)$  вида (4.3) такую, что все собственные числа обобщенной краевой задачи (3.4)–(3.6) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости  $\lambda$ . Последнее, однако, не означает, что запаздывание  $\tau$  в системе управления может быть произвольным. Результат, полученный выше, относится лишь к линейной системе, описывающей нестационарное поведение малых возмущений концентрации и температуры. Оценим величину  $\tau$ . Учитывая, что система уравнений для малых возмущений есть линейное приближение для нелинейной системы, предположим, что в начальный момент времени  $t=0$  в химическом реакторе создано некоторое начальное распределение концентраций и температуры, мало отличающееся от распределений этих величин в стационарном режиме. Так как рассматриваемый стационарный режим неустойчив, то возмущения его будут расти в промежутке времени  $(0, \tau)$  свободно, не испытывая на себе воздействия регулятора. Если величина  $\tau$  будет достаточно большой, то при  $t=\tau$  возмущение концентраций и температуры могут стать столь значительными, что использование линейных уравнений для их описания будет неправомерно, и может оказаться, что система управления, описанная выше, будет не в состоянии стабилизировать эти возмущения.

Для амплитуд малых возмущений концентраций и температуры справедлива оценка

$$a(t) \leq a(0) e^{\lambda_* t}, \quad a(\tau) \leq a(0) e^{\lambda_* \tau}, \quad \lambda_* = \max_{1 \leq k \leq N} \operatorname{Re} \lambda_k, \quad 0 \leq t \leq \tau$$

Для того чтобы амплитуды возмущений при  $t=\tau$  удовлетворяли условию применимости линейного приближения (при условии, что  $a(0) \approx a(\tau)$ ), необходимо потребовать выполнения следующего ограничения на величину  $\tau$ :

$$\tau \sim c/\lambda_*, \quad c \sim 1$$

Более точные оценки допустимых величин  $a(0)$ ,  $a(\tau)$ ,  $c$ ,  $\tau$ , при которых построенная система управления стабилизирует неустойчивый стационарный режим, должны быть получены при исследовании взаимодействия нелинейных нестационарных возмущений концентраций и температуры и регулятора.

7. Покажем, что в случае отсутствия диссипативных процессов число неустойчивых мод может стать равным бесконечности, а соответствующий неустойчивый стационарный режим нестабилизируемым. Рассмотрим пример реакции нулевого порядка в реакторе с рефлексом, которую можно описать с помощью одного уравнения для температуры  $T$ . В безразмерных переменных уравнение и граничные условия для  $T$  имеют вид

$$(7.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} = w(T) - S(T - T_w)$$

$$(7.2) \quad T(t, 0) = r_0 T(t - \tau_R, 1)$$

Аналогичная задача для одного частного вида кинетики ( $w(T) = w_0 e^T$ ,  $w_0 = \text{const}$ ) была рассмотрена в [24].

Пусть в стационарном режиме работы химического реактора имеет место следующее распределение температуры:  $T_0 = T_0(x)$ ,  $T_w = T_{w0} = \text{const}$ . Для изучения его устойчивости рассмотрим поведение малых нестационарных возмущений  $T_1$ ,  $T = T_0(x) + T_1(t, x)$ . Температуру стенки по-прежнему считаем равной  $T_{w0}$ . Используя стандартную процедуру, можно показать, что для собственных значений соответствующей краевой задачи справедлива формула

$$(7.3) \quad \lambda_n = \frac{1}{\tau_R + 1} \ln \chi + \frac{2\pi i n}{\tau_R + 1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \chi = \frac{r_0 T_0'(1)}{T_0'(0)}$$

Здесь  $T_0'(0)$  и  $T_0'(1)$  — значения производных функций  $T_0(x)$  при  $x=0$  и  $x=1$  соответственно. При выводе формулы (7.3) было использовано то, что функцию  $T_1$  можно представить в виде

$$T_1(t, x) = e^{\lambda(t-x)} T_0'(x) c, \quad c = \text{const}$$

Из формулы (7.3) видно, что все собственные числа  $\lambda_n$  имеют одинаковые действительные части

$$\operatorname{Re} \lambda_n = \frac{1}{\tau_R + 1} \ln |r_0 T_0'(1) / T_0'(0)|$$

Поэтому либо они все одновременно лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости  $\lambda$ , либо — на мнимой оси, либо — в правой полуплоскости.

