

УДК 533.6.011+538.4

РАЗВИТИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ДУГЕ, ЗАЖИГАЮЩЕЙСЯ НА ТОЧЕЧНОМ ЭЛЕКТРОДЕ В СНОСЯЩЕМ ПОТОКЕ ГАЗА

БАТАЖИН А. Б.

Рассмотрена задача о точечном электрическом источнике, помещенном в однородный поток газа и работающем в режиме дугового разряда.

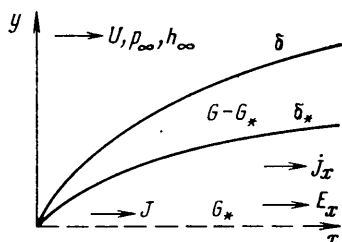
Изучены особенности развития электрической дуги, зажигающейся на точечном катоде, в движущейся недеформируемой среде. Решена стационарная задача о плоской электрической дуге, развивающейся в среде с кусочно-постоянной электропроводностью. Определены тепловые поля, толщина электрической дуги, вольт-амперные характеристики, вкладываемая в дугу мощность. Исследована устойчивость найденного стационарного состояния по отношению к коротковолновым возмущениям. Определена критическая величина электрического тока, при достижении которой развивается неустойчивость.

1. Постановка задачи. Вопросы развития высокотемпературных течений при наличии джоулевого тепловыделения являются актуальной проблемой теории и практики создания электродуговых подогревателей [1—3]. Одно из существенных затруднений при разработке методов расчета таких течений состоит в необходимости задания начальных профилей газодинамических параметров, правильно отражающих особенности тепловых полей вблизи катода. Когда размеры катода невелики по сравнению с поперечным размером канала, развитие электрической дуги в некоторой прилегающей к катоду области можно изучать в приближенной постановке, считая, что дуга зажигается на точечном электроде и развивается в неограниченном пространстве. Это позволяет сформулировать задачу о работающем в дуговом режиме точечном электрическом источнике. С ее помощью находятся поперечные профили температуры (или энтальпии), которые можно использовать в качестве начальных профилей для интегрирования системы уравнений, описывающей течение в подогревателе. Подобная задача имеет и самостоятельный интерес, так как представляет собой пример развития газодинамического течения с источниками специального вида. Интересные исследования в указанном направлении были выполнены в работах [4, 5].

Перейдем к непосредственной постановке задачи о точечном электрическом источнике. Рассмотрим неограниченное пространство, в котором при отсутствии электрического разряда происходит движение газа с однородными скоростью $v_\infty = (U, 0, 0)$, давлением p_∞ , плотностью ρ_∞ и энтальпией h_∞ . Пусть в начале координат имеется точечный электрод (катод), введение которого в поток при отсутствии разряда не изменяет течение газа. Геометрия анода такова, что ось x является осью симметрии электрического разряда. Для плоского и осесимметричного разрядов используются декартова (x, y, z) и цилиндрическая (x, y, θ) системы координат соответственно. Электрический разряд характеризуется заданной величи-

ной суммарного тока J (в плоском разряде ток J рассчитывается на единицу длины в направлении z).

При протекании J происходит повышение температуры T газа, что приводит к изменению газодинамических параметров течения. Электрический ток сосредотачивается в области G_* , где электропроводность газа σ отлична от нуля (фиг. 1). Область G_* (собственно электрическая дуга) в общем случае уже зоны G нагретого разрядом газа. Размеры областей G_* и G , напряжение на дуге, мощность разряда и газодинамические параметры должны находиться в результате решения задачи.



Фиг. 1

Проанализируем уравнения, описывающие рассматриваемое течение. Уравнение энергии содержит член j^2/σ , где j — вектор плотности электрического тока. Будем считать, что магнитные поля, возникающие при протекании тока J , невелики и закон Ома имеет вид $j = \sigma E$. Напряженность электрического поля E в общем случае находится из решения краевой задачи относительно электрического потенциала, которая должна рассматриваться совместно с уравнениями газовой динамики. Однако реализация такой процедуры чрезвычайно сложна. Поэтому ниже используется традиционная аппроксимация члена j^2/σ , основанная на предположениях: $E_x = E(x)$, $|E| \approx |E|$ [6]:

$$J = E \int_0^\infty \sigma(2\pi y)^\nu dy, \quad \frac{j^2}{\sigma} = \sigma J^2 \left[\int_0^\infty \sigma(2\pi y)^\nu dy \right]^{-2} = q \quad (1.1)$$

$$\varphi = \int_0^x E dx$$

Здесь $\varphi(x)$ — разность потенциалов на дуге длины x ; $\nu=0$ и 1 соответственно для плоского и осесимметричного течений.

