МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1981

УДК 532.5

ФОРМУЛА ЖУКОВСКОГО ДЛЯ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ ЦИЛИНДРА В ПРОИЗВОЛЬНОМ УСТАНОВИВШЕМСЯ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

ЯРМИЦКИЙ А. Г.

При выводе классической формулы Жуковского для подъемной силы профиля набегающий поток предполагается безвихревым, прямолинейно-поступательным и не содержащим особенностей. Однако обтекающий контур поток часто является вихревым (например, в следе за телом) и непрямолинейным. В общем виде задача об определении комплексного потенциала течения и сил, действующих на профиль, при наличии в потоке дискретных особенностей рассмотрена Л. И. Седовым [1]. В работе [2] методом Глауэрта исследован один частный случай этой задачи – обтекание плоской пластины расходящимся потоком, а в [3] с помощью теоремы Лагалли найдены аэродинамические характеристики чечевицеобразного профиля в таком потоке и в качестве предельных случаев получены результаты [2]. Тем самым подтверждена возможность распространения метода Глауэрта на задачи о взаимодействии профиля с неоднородным потоком.

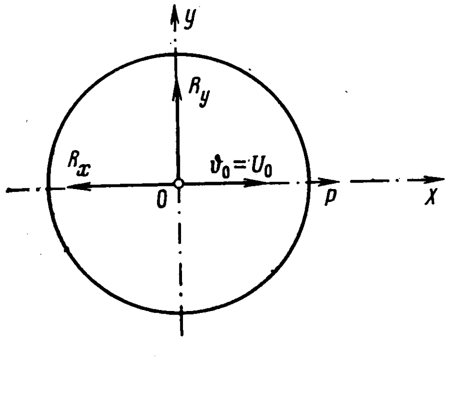
В данной работе производится обобщение формулы Жуковского на случай кругового цилиндра в любом потоке идеальной жидкости, скорость которого на контуре цилиндра допускает разложение в тригонометрический ряд Фурье; обсуждается принцип обратимости движения в случае произвольного установившегося перемещения профиля; наконец, дается обобщение формулы Жуковского для любого контура в однородно (равномерно) завихренном течении.

На важность обобщения теоремы Жуковского в случае неоднородных на бесконечности скоростных полей для задач инженерной гидрологии указывалось, например, еще в работе [4].

Изложение иллюстрируется примерами. Показано, что результаты, описанные в литературе, вытекают из приведенной в данной работе обобщенной формулы Жуковского как частный случай.

1. Полюс полярной системы координат r, θ поместим в центре контура окружности кругового цилиндра радиуса a (фигура). Начало декартовой системы координат будем считать совпадающим с полюсом, а ось x — совмещенной с полярной осью, направление которой совпадает с направлением скорости набегающего потока в центре окружности (при отсутствии цилиндра).

Под подъемной силой R_y условимся понимать составляющую реакции потока, направленную перпендикулярно этой скорости, а под силой сопротивления R_x— составляющую, противоположную указанной скорости.



Пусть известно разложение в ряд Фурье скорости возмущенного течения на контуре кругового цилиндра:

$$v_\theta(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n\geqslant 1}^{\infty} A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta \tag{1.1}$$

В частном случае (1.1) может быть конечной тригонометрической суммой.

Примерами течений, допускающих представление (1.1) для скорости на контуре цилиндра, могут служить безвихревой плоскопараллельный поток с наложенной циркуляцией, скошенный (сдвиговый) и круговой равномерно-завихренные потоки [5, 6], плоскопараллельные потоки с линейной связью между вихрем и функцией тока (в дальнейшем ради краткости именуемые линейно-вихревыми течениями) [7—12].

С помощью интеграла Бернулли, справедливого вдоль любой линии тока и, в частности, вдоль контура обтекаемого цилиндра в вихревом потоке, найдем составляющие аэродинамической силы

$$R_x=\frac{1}{2}\rho a\int_0^{2\pi} v_\theta^2(\theta)\cos\theta\, d\theta,\quad R_y=\frac{1}{2}\rho a\int_0^{2\pi} v_\theta^2(\theta)\sin\theta\, d\theta \tag{1.2}$$

(ρ — плотность жидкости).

В результате возведения в квадрат ряда (1.1) получим новый ряд Фурье

$$v_\theta^2(\theta)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n\geq 1}^{\infty}\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta$$

коэффициенты которого определенным образом выражаются через коэффициенты ряда (1.1) [13].