В последнем случае число собственных значений с положительной действительной частью бесконечно, причем, как это видно из формулы (7.3), среди них есть собственные значения, отвечающие сколь угодно большой частоте колебаний. Любой датчик температуры обладает конечными размерами, а следовательно, и пределом чувствительности, поэтому моды с достаточно малой длиной волны будут ненаблюдаемы. Следовательно, в том случае, когда бесконечное число мод неустойчиво, а соответствующие им собственные значения с возрастанием номера стремятся к бесконечности, рассматриваемый неустойчивый стационарный режим не стабилизируем.

Это утверждение, очевидно, остается справедливым и для систем уравнений и граничных условий более общих, чем (7.1), (7.2). Можно показать, что для системы уравнений (1.1) при пренебрежении процессами диффузии (пусть даже лишь у части компонентов) возможны неустойчивые стационарные режимы с бесконечным числом неустойчивых мод. При этом коэффициенты диффузии остальных компонентов и коэффициент теплопроводности смеси могут быть сколь угодно велики. Так, например, можно показать, что в реакторе с рециклом, в котором протекает химическая реакция, описанная в [25] (коэффициент диффузии реагента равен нулю, коэффициент теплопроводности равен бесконечности), возможны стационарные режимы с бесконечным числом неустойчивых мод.

Кратко остановимся на обсуждении некоторых результатов работы [24]. В этой работе утверждалось, что с помощью системы управления, изменяющей температуру стенки реактора по закону

$$(7.4) \quad T_w^*(\lambda, x) = A(\lambda) e^{-\lambda x} T_1^*(\lambda, x), \quad T_w = T_w^* e^{\lambda t}, \quad T_1 = T_1^* e^{\lambda t}$$

Можно стабилизировать неустойчивый стационарный режим при передаточной функции  $A(\lambda) = k_c = \text{const}$  и при времени запаздывания  $\tau$  в системе управления, равном нулю. При времени запаздывания  $\tau$  отличном от нуля стабилизация оказывалась невозможной.

Рассмотрим возможность изменения температуры стенки реактора по закону (7.4). Любая физически осуществимая система управления может состоять только из конечного числа термозадающих элементов и конечного числа датчиков температуры, поэтому закон (7.4) может быть реализован лишь приближенно. Выше было отмечено, что любой датчик имеет предел чувствительности и поэтому не в состоянии наблюдать моды с достаточно малой длиной волны. Следовательно, при любом конечном числе термозадающих элементов и датчиков системы управления, аппроксимирующие систему управления (7.4), не стабилизируют рассматриваемый неустойчивый стационарный режим работы химического реактора. Этот вывод справедлив и тогда, когда  $A(\lambda) = k_c = \text{const}$ , а время запаздывания в системе управления  $\tau$  равно нулю.

Как для этой, так и для химических реакций более общего вида (см., например, систему (1.1)) в том случае, когда диссипативные процессы незначительны, можно рассматривать при изучении устойчивости упрощенную систему уравнений и граничных условий, полагая нулем коэффициенты диффузии и теплопроводности. Однако при построении стабилизирующих систем такой подход может оказаться недостаточным, ибо, как было показано, выше, при этом число неустойчивых мод может оказаться равным бесконечности. В этом случае диссипативные процессы, которые в действительности всегда имеют место, следует учитывать. Число неустойчивых мод с учетом диффузии компонентов и теплопроводности смеси всегда конечно, поэтому всегда можно указать систему управления, стабилизирующую неустойчивость протекания химической реакции, хотя ее сложность, связанная с числом неустойчивых мод, будет весьма значительна.