Оценим характерную толщину $\delta(x)$ зоны G . Выделяющаяся в зоне G_* Джоулева теплота диффундирует в газе в результате его теплопроводности и переносится вместе с движущейся средой. Эффекты диффузии и конвекции тепла в развивающихся течениях имеют одинаковый порядок величины. Из этого условия обычным путем находится оценка $\delta/x \sim \text{Re}^{-1/2}(x)$, где $\text{Re} = \rho U c_p x / \lambda$ — число Пекле, ρ и c_p — некоторые средние плотность газа и его удельная теплоемкость при постоянном давлении, а λ — средний эффективный коэффициент теплопроводности газа. Предполагая $\text{Re} \gg 1$ (что выполняется для большого числа практических приложений), находим, что отношение характерных поперечного δ и продольного l размеров зоны G является малой величиной: $\delta/l \ll 1$.

Разогрев газа и уменьшение его плотности вызывают деформацию однородного потока. Из уравнения неразрывности газа находим, что отношение поперечной скорости v к скорости U является величиной порядка δ/l . Вследствие поперечного движения газа происходит изменение его давления поперек теплового слоя. Порядок величины перепада давления Δp в поперечном направлении определяется из проекции уравнения импульсов на ось y путем сопоставления конвективных членов и члена $\partial p / \partial y$: $\Delta p \sim \rho U^2 (\delta/l)^2$. Согласно этой оценке считаем, что $\partial p / \partial y = 0$ (приближение пограничного слоя).

С другой стороны, наличие теплового слоя, в котором имеется отличное от однородного потока движение газа, вызывает изменение скорости и давления во внешнем течении. Однако эти изменения (за исключением случаев гиперзвуковых течений) оказываются порядка δ/l . Таким образом, можно считать, что градиент давления $\partial p/\partial x$ в спроектированном на ось x уравнении импульсов является малой величиной, пропорциональной δ/l . Без учета градиента давления это уравнение в случае ламинарного движения газа и в случае его турбулентного движения при аппроксимации напряжения трения на основе гипотезы Буссинеска становится однородным уравнением относительно производных скорости u . Учитывая граничные условия $u=U$ при $y \rightarrow \infty$ и $\partial u/\partial y=0$ при $y=0$, находим, что решение уравнения импульсов в проекции на ось x имеет вид $u=U=\text{const}$. Этот интеграл был впервые получен в [5].

Возмущения осевой скорости, обусловленные малым градиентом давления, в общем случае оказываются порядка δ/l . Однако при очень сильном уменьшении плотности газа вблизи оси течения принципиально возможны ситуации, когда малый градиент давления инициирует более значительное (по сравнению с величиной δ/l) изменение осевой скорости. Подобные ситуации в дальнейшем не рассматриваются.

Проведенные оценки позволяют существенно упростить основную систему уравнений и представить ее в следующем виде:

$$(1.2) \quad \rho U \frac{\partial h}{\partial x} + \rho V \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{y^*} \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_T) \frac{y^*}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + q$$

$$\rho V = \rho v + \langle \rho' v' \rangle$$

$$(1.3) \quad U \frac{\partial \rho y^*}{\partial x} + \frac{\partial \rho V y^*}{\partial y} = 0$$

$$(1.4) \quad \rho = \rho(h), \quad \sigma = \sigma(h), \quad \lambda = \lambda(h), \quad c_p = c_p(h)$$

$$(1.5) \quad y=0: \quad \frac{\partial h}{\partial y}=0, \quad V=0; \quad y=\infty: \quad h=h_\infty; \quad x=0: \quad h=h_\infty$$

Здесь V — эффективная поперечная скорость, учитывающая корреляцию пульсаций плотности ρ' и поперечной скорости v' ; λ и λ_T — коэффициенты молекулярной и турбулентной теплопроводности. Источниковый член q определяется формулой (1.1). Тем самым в случае турбулентного движения газа не учитываются дополнительные корреляции, возникающие при распульсировании корреляционного члена. Первое из соотношений в (1.4) представляет собой уравнение состояния газа, записанное при условии $p=p_\infty=\text{const}$. Остальные функции в (1.4) характеризуют собой модель среды. К системе уравнений (1.2)–(1.5) необходимо добавить дополнительные алгебраические или дифференциальные соотношения для определения λ_T . Выражения (1.5) являются граничными условиями для решения уравнений (1.2)–(1.4) относительно неизвестных V и h .

