

УДК 532.59+538.4

НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСПАД ТОНКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ

БАШТОВОЙ В. Г., ПОЛЕВИКОВ В. К.

Вопросы нелинейного развития волновых возмущений в жидких струях при учете капиллярных сил рассмотрены в целом ряде работ [1--5]. Наиболее эффективная методика исследования этих вопросов с использованием численного счета развита в последнее время в [3--5]. При этом полезным оказывается сведение с помощью ряда допущений исходных уравнений к системе уравнений для функций, не зависящих от радиальной координаты. В [3] такие уравнения получены для сплошной струи при условии постоянства давления в ее сечении и независимости профиля скорости в струе от радиальной координаты. Аналогичные уравнения получены в настоящей работе при условии малости толщины цилиндрического слоя, имеющего внутри твердую границу, и вследствие этого они имеют также аналогию с уравнениями «мелкой воды» [6].

Появление намагничивающихся жидкостей открыло возможность моделирования и исследования указанных выше процессов на неподвижных цилиндрических слоях жидкости, в частности в условиях гидроневесомости, когда намагничивающаяся жидкость располагается цилиндрическим слоем вокруг проводника с током [7, 8]. Процесс распада цилиндрического столба намагничивающейся жидкости исследован к настоящему времени лишь в линейном приближении. Линейная теория дает хорошее согласие с экспериментом для пороговых значений величин, определяющих начало неустойчивости (магнитного числа Бонда Bo_m), и длин волн наиболее опасных возмущений [7, 8]. Однако этот процесс сопровождается и существенно нелинейными эффектами, приводящими, в частности, к появлению в спектре развивающихся возмущений более высоких гармоник, ответственных за образование сателлитов, отчетливо наблюдающихся в экспериментах.

1. Рассматривается слой намагничивающейся жидкости, образованный вокруг цилиндрического проводника радиуса R с током I и окруженный немагнитным газом, имеющим постоянное давление P_g и не оказывающим влияния на динамические процессы в жидкости. Сила тяжести предполагается отсутствующей. Ось z цилиндрической системы координат (r, θ, z) направлена вдоль оси проводника. Кроме того, рассматриваются только осесимметричные волновые возмущения, распространяющиеся вдоль слоя, как самые опасные с точки зрения его устойчивости. Опасность неосесимметричных возмущений исключается наличием внутри слоя твердого проводника с током.

Магнитное поле цилиндрического проводника с током $H_0 = I/2\pi r$ создаст в намагничивающейся жидкости радиальную объемную силу $F_m = -\mu_0 M \partial H / \partial r$ (здесь μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, M — намагниченность жидкости), обеспечивающую при определенных условиях существование устойчивого цилиндрического слоя жидкости с внешним радиусом a . При сохранении осевой симметрии задачи магнитное поле касательно к свободной поверхности, что исключает магнитный скачок давления и возмущения поля на ней. Жидкость считается изотермической, невязкой, неэлектропроводной, и для намагниченности принимается линейный закон $M = \chi H$ ($\chi = \text{const}$). Роль магнитного поля в данной ситуации сводится только к созданию в жидкости радиальной объемной силы, направленной к оси слоя. При выключении тока в проводнике эта сила исчезает,

цилиндрический слой становится неустойчивым и распадается под действием капиллярных сил на капли.

Уравнения, описывающие динамику жидкости в рассматриваемом случае, сводятся к уравнению Лапласа для потенциала скорости φ , интегралу Коши — Лагранжа, а также к условиям на свободной поверхности, координата r которой будет обозначаться буквой ξ , и твердой поверхности внутри слоя

$$(1.1) \quad \Delta\varphi=0, \quad p+\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{1}{2} \rho(\nabla \varphi)^2-\psi=c(t), \quad F_m=\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \psi=\frac{\mu_0 \chi I^2}{8 \pi^2 r^2}$$

$$(1.2) \quad p=p_s+\alpha\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}+(\nabla \varphi)(\nabla \xi)=\frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (r=\xi)$$

$$R_1^{-1}+R_2^{-1}=(1+\xi'^2)^{-3/2}[(1+\xi'^2)/\xi-\xi'']$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r}=0 \quad (r=R)$$

В выписанных уравнениях кроме уже определенных приняты следующие обозначения: p — давление, ρ — плотность, α — коэффициент поверхностного натяжения, t — время, ψ — потенциал магнитной силы, штрих означает дифференцирование по координате z .