Для нахождения составляющих R_x и R_y достаточно, однако, только коэффициентов α_1 и β_1:

$$R_x=\frac{1}{2}\rho a\pi\alpha_1;\qquad R_y=\frac{1}{2}\rho a\pi\beta_1 \tag{1.3}$$

$$\alpha_1=\sum_{m\geq 1}^{\infty}A_{m-1}A_m+B_mB_{m+1}=A_0A_1+\sum_{m\geq 1}^{\infty}A_mA_{m+1}+B_mB_{m+1}$$

$$\beta_1=\sum_{m\geq 1}^{\infty}B_m(A_{m-1}-A_{m+1})=A_0B_1+\sum_{m\geq 1}^{\infty}A_mB_{m+1}-B_mA_{m+1}$$

Выразим α_1 и β_1 через физические параметры потока. Для этого прежде всего заметим, что

$$A_0=\pi^{-1}\int_0^{2\pi} v_\theta(\theta)\,d\theta=\frac{\Gamma_{(L)}}{\pi a} \tag{1.4}$$

$$A_1=\pi^{-1}\int_0^{2\pi} v_\theta(\theta)\cos\theta\, d\theta=\pi^{-1}\int_0^{2\pi}(v_y)_{r=a}d\theta=2\langle v_y\rangle \tag{1.5}$$

$$B_1=\pi^{-1}\int_0^{2\pi} v_\theta(\theta)\sin\theta\, d\theta=-\pi^{-1}\int_0^{2\pi}(v_x)_{r=a}\,d\theta=-2\langle v_x\rangle$$

где $\Gamma_{(L)}$ — циркуляция скорости по контуру цилиндра, v_x и v_y — компоненты скорости возмущенного течения, $\langle v_x\rangle$ и $\langle v_y\rangle$ — их средние значения вдоль контура.

Подставив найденные значения коэффициентов A_0, A_1, B_1 в выражения (1.3), получим

$$\alpha_1=2(\pi a)^{-1}\langle v_y\rangle\Gamma_{(L)}+\operatorname{Re}\sigma,\quad \beta_1=-2(\pi a)^{-1}\langle v_x\rangle\Gamma_{(L)}+\operatorname{Im}\sigma$$

$$\sigma=\sum_{m\geq 1}^{\infty}\bar{C}_m C_{m+1},\qquad C_m=A_m+iB_m$$

При

$$\Gamma_{(L)}=\Gamma_x=-\frac{\pi a}{2\langle v_y\rangle}\operatorname{Re}\sigma \tag{1.6}$$

компонента R_x обращается в нуль, а при

$$\Gamma_{(L)}=\Gamma_y=\frac{\pi a}{2\langle v_x\rangle}\operatorname{Im}\sigma \tag{1.7}$$

$$R_y=0.$$

Следовательно,

$$R_x=-\rho\langle v_y\rangle(\Gamma_x-\Gamma_{(L)});\ R_y=\rho\langle v_x\rangle(\Gamma_y-\Gamma_{(L)}) \tag{1.8}$$

так что полная сила реакции жидкости на круговой цилиндр

$$R=R_x+iR_y=i\rho\langle v\rangle(\Gamma_0-\Gamma_{(L)}) \tag{1.9}$$

$$\Gamma_0=-\pi i a\sigma/2\langle v\rangle,\ \langle v\rangle=\langle v_x\rangle+i\langle v_y\rangle$$

Таким образом, подъемная сила R_y (при $\Gamma_{(L)}>\Gamma_0$ она отрицательна) пропорциональна плотности жидкости, средней величине x – компоненты скорости возмущенного потока на контуре цилиндра и разности между величиной фактической циркуляции скорости вдоль этого контура и тем, при котором подъемная сила равна нулю.

Отметим, что в общем случае равенство нулю циркуляции скорости $\Gamma_{(L)}$ вдоль контура цилиндра в отличие от безвихревого обтекания еще не свидетельствует об отсутствии подъемной силы.

В случае, когда скорость на контуре принимает одинаковые значения в симметричных точках, т. е. когда $v_\theta(\pi-\theta)=v_\theta(\theta)$, $\langle v_y\rangle=0$, $\operatorname{Re}\sigma=0$ и, следовательно, $R_x=0$. Этот случай был рассмотрен в [10].

2. Проиллюстрируем применение формул (1.8) на примере линейно-вихревых течений. Так, как было отмечено выше, будем называть течения с линейной связью между вихрем Ω и функцией тока ψ: $\Omega=A+B\psi$. При $A=B=0$ в качестве частного случая получаем потенциальные, а при $A=0$, $B=0$ – однородно-завихренные течения.