Уравнение неразрывности (1.3) позволяет исключить скорость V из (1.2) и получить одно интегродифференциальное уравнение относительно h . Пусть, например, уравнение состояния газа аппроксимируется соотношением $\rho h = \rho_\infty h_\infty = \text{const}$. Тогда из (1.2) и (1.3) находим уравнение

$$(1.6) \quad U \rho_\infty h_\infty \left[\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{y^*} \frac{\partial h}{\partial y} \int_0^{y^*} y^* \frac{\partial h^{-1}}{\partial x} dy \right] =$$

$$= \frac{1}{y^*} \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + \lambda_T) \frac{y^*}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + q$$

$$(1.7) \quad y=0: \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0; \quad y=\infty: \quad h=h_\infty; \quad x=0: \quad h=h_\infty$$

Автомодельные решения. Пусть коэффициенты переноса, входящие в (1.6), представляются следующими зависимостями:

$$(2.1) \quad (\lambda + \lambda_T) c_p^{-1} = \kappa_\infty A(h^\circ), \quad A(1)=1, \quad h^\circ = h/h_\infty$$

$$(2.2) \quad \sigma = \sigma_* B(h^\circ), \quad B(1)=0$$

Возможность введения функции $A(h^\circ)$ в случае ламинарного течения газа следует из (1.5).

При турбулентном движении газа имеем [7] $\lambda_T/c_p = \rho \nu_T / \text{Pr}_T$, $\nu_T = \text{const } L \sqrt{e}$, где Pr_T — турбулентное число Прандтля, L и e — масштаб и энергия турбулентности. Так как поперечные сдвиговые деформации в рассматриваемом случае отсутствуют ($u=U$), то в наиболее грубом приближении можно считать, что величины L и e равны своим значениям в набегающем потоке. Принимая $\text{Pr}_T = \text{const}$, получаем зависимость (2.1).

Следующее уточнение функции (2.1) можно получить, привлекая какую-либо дифференциальную модель для определения ν_T .

Если воспользоваться моделью турбулентной вязкости [7], то из оценки различных членов, входящих в соответствующее уравнение, получим $\nu_T/\nu_{T\infty} \approx (h/h_\infty)^{-a}$, $a > 0$.

В общем же случае турбулентного движения введение функции $A(h^\circ)$, конечно, необосновано, и необходимо находить совместное решение уравнения (1.6) и дифференциальных уравнений для характеристик турбулентности.

При зависимости (2.1) и (2.2) уравнение (1.6) становится автомодельным в случае плоского течения. Из (1.6) при $v=0$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(2.3) \quad -2h^{\circ'} \int_0^\eta \frac{d\eta}{h^\circ(\eta)} = (Ah^{\circ'})' + \Lambda B(h^\circ) \left(\int_0^\infty B d\eta \right)^{-2}$$

$$(2.4) \quad \eta=0: \quad h^{\circ'}=0; \quad \eta=\infty: \quad h^\circ=1$$

$$h^\circ = h^\circ(\eta), \quad \eta = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{\rho_\infty U}{\kappa_\infty x}}, \quad \Lambda = \frac{J^2}{\sigma_* h_\infty \kappa_\infty}, \quad h^{\circ'} = \frac{dh^\circ}{d\eta}$$

Для толщины δ зоны G , электрического поля E и разности потенциалов ϕ имеем следующие зависимости: $\delta \sim \sqrt{x}$, $E \sim x^{-1/2}$, $\phi \sim x^{1/2}$. Таким образом, интегральный вклад участка длины x в суммарную мощность N дуги при $x \rightarrow 0$ становится несущественным ($N = J\phi \sim x^{1/2}$). Однако в реальной ситуации необходимо дополнительно учитывать прикатодное падение потенциала, которое в данной теории не включается в рассмотрение.