Для удобства дальнейшего рассмотрения целесообразно ввести безразмерные величины: радиальную координату $x=(r-a)/(a-R)$ с пределами изменения $[\varepsilon, -1]$, где ε — безразмерная координата свободной поверхности, а начало отсчета $x=0$ находится на невозмущенной равновесной поверхности слоя. В качестве масштаба по координате z принимается равновесный внешний радиус слоя a ($y=z/a$). Тем самым предполагается рассмотрение возмущений с длиной волны порядка a , что оправдывается их наибольшей опасностью с точки зрения устойчивости слоя. Безразмерные время τ и потенциал скорости Φ вводятся следующим образом: $\tau=t/t^*$, $\Phi=\varphi t^*/a^2$, $t^*=\sqrt{\rho a^3/\alpha \delta}$, где $\delta=(a-R)/a$ — безразмерная толщина слоя, являющаяся при дальнейшем рассмотрении малым параметром.

Для безразмерных величин уравнение (1.2) принимает вид

$$(1.4) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}+\Phi' \varepsilon'=\delta^{-2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

из которого следует, что производная $\partial \Phi/\partial x$ должна определяться с точностью на два порядка по δ большей, чем остальные функции. Удовлетворяющее этому требованию и граничному условию (1.3) решение уравнения Лапласа

$$\frac{1}{1+\delta x} \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\delta x) \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]+\delta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=0$$

в низшем по δ приближении имеет вид

$$(1.5) \quad \Phi(x, y, \tau)=f(y, \tau)-\delta^2 f''(x^2/2+x)$$

где $f(y, \tau)$ — неизвестная функция, подлежащая определению при дальнейшем решении задачи. С учетом (1.5) граничные условия (1.2) при $x=\varepsilon$ с точностью до членов первого порядка по δ дают:

$$(1.6) \quad (Bo_m-1) \varepsilon-\varepsilon''+f'+1/2 f''=0$$

$$(1.7) \quad \varepsilon+f' \varepsilon'+f''(1+\varepsilon)=0, \quad Bo_m=\frac{\mu_0 \chi I^2}{4 \pi^2 \alpha a}$$

Здесь штрих над безразмерными величинами означает дифференцирование по y , точка — по безразмерному времени τ , а магнитное число Бонда является отношением магнитной силы к силе поверхностного натяжения [8].

Уравнения (1.6), (1.7) представляют собой нелинейные уравнения «мелкой воды» для тонкого цилиндрического слоя жидкости с твердой внутренней границей при наличии радиальной силы. Первый член в уравнении (1.6) описывает действие объемной магнитной силы (Bo_m) и капиллярной, обусловленной равновесной цилиндрической кривизной поверхности (-1). Обращает на себя внимание тот факт, что таким же членом описывалось бы и действие силы тяжести на плоскую свободную поверхность в приближении «мелкой воды». Поэтому вследствие принятого приближения (малости толщины слоя по сравнению с его радиусом) при соответствующем переопределении коэффициента (Bo_m-1) система уравнений (1.6), (1.7) описывает нелинейные гравитационно-капиллярные волны на плоской «мелкой воде». Причем значение коэффициента $Bo_m-1 > 0$ соответствует силе тяжести, направленной внутрь слоя, а $Bo_m-1 < 0$ — наружу. В этом смысле рассматриваемый распад тонкого цилиндрического слоя при $Bo_m-1 < 0$ эквивалентен неустойчивости Рэлея — Тейлора плоского тонкого слоя жидкости.

Эти уравнения практически совпадают с уравнениями для сплошной цилиндрической струи [3] во втором приближении по искомым функциям. Отличие состоит в появлении магнитного числа Бонда и отсутствии нелинейного члена ϵ^2 в (1.6) и коэффициента $1/2$ перед f'' в уравнении (1.7). Этот коэффициент, в частности, обуславливает в $\sqrt{2}$ раз большее значение инкремента нарастания возмущений для тонкого слоя, чем для сплошной струи, т. е. тонкий слой распадается быстрее сплошной струи того же радиуса.

