МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1981

УДК 532.593

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ПОРОЖДАЕМЫХ ДВИЖУЩИМИСЯ СИНГУЛЯРНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

ГОРОДЦОВ В. А., ТЕОДОРОВИЧ Э. В.

При движении тел в неоднородной по плотности жидкости, находящейся в поле силы тяжести, даже при малых скоростях и в отсутствие границ будут возбуждаться волны. Это так называемые внутренние волны (волны плавучести), играющие важную роль в геофизических процессах в океане и атмосфере [1–4]. Широкое распространение при расчетах полей внутренних волн от движущихся тел приобрел метод, основанный на замене тел системами точечных источников. Однако при этом даже задачи о порождении волн точечным источником и диполем обычно решаются приближенно или численно [5–11]. Ниже получены точные результаты, касающиеся спектрального распределения излучения волн и полной энергии излучения за единицу времени для некоторых простейших источников в плоском случае для экспоненциально стратифицированной по плотности несжимаемой жидкости. Отметим, что величина силы волнового сопротивления получается простым делением потерь энергии за единицу времени на величину скорости источника. В заключительном пункте для сравнения кратко сформулированы также некоторые результаты для пространственного случая.

1. Поле линейных внутренних волн за равномерно движущимся источником. Движения несжимаемой идеальной жидкости в поле силы тяжести, возбуждаемые источником массы m, описываются уравнениями

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\right)\rho\mathbf{v}=-\nabla p+\rho\mathbf{g}$$

$$(1.1)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla\right)\rho=0,\qquad \nabla\mathbf{v}=m$$

Если в отсутствие источника в покоящейся жидкости плотность экспоненциально меняется в направлении силы тяжести $\rho_0(z)=\rho_0(0)\exp(2k_Nz)$, то создаваемые слабым источником возмущения можно найти в первом приближении с помощью следующих линеаризованных уравнений:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\left(\nabla+\frac{k_N}{g}\mathbf{g}\right)p-\rho\mathbf{g}=0$$

$$(1.2)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+2\frac{k_N}{g}\mathbf{g}\mathbf{v}=0,\qquad \left(\nabla-\frac{k_N}{g}\mathbf{g}\right)\mathbf{v}=m$$

в которых в отличие от (1.1) под $\mathbf{v}$, m понимаются возмущения скорости и плотность источника, умноженные на $\rho_0^{1/2}$, а под p, ρ — возмущения давления и плотности, деленные на $\rho_0^{1/2}$ [12]. В таких переменных уравнения (1.2) являются уравнениями с постоянными коэффициентами при экспоненциальной стратификации.

Из системы линейных уравнений (1.2) несложно вывести отдельные уравнения для величин $\mathbf{v}$, ρ, p. В дальнейшем понадобится уравнение для давления

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta-k_N^2)+N^2\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]p=-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\frac{\partial m}{\partial t} \tag{1.3}$$

в котором под N понимается частота Вяйсяля — Брента $(gd\ln\rho_0/dz)^{1/2}$.

С помощью запаздывающей функции Грина $G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r},\ t)$, удовлетворяющей уравнениям

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta-k_N^2)+N^2\left(\Delta-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r},t)=\delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

$$G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r},-t)\,|_{t<0}=0$$

решение уравнения (1.3) для давления можно записать в интегральном виде

$$p(\mathbf{r},t)=-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+N^2\right)\frac{\partial}{\partial t}\int dV'\,dt'\,G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\,m(\mathbf{r}',t')$$

или в виде разложения по частотам и волновым векторам

$$p(\mathbf{r},t)=\frac{im_0}{(2\pi)^2}\int d^2k\,d\omega\,\omega(N^2-\omega^2)\,G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k},\omega)f(\mathbf{k})\,\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}$$

в случае раномерно движущегося источника и при использовании преобразований Фурье типа

$$G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^2k\,d\omega\,G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k},\omega)\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}$$

$$m(\mathbf{r},t)=m_0f(\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t)=\frac{m_0}{(2\pi)^2}\int d^2k\,d\omega\,f(\mathbf{k})\,\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)\,e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-i\omega t}$$

в которых под d^2k понимается dk_xdk_z и интегрирования проводятся по всем частотам и волновым векторам.

Благодаря наличию δ-функции под интегралом поле давления фактически оказывается зависящим только от разности $\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t$. Аналогичным образом в движущейся вместе с источником системе координат будут стационарными поля скоростей и плотности.