Решение уравнения (2.3) с граничными условиями (2.4) может быть получено для любых конкретных зависимостей коэффициентов переноса от энтальпии.

3. Плоская электрическая дуга в недеформируемой движущейся среде. Для выяснения основных особенностей тепловых процессов в электрических дугах, зажигающихся на катодах малых размеров, рассмотрим простейшую ситуацию, когда продольная скорость, плотность, удельная теплоемкость c и коэффициент теплопроводности среды являются постоянными величинами, ее поперечная скорость равна нулю, а зависимость электропроводности от энтальпии аппроксимируется кусочно-постоянной функцией

$$(3.1) \quad h < h_*: \sigma = 0, \quad h > h_*: \sigma = \sigma_*$$

Зависимость (3.1) воспроизводит основную особенность тепловой задачи: протекание электрического тока в области $0 < y < y_*$, где $y_* < \delta$. В случае стационарного течения кривая $y_*(x)$ представляет собой линию $h(x, y) = h_* = \text{const}$ (изотерму $T = T_*$). Величины h_* и T_* являются известными энтальпией и температурой «включения» проводимости.

Распределение энтальпии в стационарном процессе описывается уравнениями

$$(3.2) \quad 0 < y < y_*: F\{h\} = q, \quad F\{h\} = \rho U \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\lambda}{cy} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^v \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

$$(3.3) \quad y_* < y < \infty: F\{h\} = 0$$

Величина q определяется по формулам (1.1) и (3.1). Граничными условиями для решения уравнений (3.2) и (3.3) служат соотношения (1.7). Дополнительными граничными условиями при $y = y_*$ являются выражения

$$(3.4) \quad y = y_*: h_1 = h_*, \quad h_2 = h_*, \quad \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial y}$$

Здесь и в дальнейшем индексы 1 и 2 отнесены к областям $0 < y < y_*$ и $y > y_*$ соответственно.

Соотношения (3.2)–(3.4) записаны в приближении пограничного слоя.

Система уравнений и граничных условий (3.2)–(3.4) и (1.7) является автомодельной, если $v = 0$. Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} 0 < \eta < \eta_*: -2\eta\theta_1' &= \theta_1'' + \Lambda\eta_*^{-2} \\ \eta_* < \eta < \infty: -2\eta\theta_2' &= \theta_2'' \\ \eta = 0: \theta_1' &= 0; \quad \eta = \eta_*: \theta_1 = \theta_2 = \theta_* \\ \theta_1' &= \theta_2'; \quad \eta = \infty: \theta_2 = 1 \\ \eta &= \frac{y}{2} \sqrt{\frac{\rho U c}{\lambda x}}, \quad \theta = \frac{h}{h_\infty}, \quad \theta_* = \frac{h_*}{h_\infty}, \quad \Lambda = \frac{J^2 c}{\sigma_* h_\infty \lambda}, \\ \eta_* &= \frac{y_*}{2} \sqrt{\frac{\rho U c}{\lambda x}} \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (3.5) находится в квадратурах:

$$(3.6) \quad \theta_1 = \theta_* + \Lambda\eta_*^{-2} \int_{\eta}^{\eta_*} \exp(-\eta^2) \left(\int_0^{\eta} \exp \eta^2 d\eta \right) d\eta$$

$$(3.7) \quad \theta_2 = \theta_* + (1 - \theta_*) \left[\int_{\eta_*}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta \right]^{-1} \int_{\eta_*}^{\eta} \exp(-\eta^2) d\eta$$

$$(3.8) \quad \xi^{-1} = \psi(\eta_*) = \eta_*^{-2} \int_0^{\eta_*} \exp \eta^2 d\eta \int_{\eta_*}^{\infty} \exp(-\eta^2) d\eta$$

$$\xi = \frac{\Lambda}{\theta_* - 1} = \frac{J^2 c}{\sigma_* (h_* - h_\infty) \lambda}$$

$$(3.9) \quad \eta_* \ll 1: \quad \psi(\eta_*) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\eta_*} - \eta_* + \frac{\sqrt{\pi}}{6} \eta_*^2 + O(\eta_*^3)$$