Аналитическое решение уравнений (1.6), (1.7) проводится методом разложения по малому параметру, в качестве которого выбирается начальная амплитуда возмущений поверхности γ .

Наиболее характерной особенностью решения нелинейных волновых уравнений является появление в дисперсионном уравнении амплитуды возмущений. Это требует решения уравнений по крайней мере в третьем приближении по γ . В соответствии с этим принимается следующее разложение искоемых функций в ряд по степеням γ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \gamma \epsilon_1 + \gamma^2 \epsilon_2 + \gamma^3 \epsilon_3 + \dots, & f &= \gamma f_1 + \gamma^2 f_2 + \gamma^3 f_3 + \dots, \\ \Omega &= \Omega_0 + \gamma^2 \Omega_2 \dots \end{aligned}$$

2. Решение уравнений (1.6), (1.7) проведем для слоя конечной длины L (в единицах внешнего радиуса слоя a), ограниченного твердыми плоскостями $y=0$ и $y=L$, непроницаемыми для жидкости и имеющими угол смачивания с ней 90° . С учетом этого принимаются следующие граничные и начальные условия:

$$(2.1) \quad \epsilon' = f' = 0 \quad (y=0, L), \quad \epsilon = \gamma \cos ky, \quad f = 0 \quad (\tau=0)$$

В соответствии с ними $k=2\pi n/L$, где $n=1; 2; 3 \dots$. Для исследуемого тонкого цилиндрического слоя начальное условие (2.1) обеспечивает сохранение объема жидкости в принятом приближении по δ . Действительно, математическим выражением последнего является равенство

$$\pi \int_0^L (\delta^{-1} + \epsilon)^2 dy = \pi \frac{\Lambda}{\delta^2}$$

которое выполняется с принятой точностью до членов первого порядка по δ . Здесь $\Lambda=2\pi/k$ — длина волны возмущений поверхности.

Как следует из линейной теории, рассматриваемый слой жидкости неустойчив при $Bo_m < 1$ [7, 8], поэтому в дальнейшем принимается $1 - Bo_m \equiv \beta > 0$.

Решение уравнений (1.6), (1.7) в первом приближении по γ с граничными и начальными условиями (2.1) имеет следующий вид:

$$(2.2) \quad \varepsilon_1 = \text{ch } \Omega_0 \tau \cos ky, \quad f_1 = (\Omega_0 k^{-2}) \text{ sh } \Omega_0 \tau \cos ky$$

$$(2.3) \quad \Omega_0^2 = k^2 [(1 - \text{Bo}_m) - k^2]$$

Неустойчивая ситуация характеризуется положительным значением Ω_0^2 . Дисперсионное уравнение (2.3) показывает, что рассматриваемый слой неустойчив относительно всех возмущений, длина волны которых Λ превышает значение $2\pi/\sqrt{1 - \text{Bo}_m}$. При $\text{Bo}_m > 1$ слой устойчив. Наиболее опасные возмущения, отвечающие максимальному значению Ω_0^2 (минимальному времени развития), имеют следующие характеристики (отмеченные нижним знаком *):

$$(2.4) \quad \Lambda_* = 2\sqrt{2}\pi(1 - \text{Bo}_m)^{-1/2}, \quad \Omega_{0*} = 1/2(1 - \text{Bo}_m)$$

При $\text{Bo}_m = 0$ будет $\Lambda_* = 2\pi\sqrt{2} = 8,89$, что соответствует распаду слоя немагнитной жидкости и практически совпадает с длиной волны наиболее опасных возмущений (9,01) для сплошного столба [9]. Толщина слоя практически не влияет на длину волны наиболее опасных возмущений [8]. В соответствии со сказанным ранее, дисперсионным уравнением (2.3) описываются в линейном приближении гравитационно-капиллярные волны и неустойчивость Релея — Тейлора тонкого плоского слоя обычной жидкости (например, предельный случай уравнения (13.52) [6, с. 429], в котором при соответствующем обезразмеривании вместо $1 - \text{Bo}_m$ будет стоять ± 1 в зависимости от направления силы тяжести).