Если три уравнения системы (1.2) умножить соответственно на $\mathbf{v}$, $\rho g/2k_N$ и p, сложить результаты и проинтегрировать по содержащему источник объему, то получим следующее уравнение сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V dV\,E+\int\limits_{\Sigma_V} d\sigma\,\mathbf{S}=\int\limits_V dV\,pm$$

$$2E=v^2+g\rho^2/2k_N,\quad \mathbf{S}=p\mathbf{v}$$

В случае равномерно движущегося источника плотность энергии является функцией разности $\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t$, а интеграл от плотности энергии по занимаемому возмущениями полному объему благодаря инвариантности объема интегрирования относительно сдвига координат оказывается не зависящим от времени. Тогда в соответствии с уравнением сохранения поток энергии через окружающую источник поверхность равен потерям энергии в единицу времени

$$W=\int dV\,pm \tag{1.4}$$

Поскольку вычисление последней величины оказывается более простым, то в дальнейшем рассмотрим именно W в качестве характеристики энергии излучения в единицу времени. При этом потери энергии на единицу пути равны отношению W/v_0 и дают величину волнового сопротивления.

Подставив вышеприведенные разложения Фурье для давления и источника в формулу (1.4), после несложных преобразований получим общую формулу

$$W = \frac{im_0^2}{2(2\pi)^2}\int d^2k\,d\omega\,\omega(N^2-\omega^2)D(\mathbf{k},\omega)\,|f(\mathbf{k})|^2\,\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0) \tag{1.5}$$

$$D(\mathbf{k},\omega) = G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k},\omega) - G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k},-\omega)$$

в которую входит только нечетная по частотам часть функции $G^{\mathrm{ret}}(\mathbf{k},\omega)$. Эта функция $D(\mathbf{k},\omega)$, как следует из уравнения для запаздывающей функции Грина, связана преобразованием Фурье с решением однородного уравнения и имеет простой явный вид [12]

$$D(\mathbf{k},\omega) = -2\pi i\,\mathrm{sgn}\,\omega\,\delta(\omega^2\mathbf{k}^2 - N^2k_x^2 + \omega^2k_N^2) \tag{1.6}$$

Пользуясь этими формулами, перейдем к анализу потерь энергии на излучение волн в некоторых простейших частных случаях.

2. Излучение волн равномерно движущимся точечным источником. Для точечного источника постоянной интенсивности $m(\mathbf{r},t) = m_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}_0t)$ из (1.5), (1.6) для потерь энергии за единицу времени имеем

$$W = \frac{m_0^2}{4\pi}\int d^2k\,d\omega\,|\omega|\,(N^2-\omega^2)\,\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)\,\delta(\omega^2\mathbf{k}^2 - N^2k_x^2 + \omega^2k_N^2) \tag{2.1}$$

Благодаря наличию двух δ-функций нетрудно выполнить интегрирование по волновым векторам

$$W = \frac{m_0^2}{4\pi}\int d\omega\,\frac{(N^2-\omega^2)}{\sqrt{(N^2-\omega^2)(\omega^2+k_N^2v_{0z}^2) - \omega^2k_N^2v_{0x}^2}} \tag{2.2}$$

причем в последней формуле область интегрирования ограничена частотами, при которых подкоренное выражение неотрицательно.

В частном случае вертикального движения источника ($v_{0x}=0$) отсюда следует формула

$$W|_{v_{0x}=0} = \frac{m_0^2}{2\pi}\sqrt{N^2+k_N^2v_{0z}^2}\left\{\mathbf{K}\left(\frac{N}{\sqrt{N^2+k_N^2v_{0z}^2}}\right) - \mathbf{E}\left(\frac{N}{\sqrt{N^2+k_N^2v_{0z}^2}}\right)\right\} \tag{2.3}$$

в которую входят эллиптические интегралы первого и второго рода. В литературе по внутренним волнам традиционным является приближение Буссинеска [1–4], которое эквивалентно выполнению предельного перехода $k_N\to 0$ в приводимых здесь формулах (точнее, пренебрежению k_Nv_0 по сравнению с N). Но при таком предельном переходе W в (2.3) становится бесконечной ($\mathbf{E}(1)=1$, а $\mathbf{K}(\varkappa)$ логарифмически расходится при $\varkappa\to 1$).

Для горизонтально движущегося источника ($v_{0z}=0$) формула для потерь (2.2) принимает вид логарифмически расходящегося при малых частотах интеграла

$$W|_{v_{0z}=0} = \frac{m_0^2}{4\pi}\int_{-n}^{n} d\omega\,\frac{(N^2-\omega^2)}{|\omega|\sqrt{N^2-\omega^2-k_N^2v_{0x}^2}}, \qquad n = \sqrt{N^2-k_N^2v_{0x}^2}$$

Если $N^2<k_N^2v_{0x}^2$, то излучение будет отсутствовать ($W=0$). Такие условия обычно носят искусственный характер. Действительно, для океана

$N \sim 10^{-2}-10^{-3}$ c^{-1} и $N/k_N=2g/N \sim 1-10$ *км/с* и, следовательно, можно считать $k_N=0$ (приближение Буссинеска).