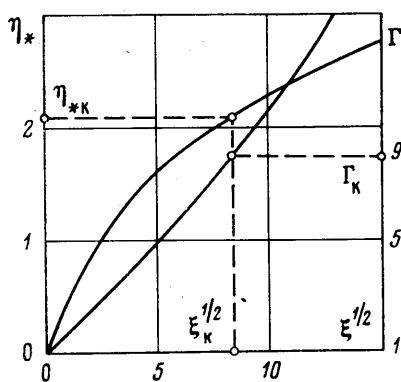
$$(3.10) \quad \eta_* \gg 1: \quad \psi(\eta_*) = \frac{1}{4\eta_*^4} + O\left(\frac{1}{\eta_*^6}\right)$$

$$(3.11) \quad \Phi = \varphi \sqrt{\frac{\sigma_*}{U\rho(h_* - h_\infty)x}} = \frac{\xi^{1/2}}{\eta_*}$$

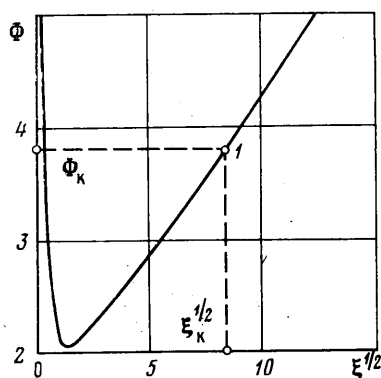
Выражение (3.8) представляет собой уравнение для определения значения автомодельной переменной η_* , соответствующего границе дуги y_* . Зависимость $\eta_*(\xi)$ показана на фиг. 2. Асимптотические представления функций $\psi(\eta_*)$ при малых и больших η_* даются формулами (3.9) и (3.10) соответственно. Вольт-амперная характеристика разряда — зависимость потенциала φ от J — определяется формулой (3.11). Из (3.9)–(3.11) находятся асимптотические зависимости безразмерного потенциала Φ от безразмерного тока $\xi^{1/2}$ при малых и больших ξ :

$$(3.12) \quad \xi \ll 1: \Phi \approx 2(\pi\xi)^{-1/2}, \quad \xi \gg 1: \Phi \approx 2\xi^{1/4}$$

Формулы (3.12) показывают, что зависимость $\varphi(J)$ при малых токах является падающей, а при больших токах — возрастающей вольт-амперной



Фиг. 2



Фиг. 3

характеристикой. Минимум вольт-амперной характеристики соответствует значению $\xi = 1.5$. Зависимость $\Phi = \Phi(\xi^{1/2})$ представлена на фиг. 3. Безразмерная электрическая мощность является монотонно возрастающей функцией от $\xi^{1/2}$.

4. Устойчивость стационарного состояния электрической дуги в недеформируемой среде. Исследуем устойчивость полученного в п. 3 автомодельного решения задачи о плоской электрической дуге. Будем исходить из следующих нестационарных уравнений энергии:

$$(4.1) \quad 0 < y < y_*(x, t): \quad R\{h\} = \frac{J^2}{\sigma_* y_*^2}, \quad y_* < y < \infty: \quad R\{h\} = 0$$

$$R\{h\} = \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho U \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

$$(4.2) \quad y=0: \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0; \quad y=\infty: \quad h=h_\infty; \quad y=y_*: \quad h_1=h_2=h_*,$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{\partial h_2}{\partial y}$$

Здесь индексы 1 и 2 отнесены к областям $0 < y < y_*$ и $y > y_*$ соответственно.

При записи источникового члена в (4.1) предположено, что компонента E_x в нестационарном процессе, так же как в стационарных условиях, не зависит от y : $E=E_x=E(x, t)$. Как и ранее, задается постоянный ток J и принимается, что $|E_x| \approx |E|$.

Уравнения (4.1) записаны в приближении пограничного слоя, использование которого накладывает следующее ограничение на длину λ волны возмущения: $(\delta/s)^2 \ll 1$. (При выполнении этого неравенства можно пренебречь теплопроводностью в осевом направлении.) Запись условия, выражающего непрерывность нормальной составляющей вектора теплового потока на границе электрической дуги, в приближении пограничного слоя возможна при выполнении условия $(\delta/l)(\delta/s) \ll 1$. Напомним, что поперечный и продольный размеры δ и l зоны нагретого газа связаны условием $(\delta/l) \ll 1$.

Сформулированную выше задачу (4.1)–(4.2) можно не связывать с проблемой электрического разряда, а рассматривать как самостоятельную нестационарную тепловую задачу с тепловыми источниками специального типа.