Определенную специфику в анализ дисперсионного уравнения (2.3) и соотношений (2.4) вносит ограниченность по длине рассматриваемого слоя. Она приводит к дискретности спектра длин волн возмущений, разрушающих слой, $\Lambda = L/n$, $n = 1; 2; 3 \dots$. Число капель n , на которое разбивается цилиндрический слой заданной длины L , определяется из формулы (2.4) целой частью выражения $L\sqrt{1 - \text{Bo}_m}/8,89$ или числом на единицу большим, в зависимости от того, какому из них соответствует большее значение Ω . Поэтому в определенных интервалах изменения Bo_m число образовавшихся капель остается постоянным, а затем скачком изменяется на единицу. Это приводит к ступенчатой зависимости $\Lambda_*(\text{Bo}_m)$, описанной на основе экспериментальных наблюдений в [8]. Естественно, что с уменьшением длины слоя, т. е. с уменьшением количества образуемых в результате распада капель, ступенчатый характер зависимости $\Lambda_*(\text{Bo}_m)$ становится выраженным сильнее.

Определяя из решения уравнений (1.6), (1.7) функции второго приближения, получаем с точностью до членов порядка γ^3

$$(2.5) \quad \varepsilon = \gamma \text{ ch } \Omega \tau \cos ky - \frac{1}{8} \gamma^2 \left[\frac{\Omega_0^2}{\Omega_1^2} \left(1 + \frac{3k^2 - \beta}{k^2} \cos 2\Omega_1 \tau \right) + \frac{k^2 - \beta}{k^2} \text{ch } 2\Omega \tau \right] \cos 2ky$$

$$f = \gamma \frac{\Omega_0}{k^2} \text{ sh } \Omega \tau \cos ky + \gamma^2 \frac{\Omega_0(\Omega_0^2 - 2k^4)}{16k^6} \left(\text{sh } 2\Omega \tau - \frac{\Omega_0}{\Omega_1} \sin 2\Omega_1 \tau \right) \times \\ \times \cos 2ky - \gamma^2 \frac{\Omega_0}{16k^2} (\text{sh } 2\Omega \tau - 2\Omega \tau)$$

$$\Omega_1^2 = k^2(4k^2 - \beta)$$

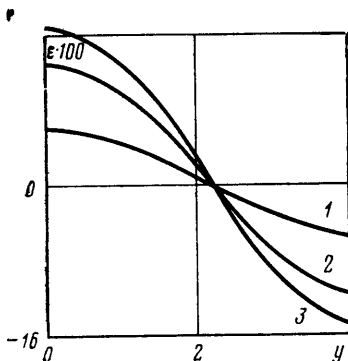
Отметим, что в решениях появляются осциллирующие члены $\cos 2\Omega_1\tau$ и $\sin 2\Omega_1\tau$. Данные решения выписаны при условии $\Omega_1^2 > 0$, т. е. $k > 1/2\sqrt{\beta}$. Это связано с тем, что основное внимание в настоящей работе привлечено к процессу распада слоя (неустойчивой ситуации), характеризуемого в линейном приближении $k_* = \sqrt{\beta}/2$. В противном случае окрестность этой точки выпала бы из рассмотрения.

Поправка второго приближения к инкременту нарастания возмущений Ω находится решением уравнений третьего приближения из условия уничтожения резонансных членов

$$(2.6) \quad \Omega^2 = \Omega_0^2 + \gamma^2 \frac{\Omega_0^2}{16} \left(\frac{3}{2} \frac{\beta}{k^2} - \frac{7}{2} + \frac{\beta - k^2}{4k^2 - \beta} \right)$$

Появление в дисперсионном уравнении амплитуды возмущений γ обуславливает зависимость от нее и длины волны наиболее опасных возмущений. Максимальное значение Ω в принятом приближении по γ равно $\Omega_* = \Omega_{0*} = \beta/2$ и достигается при $\Lambda_* = 2\pi\sqrt{2\beta}^{-1/2}(1 + 9/128\gamma^2)$. Длина волны наиболее опасных возмущений Λ_* возрастает с ростом амплитуды начальных возмущений γ и больше своего значения, даваемого линейной теорией.