В заключение этого пункта отметим, что закон изменения температуры стенки (7.4) при  $A(\lambda) = k_c$  и  $\tau = 0$  можно реализовать, но не с помощью внешней системы управления, а специальным подбором материала стенки, обладающего необходимыми для реализации закона (7.4) каталитическими свойствами. Последнее фактически связано с изменением кинетики протекающих в реакторе химических реакций и потому не является предметом рассмотрения теории систем автоматического регулирования.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бучин В. А. Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора как объекта с распределенными параметрами с помощью сосредоточенных систем управления. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6, с. 4—16.
2. Максимов Э. И., Мержанов А. Г., Бутаков А. А. Приближенное физическое моделирование химических процессов в реакторе вытеснения. — Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 4, с. 895—898.
3. Седов Л. И. Об общем виде уравнений кинетики химических реакций в газах. — Докл. АН СССР, 1948, т. 60, № 1, с. 73—1976.
4. Aris R. Introduction to the analysis of chemical reactors. New Jersey: Prentice-Hall, 1965, 337 p. (Рус. перев.: Анализ процессов в химических реакторах. Л.: Химия, 1967).
5. Van Cauwenberghe A. R. Further note on dankwerts boundary conditions for flow reactors. — Chem. Engng. Sci., 1966, v. 21, № 2, p. 203—205.
6. Бутаков А. А., Максимов Э. И. Экспериментальное исследование нестационарных процессов при протекании экзотермической реакции в потоке. — ФГВ, 1975, т. 11, № 5, с. 678—684.
7. Бутаков А. А., Максимов Э. И., Шкадинский К. Г. К теории химических реакторов вытеснения. — ФГВ, 1978, т. 14, № 1, с. 62—69.
8. Бутаков А. А., Шкадинский К. Г. Автоколебательный режим протекания экзотермических реакций в трубчатом реакторе. — Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 1, с. 166—169.
9. Иванюк Е. А., Бесков В. С., Слинько М. Г. Число стационарных решений и устойчивость адиабатического процесса в потоке с продольным смещением. — Теор. основы хим. технол., 1967, т. 1, № 4, с. 488—493.
10. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. О единственности и устойчивости стационарных режимов работы проточных химических реакторов. — ПМТФ, 1969, № 4, с. 86—90.
11. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
12. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
13. Дылкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 559 с.
14. Runge C. Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen. — Acta Math., 1885, v. 6, p. 229—244.
15. Келдыш М. В. О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях. — Матем. сб., 1945, 16 (58), № 3, с. 249—258.
16. Мергелян С. Н. Некоторые вопросы конструктивной теории функций. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, т. 37, с. 1—92.
17. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 328 с.
18. Walsh J. L. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. — Providence Amer. Math. Soc., 1960, 398 p. (Рус. перев.: Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 508 с.).
19. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.
20. Ремез Е. Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наукова думка, 1969. 624 с.
21. Альпер С. Я. О сходимости интерполяционных полиномов Лагранжа в комплексной области. — Усп. матем. наук, 1956, т. 11, вып. 5(71), с. 44—50.
22. Корнейчук Н. П. О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций. — Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 4, с. 748—751.
23. Корнейчук Н. П. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций. — Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 3, с. 514—515.
24. Oh S. H., Sehmütz R. A. A study of the control of a tubular reactor with recycle. — Chem. Engng. Commun., 1974, v. 1, p. 199—216.
25. Гупало Ю. П., Новиков В. А., Рязанцев Ю. С. О стабилизации неустойчивого стационарного режима работы реактора вытеснения с интегральным учетом тепловыделения. — ПММ, 1977, т. 41, в. 4, с. 678—687.

Москва

Поступила в редакцию  
24.II.1981