Слабый (логарифмический) характер расходимости интеграла в выражении для потерь энергии и то, что расходимость обязана области низких частот или больших длин волн (как видно из (2.1) для равномерно горизонтально движущегося источника $\omega=k_x v_{0x}$), позволяет надеяться на компенсацию расходимостей в случае источника дипольного типа, образованного источником и стоком равной интенсивности.

Отметим, что в трехмерном случае для точечного источника также имеет место логарифмическая расходимость интеграла потерь энергии. Однако в противоположность рассматриваемому здесь плоскому случаю она обязана большому вкладу коротких длин волн и вследствие этого не исчезает при переходе к диполю (см. п. 5).

3. Энергия волн, порождаемых равномерно движущимся диполем. Для потерь энергии за единицу времени движущимся диполем $m=$ $=m_0\delta(\mathbf{r}-\mathbf{a}-\mathbf{v}_0 t)-m_0\delta(\mathbf{r}+\mathbf{a}-\mathbf{v}_0 t)$ можно написать аналогичную (2.1) формулу

$$W=m_0 p|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}_0 t+\mathbf{a}}-m_0 p|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}_0 t-\mathbf{a}}=\frac{m_0^2}{\pi}\int d^2k\,d\omega\,|\omega|\,(N^2-\omega^2)\times$$
$$\times\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)\,\delta(\omega^2\mathbf{k}^2-N^2k_x^2+\omega^2k_N^2)\sin^2(\mathbf{k}\mathbf{a})$$

Благодаря наличию двух δ-функций легко выполнить интегрирование по волновым векторам аналогично предыдущему. В результате получим формулу спектрального распределения излучения, в которой в соответствии с вышеприведенными замечаниями положим $k_N=0$:

$$W=\frac{m_0^2}{2\pi}\int\limits_{-N}^{N}d\omega\frac{\sqrt{N^2-\omega^2}}{|\omega|}\left(\sin^2\frac{\omega A_+}{V_+}+\sin^2\frac{\omega A_-}{V_-}\right)$$

(3.1)

$$A_\pm=a_x\omega\pm a_z\sqrt{N^2-\omega^2},\quad V_\pm=v_{0x}\omega\pm v_{0z}\sqrt{N^2-\omega^2}$$

Дополнительное упрощение возникает в случае, когда направление вектора дипольного момента совпадает с направлением движения ($\mathbf{a}\|\mathbf{v}_0$)

$$W=\frac{m_0^2}{\pi}\int\limits_{-N}^{N}d\omega\frac{\sqrt{N^2-\omega^2}}{|\omega|}\sin^2\left(\frac{\omega|\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}_0|}\right) \tag{3.2}$$

Интеграл по частотам оказывается здесь сходящимся, а результат не зависит от направления движения (сходимость при малых частотах обеспечивает интерференционный множитель $\sin^2(\omega|\mathbf{a}|/|\mathbf{v}_0|)$. Однако в более общей ситуации непараллельных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}_0$ это может быть не так. Как видно из (3.1), при горизонтальном движении ($v_{0z}=0$) диполя с ненулевым углом атаки ($a_z\neq 0$) интерференционные множители не гасят большого вклада низких частот и интеграл попрежнему логарифмически расходится.

В случае точечного диполя ($a\to 0$, $m_0\to\infty$, $2am_0=\mathbf{d}=\mathrm{const}$) интегрирование по частотам в (3.2) легко выполняется и получается простой результат

$$W=\frac{d^2N^3}{6\pi v_0^2} \tag{3.3}$$

4. Интерференция излучения двух движущихся диполей. Благодаря волновой интерференции излучения от источника и стока выражения для потерь энергии (3.2) и (3.3) оказались конечными в противоположность расходимости потерь от отдельного источника. Оценим теперь усиление и ослабление излучения в системе из двух диполей за счет волновой интерференции. Ограничимся здесь случаем точечных диполей с векторами дипольных моментов $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, параллельными направлению движения. Тогда $m=-\mathbf{d}_1\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{v}_0 t)-\mathbf{d}_2\nabla\delta(\mathbf{r}+l-\mathbf{v}_0 t)$ и формулу для потерь энергии можно аналогично предыдущему преобразовать к виду

$$W=\frac{1}{4\pi v_0^2}\int\limits_{-N}^{N}d\omega|\omega|\sqrt{N^2-\omega^2}\left\{d_1^2+d_2^2+d_1d_2\left(\cos\frac{\omega L_+}{V_+}+\cos\frac{\omega L_-}{V_-}\right)\right\}$$

$$L_\pm\equiv l_x\omega\pm l_z\sqrt{N^2-\omega^2}$$

Здесь ясно, что первые два слагаемых в фигурных скобках обязаны независимым вкладам точечных диполей (см. (3.2), (3.3)), а другие — взаимной интерференции их излучения.