Процесс распада слоя, описываемый формулами (2.5), изображен на фиг. 1, где представлена форма свободной поверхности ϵ (для экономии места — в пределах половины длины волны) при $\tau = 5; 6,5; 7$ (кривые 1—3) и значениях параметров $\beta = 1$, $\Omega = 1/2$, $k = 1/\sqrt{2}$, $\gamma = 10^{-2}$. Характерной особенностью рассматриваемого процесса является более быстрый рост гребней на поверхности, чем впадин, тогда как распад сплошного цилиндрического столба может происходить прямо противоположным образом с наиболее интенсивным развитием шейки [1, 3]. Это обстоятельство



Фиг. 1

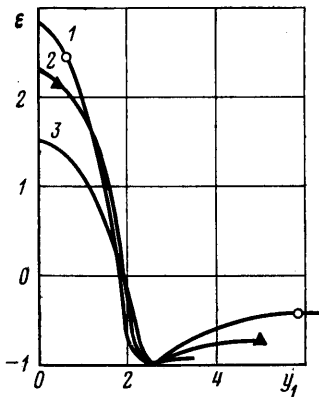
во связано с наличием внутри слоя твердой поверхности, замедляющей развитие возмущений вблизи нее.

3. Более полное исследование процесса распада слоя проводилось путем численного решения уравнений (1.6), (1.7) с граничными условиями (2.1) и различными начальными условиями. Отметим, что численное решение задачи о развитии во времени волн в сплошной струе обычной жидкости при различных начальных возмущениях было проведено в [5]. Поскольку роль объемной силы и изначальной кривизны поверхности (параметр β) выяснена в предыдущей части работы из аналитических соотношений, постольку целесообразно ввести новые временную и пространственную безразмерные координаты $\tau_1 = \beta\tau$, $y_1 = \sqrt{\beta}y$, $l = \sqrt{\beta}L$, позволяющие исключить этот коэффициент из уравнений.

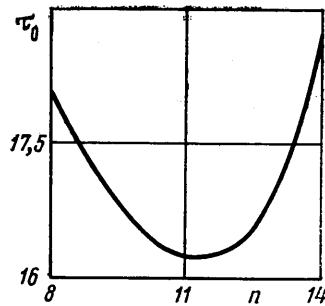
Задача решалась методом сеток. Аппроксимация дифференциальных уравнений осуществлялась по чисто неявной двухслойной схеме со вторым порядком точности по пространству и первым — по времени. Пространственные производные в уравнениях аппроксимировались обычными центральными разностями, а в граничных условиях — односторонними разностными формулами. На каждом временном слое решение находилось методом Зейделя, причем оба разностных уравнения итерировались совместно. Шаг по пространству выбирался равным $l/200$, шаг по времени при расчетах варьировался в диапазоне от 0,001 до 0,005. Для сравнения некоторые варианты задачи просчитывались, кроме того, на более грубой сетке — с числом узлов 101. Все расчеты выполнялись на машине БЭСМ-6. Программа была реализована

вана на ФОРТРАНе. Случайные возмущения в начальный момент времени генерировались стандартной программой — датчиком случайных чисел с равномерным законом распределения.

В результате расчетов обнаружилась сильная чувствительность решения к начальным условиям, что характерно и для процесса распада сплошной струи [3–5]. При нулевом их значении [$\epsilon(0, y_1) = f(0, y_1) = 0$] слой оставался устойчивым. При задании начальных возмущений определенной длины волны слой распадался на капли с заданной начальными условиями периодичностью. Если же в начальный момент времени вводились случайные возмущения вдоль поверхности, то из их спектра выделялась длина волны наиболее опасных возмущений и периодичность образовавшихся капель соответствовала с исследуемой точностью длине волны, даваемой линейной теорией (2.4). Однако при этом развитие отдельных капель происходило неравномерно и изменялось в зависимости от конкретного вида случайного распределения начальных возмущений. Внесение возмущений, например, лишь в центральную часть слоя приводило к интенсивному развитию их именно в этой области с длиной волны наиболее



Фиг. 2



Фиг. 3

опасных возмущений и постепенному распространению их на остальную часть слоя. При этом в ходе счета детально прослеживается процесс образования сателлитов — более мелких капель, расположенных между основными и являвшихся предметом обсуждения в ряде работ, посвященных распаду сплошных струй обычной жидкости [1–5]. Относительные размеры сателлитов существенным образом определяются длиной волны начальных возмущений и с уменьшением ее сателлиты практически исчезают, что и наблюдалось экспериментально в работе [2] в случае сплошной струи обычной жидкости.