Представим величины h_1 , h_2 и y_* в виде

$$(4.3) \quad \begin{aligned} h_1 &= h_1^{(0)}(x, y) + h_1^{(1)}(x, y, t), & h_2 &= h_2^{(0)}(x, y) + h_2^{(1)}(x, y, t) \\ y_* &= y_*^{(0)}(x) + y_*^{(1)}(x, t) \end{aligned}$$

где верхние индексы (0) и (1) соответствуют невозмущенному состоянию (см. п. 3) и малым возмущениям. Подставляя (4.3) в (4.1)–(4.2), получим систему уравнений (3.5) для стационарного состояния и следующую систему линейных уравнений относительно возмущений

$$(4.4) \quad 0 < y < y_*^{(0)}: \quad R\{h_1^{(1)}\} = -\frac{2J^2 y_*^{(1)}}{\sigma_* [y_*^{(0)}]^3}$$

$$y_*^{(0)} < y < \infty: \quad R\{h_2^{(1)}\} = 0$$

$$(4.5) \quad y=0: \quad \frac{\partial h_1^{(1)}}{\partial y} = 0; \quad y=\infty: \quad h_2^{(1)} = 0$$

$$(4.6) \quad y=y_*^{(0)}: \quad g y_*^{(1)} = \frac{\partial h_1^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial h_2^{(1)}}{\partial y}, \quad h_1^{(1)} - b y_*^{(1)} = 0$$

$$h_2^{(1)} - b y_*^{(1)} = 0$$

$$\left(g(x, y) = \frac{\partial^2 h_2^{(0)}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h_1^{(0)}}{\partial y^2}, \quad b(x, y) = -\frac{\partial h_1^{(0)}}{\partial y} \right)$$

В дальнейшем будут рассматриваться коротковолновые возмущения: $s \ll l$. При использовании такого приближения величину x , входящую в систему уравнений (4.4)–(4.6) через $h_1^{(0)}$, $h_2^{(0)}$ и $y_*^{(0)}$, следует рассматривать как параметр.

Будем искать решение уравнений (4.4) – (4.6) в виде

$$(4.7) \quad h_1^{(1)} = \chi_1(y)M, \quad h_2^{(1)} = \chi_2(y)M; \quad y_*^{(1)} = \gamma M, \\ M = M(x, t) = \exp[i(mx - \omega t)]$$

Здесь i – мнимая единица, $m = 2\pi/s$ – действительное число, которое, согласно сделанным выше предположениям, должно удовлетворять условию $l^{-1} \ll m \ll \delta^{-1}$, т. е. длина волны возмущения должна значительно превосходить поперечный размер δ и быть значительно меньше продольного размера зоны G .

Подставляя (4.7) в (4.4) – (4.6), получим:

$$(4.8) \quad 0 < y < y_*^{(0)}: \chi_1'' - r^2 \chi_1 = k\gamma \\ y_*^{(0)} < y < \infty: \chi_2'' - r^2 \chi_2 = 0 \\ r^2 = \frac{c\rho}{\lambda}(imU - i\omega), \quad k = \frac{2J^2 c}{\sigma_* \lambda [y_*^{(0)}]^3}$$

$$(4.9) \quad y=0: \chi_1' = 0; \quad y=\infty: \chi_2 = 0$$

$$(4.10) \quad y = y_*^{(0)}: \chi_1' = \chi_2' + g\gamma, \quad \chi_1 = \chi_2 = b\gamma$$

Система уравнений (4.8) предназначена для определения функций $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ и постоянной γ . Ее решение с учетом условий (4.9) имеет вид

$$(4.11) \quad \chi_1 = C \operatorname{ch} ry - k\gamma r^{-2}, \quad \chi_2 = D \exp(-ry), \quad \operatorname{Re} r > 0$$