Для диполей, расположенных на одной оси, вышеприведенный интеграл выражается через функцию Струве $\mathbf{H}_2(Nl/v_0)$:

$$W=\frac{N^3}{6\pi v_0^2}\left\{(d_1+d_2)^2-3\pi d_1d_2\frac{v_0}{Nl}\mathbf{H}_2\left(\frac{Nl}{v_0}\right)\right\} \tag{4.1}$$

Используя следующие асимптотические представления функции Струве

$$\mathbf{H}_2(z)\approx\begin{cases}\dfrac{2}{15\pi}z^3, & z\ll 1\\[2ex] \dfrac{2}{3\pi}z-\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\dfrac{\pi}{4}\right), & z\gg 1\end{cases}$$

получим $W\sim(d_1^2+d_2^2)$ при $l\gg v_0/N$ и $W\sim(d_1+d_2)^2$ при $l\ll v_0/N$. Так что при большом расстоянии между диполями интерференция отсутствует и энергия просто складывается из энергий излучения отдельных диполей. При очень малых расстояниях между диполями излучение усиливается максимальным образом благодаря положительной интерференции. При промежуточных расстояниях W может принимать любые промежуточные значения и может быть меньше простой суммы за счет отрицательной интерференции (последняя имеет место, например, при $3<Nl/v_0<7$).

В случае двух параллельных горизонтально движущихся друг над другом диполей ($\mathbf{d}_1\|\mathbf{d}_2\|\mathbf{v}_0$, $v_{0z}=0$, $l_x=0$) для W получается формула, содержащая только элементарные функции. Принимая для простоты диполи одинаковыми, имеем

$$\begin{aligned}W&=\frac{d^2}{2\pi v_0^2}\int\limits_{-N}^{N}d\omega|\omega|\sqrt{N^2-\omega^2}\left(1+\cos\frac{l_z\sqrt{N^2-\omega^2}}{v_{0x}}\right)=\\ &=\frac{d^2N^3}{3\pi v_0^2}\left[1-3\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda}\right)\right],\quad \lambda\equiv\frac{N}{v_{0x}}l_z\end{aligned} \tag{4.2}$$

Сравнивая формулы (3.3) и (4.2), можно видеть, что при большом удалении диполей друг от друга полные потери равны удвоенным потерям для одного диполя, а в случае близко расположенных диполей потери достигают четырехкратной величины. При промежуточных расстояниях отрицательная интерференция может привести к значительному снижению потерь. Так, при $l_z\approx3{,}87\,v_{0x}/N$ потери составляют 0,508 от величины потерь для одного диполя (3.3). Таким образом, два расположенных друг над другом диполя при определенных расстояниях между ними могут излучать в 2 раза меньше энергии, чем один диполь.

Еще ряд выводов можно сделать на основе анализа общей формулы для горизонтально движущегося источника, следующей из (1.5) при $k_N=0$;

$$W=\frac{m_0^2}{4\pi}\int\limits_0^N d\omega\frac{\sqrt{N^2-\omega^2}}{\omega}\{|f(k_x,k_z)|^2+|f(k_x,-k_z)|^2\}\tag{4.3}$$

Здесь подразумевается, что $k_x=\omega/v_0$, $k_z=\sqrt{N^2-\omega^2}/v_0$.

В частности, из формулы (4.3) видно, что для полностью симметричного распределения источников на плоскости (не зависящего от направления) величина W оказывается бесконечно большой.

Важным для приложений является вопрос о связи рассмотренных задач о порождении волн движущимися массовыми источниками с задачами о порождении внутренних волн при движении тел в неоднородной жидкости. Обычно надежды на наличие такой связи основываются на хорошо известном моделировании тел простыми источниками в случае однородной идеальной жидкости. При условии малости размеров тел по сравнению с масштабами влияния неоднородности представлялось возможным пренебречь неоднородностью жидкости в окрестности тела и использовать подобное моделирование в случае неоднородной жидкости [6]. Однако этот вопрос требует дальнейшего анализа. Среди рассмотренных выше примеров в случае двух измерений имеются примеры с бесконечностью энергии излучения волн. Парадокс бесконечной энергии излучения имеет место и в пространственных задачах. Причем, как видно из следующего пункта, он имеет несколько другой характер.