Детальные результаты численного счета представлены на фиг. 2, 3. Длина исследуемого слоя l принималась равной 100, при которой в соответствии с линейной теорией слой распадается на 11 капель ($\Lambda_* = 8,89$). Введено полное время развития возмущений τ° , соответствующее моменту соприкосновения свободной поверхности и твердой внутренней границы ($\epsilon(\tau^\circ, y_1) = -1$). В последующие моменты времени $\tau_1 > \tau^\circ$ происходит разрыв сплошности слоя и используемые уравнения становятся неприменимыми. Случайные начальные возмущения задавались оператором случайных величин, а периодические — в виде $\epsilon(0, y_1) = \gamma \cos 2\pi n y_1 / l$, $f(0, y_1) = 0$.

В зависимости от длины волны начальных возмущений (в исследованном диапазоне $n = 8-14$) конечный вид свободной поверхности слоя, соот-

ветствующий моменту времени τ° , в пределах половины длины волны представлен на фиг. 2. Кривые 1—3 на фиг. 2 соответствуют $\gamma=10^{-3}$ и $n=8$; 10; 14. При $n>12$ сателлиты становятся практически незаметными. Отношение объема сателлита к объему основной капли уменьшается от 0,3 при $n=8$ до 0,03 при $n=12$. Отмечается уменьшение амплитуд капель с уменьшением длины волны, а также практически постоянное значение точки соприкосновения свободной поверхности с поверхностью проводника ($y_1=2,5$).

Полное время распада слоя τ° растет при отклонении длины волны начальных возмущений от наиболее опасной. Зависимость τ° от n изображена на фиг. 3 для $\gamma=10^{-3}$. Кривая имеет минимум при $n=11$. Однако для исследуемого слоя разность инкрементов Ω для значений $n=11$ и 12 настолько незначительна, что при случайных возмущениях в начальный момент времени очень часто распад слоя происходил на 12 капель вместо 11. Полное время распада слоя, кроме того, сильно зависит от амплитуды начальных возмущений и является практически линейной функцией $\ln \gamma$, имеющей, например при $n=12$, следующий вид: $\tau^\circ=2,51-4,56 \ln \gamma$. Отмеченные качественные особенности распада тонкого цилиндрического слоя намагничивающейся жидкости (за исключением влияния магнитного поля) в основном такие же как и в сплошной струе [3—5]. Однако наличие внутренней твердой границы вносит в этот процесс некоторые новые черты, заключающиеся в существенном замедлении развития впадин (по сравнению с гребнями).

В заключение следует сказать, что в случае устойчивого слоя ($Bo_m > 1$) на основе уравнений (1.6), (1.7) можно провести описание нелинейных волн на цилиндрической поверхности тонкого слоя жидкости, которые в соответствии с магнитным характером объемной силы будут магнитокапиллярными. При этом в значительной мере к данной ситуации применимы результаты исследований гравитационно-капиллярных волн на «мелкой воде».

ЛИТЕРАТУРА

1. Yuen Man Chuen. Non-linear capillary instability of a liquid jet.— J. Fluid Mech., 1968, v. 33, No. 1.
2. Холли Б. Г. О влиянии формы регулярных возмущений поверхности жидкой струи на ее распад на капли.— Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 2.
3. Маркова М. П., Шкадов В. Я. О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 3.
4. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.— Научн. тр. Ин-та мех. Моск. ун-та, 1973, № 25.
5. Герценштейн С. Я., Филянд Л. В., Шкадов В. Я. Неустойчивость и образование капель во вращающейся капиллярной струе.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977.
6. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
7. Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость осесимметричной струи намагничивающейся жидкости.— ПМТФ, 1978, № 4.
8. Архипенко В. И., Барков Ю. Д., Баштовой В. Г., Краков М. С. Устойчивость цилиндрической свободной поверхности намагничивающейся жидкости. Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 4.
9. Лышевский А. С. Закономерности дробления жидкостей механическими форсунками давления. Новочеркасск, 1961.

Минск

Поступила в редакцию
10.VII.1979