После подстановки (4.11) в (4.10) получаем линейную однородную алгебраическую систему уравнений относительно величин C , D и γ . Нетривиальное решение этой системы существует при условии

$$(4.12) \quad \operatorname{th} ry_*^{(0)} = \frac{gr - br^2}{br^2 + k}$$

Дисперсионное уравнение (4.12) служит для определения r (а, следовательно, при заданном m – частоты $\omega = \omega_r + i\omega_i$). Выражая величины g , b и $y_*^{(0)}$ с помощью стационарного решения (3.6) – (3.8), в котором надо положить $\theta_1 = h_1^{(0)}/h_\infty$, $\theta_2 = h_2^{(0)}/h_\infty$, преобразуем (4.12) к виду

$$(4.13) \quad \operatorname{th} \alpha = \frac{\Gamma \alpha - \alpha^2}{\alpha^2 + 2\Gamma}, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

$$\alpha = ry_*^{(0)}, \quad \Gamma = \eta_* \exp(\eta_*^2) \left[\int_0^{\eta_*} \exp \eta^2 d\eta \right]^{-1}$$

Зависимость $\Gamma = \Gamma(\xi)$ представлена на фиг. 2.

Из решения (4.13) находится зависимость $\alpha = \alpha(\Gamma)$ (или $\alpha = \alpha(\xi)$), где параметр ξ определяется формулой (3.8) (см. также фиг. 2).

Действительная и мнимая части ω выражаются формулами

$$(4.14) \quad \omega_r = mU \left(1 - \frac{\alpha_r \alpha_i}{2\eta_*^2 m x} \right), \quad \omega_i = \frac{U}{4\eta_*^2 x} (\alpha_r^2 - \alpha_i^2) \\ \exp[i(mx - \omega t)] = i(mx - \omega_r t) + \omega_i t, \quad \alpha = \alpha_r + i\alpha_i$$

Согласно (4.14), граница устойчивости определяется условием $\alpha_r^2 = \alpha_i^2$, используя которое, из (4.13) получаем систему двух трансцендентных уравнений относительно величин $\Gamma = \Gamma_k$ (или $\xi = \xi_k$) и $\alpha_r = \alpha_{rk}$. С помощью численного решения этой системы находим $\alpha_{rk} = 2.2$, $\xi_k = 64$. При $\xi < \xi_k$ исходное стационарное состояние является устойчивым, а при $\xi > \xi_k$ развивается неустойчивость. Точка на вольт-амперной характеристике, соответствующая значению $\xi = \xi_k$, расположена на ее возрастающей ветви (см. фиг. 3, точка 1). Участок вольт-амперной характеристики, расположенный левее от точки 1, является устойчивым, а правее — неустойчивым (по отношению к возмущениям рассматриваемого типа). Полученный результат отличается от решения аналогичной задачи об устойчивости «развитого» стационарного состояния дуги в канале, когда стационарные параметры являются функциями только от поперечной координаты y [8]. Для такой задачи вольт-амперная характеристика оказывается устойчивой по отношению к коротковолновым возмущениям [8]. Наличие неустойчивого участка на возрастающей ветви характеристики в рассматриваемом случае связано с эффектами развития тепловых полей в неограниченном пространстве. Однако окончательное заключение об устойчивости стационарного состояния может быть получено после рассмотрения возмущений с произвольной длиной волны и анализа скоростей развития этих возмущений.

Автор выражает благодарность О. Н. Синкевичу и И. М. Руткевичу за обсуждение работы, а также В. И. Грабовскому и В. А. Марееву за проведенные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коротеев А. С., Костылев А. М., Коба В. В., Ломовцев М. А., Куцевалов В. А., Челознов Б. В. Генераторы низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1969.
2. Жуков М. Ф., Коротеев А. С., Урюков Б. А. Прикладная динамика термической плазмы. Новосибирск: Наука, 1975.
3. Жуков М. Ф., Смоляков В. Я., Урюков Б. А. Электродуговые нагреватели газа (Плазмотроны). М.: Наука, 1973.
4. Андерсон Дж. Э. Численное решение для автомодельных температурных профилей в дуговом столбе. В сб.: Тепло- и массоперенос, т. 9. Минск, Наука и техника, 1968.
5. Ведерников Г. А., Урюков Б. А. Численный расчет электрической дуги в потоке воздуха. — Вопросы физики низкотемпературной плазмы, Минск: Наука и техника, 1970.
6. Финкельбург В., Меккер Г. Электрические дуги и термическая плазма. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
7. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н. Турбулентные течения при воздействии объемных сил и неавтомодельности. М.: Машиностроение, 1975.
8. Недоспасов А. В., Хайт В. Д. Колебания и неустойчивости низкотемпературной плазмы. М.: Наука, 1979.

Москва

Поступила в редакцию
1.IV.1980