5. Энергия излучения внутренних волн горизонтально движущимся источником (пространственная задача). Ограничившись приближением Буссинеска ($k_N=0$) совершенно аналогично двумерному случаю можно получить общую формулу для величины потерь энергии (ср. (1.5), (2.1))

$$W=\frac{m_0^2}{8\pi^2}\int d^3k\,d\omega|\omega|(N^2-\omega^2)|f(\mathbf{k})|^2\times\tag{5.1}$$
$$\times\delta(\omega^2\mathbf{k}^2-N^2k_x^2-N^2k_y^2)\delta(\omega-\mathbf{k}\mathbf{v}_0)$$

Проводя интегрирование по угловым переменным в пространстве волновых векторов $\mathbf{k}$ ($k_x=k\sin\theta\sin\varphi$, $k_y=k\sin\theta\cos\varphi$, $k_z=k\cos\theta$) в случае горизонтально движущегося источника общего вида получим (ср. (4.3))

$$W=\frac{m_0^2}{8\pi^2}\int\limits_0^N d\omega\sqrt{N^2-\omega^2}\int\limits_{N/v_0}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{k^2v_0^2-N^2}}\{|f(k_x,k_y,k_z)|^2+\ldots\}\tag{5.2}$$

Здесь $k_x=\omega/v_0$, $k_y=\omega\sqrt{k^2v_0^2-N^2}/v_0N$, $k_z=k\sqrt{N^2-\omega^2}/N$, а под многоточием понимаются еще три аналогичных выписанному слагаемых, отличающихся знаком перед одной из компонент волнового вектора.

Из этой формулы видно, что, несмотря на ограничение (сверху) частотного состава излучения и состава излучения по волновым числам (снизу), для некоторых важных типов источников имеет место расходимость интеграла по волновым числам при больших значениях волновых чисел.

Например, для протяженного только вдоль оси движения источника ($f(\mathbf{r})=\nu(x)\delta(y)\delta(z)$) интегрирования по ω и по k в (5.2) разделяются

$$W=\frac{m_0^2}{2\pi^2}\int_0^N d\omega\sqrt{N^2-\omega^2}\left|\nu\left(\frac{\omega}{v_0}\right)\right|^2\int_{N/v_0}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{k^2v_0^2-N^2}}$$

и очевидна логарифмическая расходимость второго интеграла. Точечный источник и продольный диполь принадлежат к этому классу источников.

Этот парадокс бесконечной энергии излучения волн от движущегося диполя или произвольного одномерного продольного распределения источников требует в случае стратифицированной жидкости усовершенствования часто используемого моделирования тел диполями и усложнения обычной теории тонкого вытянутого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана. М.: Мир, 1969.
2. *Краусс В.* Внутренние волны. Л.: Гидрометеоиздат, 1968.
3. *Эккарт К.* Гидродинамика океана и атмосферы. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
4. *Госсард Э. Э., Хук У. Х.* Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978.
5. *Wu T. Y., Mei C. C.* Two-dimensional gravity waves in a stratified ocean.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, No. 3.
6. *Miles J. W.* Internal waves generated by a horizontally moving source.— Geophys. Fluid Dyn., 1971, v. 2, No. 1.
7. *Стурова И. В.* Волновые движения, возникающие в стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.— ПМТФ, 1974, № 6.
8. *Никишов В. И., Стеценко А. Г.* Плоские внутренние волны, возникающие в стратифицированной жидкости при обтекании системы источник — сток. В кн.: Гидромеханика. Респ. межвед. сб., 1977, вып. 36.
9. *Стурова И. В., Сухарев В. А.* Плоская задача о волновых движениях, возникающих в непрерывно стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4.
10. *Докучаев В. П., Долина И. С.* Плоская задача о волновых движениях, возникающих в непрерывно стратифицированной жидкости при обтекании погруженного тела.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 4.
11. *Олейник А. Я., Стеценко А. Г., Никишов В. И.* Внутренние волны, вызванные системой источников и стоков в потоке слабо стратифицированной жидкости.— Докл. АН УССР, Сер. А, 1979, № 1.
12. *Городцов В. А., Теодорович Э. В.* Линейные внутренние волны в экспоненциально стратифицированной идеальной несжимаемой жидкости. М. 1978 (Ин-т проблем мех. АН СССР. Препринт № 114).

Москва

Поступила в редакцию
9 VII 1979