Полагая $B\neq 0$, течение направленным вдоль оси x, а градиент скорости отличным от нуля в перпендикулярном направлении (по оси y), распределение скоростей в невозмущенных линейно-вихревых течениях можно представить в двух видах [10]:

$$U_*=\begin{cases}\cos y_*+N\sin y_* & (T\text{-течение})\\ \operatorname{ch}y_*+N\operatorname{sh}y_* & (H\text{-течение})\end{cases} \tag{2.1}$$

$$U_*=U/U_0,\ y_*=y/l,\ N=-\Omega_0 l/U_0$$

Здесь U – скорость невозмущенного течения, U_0 и Ω_0 – значения скорости U и вихря $\Omega=-dU/dy$ при $y=0$, l – некоторый характерный размер потока.

Частным случаем H-течения ($|N|=1$) является экспоненциальное течение (E-течение).

Остановимся для определенности на T-течении. На него может быть наложено некоторое циркуляционное течение с центром в полюсе полярной системы координат (т. е. в центре контура цилиндра), являющееся аналогом потенциального вихря. Исследование, аналогичное [8] для H-течения, приводит к следующим выражениям для компонент скорости циркуляционного потока в T-течении:

$$v_r=0, \quad v_\theta=-\frac{\pi\gamma_0}{2l}Y_1(r_*) \tag{2.2}$$

$$\gamma_0=\frac{1}{2\pi}\lim_{a\to 0}\Gamma(a)=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{r=a} v_\theta\,ds$$

где γ_0 — интенсивность циркуляции $\Gamma(r)$ в начале координат, понимаемой как предельное значение циркуляции скорости вдоль окружности исчезающе малого радиуса с центром в начале координат; $Y_1(r_*)$ — бесселева функция второго рода первого порядка, $r_*=r/l$.

Для малых r $v_\theta\sim 1/r$, а при $r\to\infty$ v_θ исчезает как $1/\sqrt{r}$.

При $l\to\infty$ выражения (2.2) переходят в известные выражения для компонент скорости потенциального вихря, при этом циркуляция $\Gamma=2\pi\gamma_0$ сохраняется вдоль любого контура, охватывающего начало координат.

При конечных значениях l циркуляция скорости вдоль окружности произвольного радиуса r

$$\Gamma(r_*)=2\pi l r_* v_\theta(r_*)=-\gamma_0\pi^2 r_* Y_1(r_*)$$

Учитывая асимптотику функции $Y_1(r_*)$ при малых и больших значениях аргумента, придем к следующему заключению.

В отличие от потенциального течения, в котором циркуляция скорости постоянна, а также от H-течения, в котором она исчезает с удалением от центра вихря [8], в рассматриваемом случае она изменяется от Γ в начале координат до бесконечности вдоль окружности бесконечно большого радиуса.

Если теперь в T-течение с наложенным на него циркуляционным течением (2.2) помещен круговой цилиндр радиуса a, ось которого совпадает с осью вихря (2.2), то выражение для безразмерной скорости возмущенного течения на контуре цилиндра представимо в виде [11]

$$v_*(\theta)=\gamma_*(a_*)-NJ_1(a_*)+ \tag{2.3}$$

$$+\frac{4}{\pi a_*}\sum_{m\geq 1}^{\infty}\left(\frac{\sin(2m-1)\theta}{Y_{2m-1}(a_*)}-N\frac{\cos 2m\theta}{Y_{2m}(a_*)}\right)$$

где $v_*(\theta)=v_\theta(\theta)/U_0$, $J_1(a_*)$ — бесселева функция первого рода первого порядка, $Y_i(a_*)$ — бесселева функция второго рода порядка i, $\gamma_*(a_*)=-\gamma_0\pi a_* Y_1(a_*)/2aU_0$ — безразмерная величина интенсивности циркуляционного течения (2.2), вычисленная вдоль контура цилиндра; $a_*=a/l$.

Используя (1.8), найдем составляющие аэродинамической силы, действующей на цилиндр.

В рассматриваемом случае

$$\langle v_y\rangle=0;\quad R_x=0;\quad \langle v_x\rangle=-U_0\left[\frac{\pi a_*}{2}Y_1(a_*)\right]^{-1}$$

$$\Gamma_{(L)}=2\pi a U_0(\gamma_*(a_*)-NJ_1(a_*))$$

$$\Gamma_y=4U_0lNY_1(a_*)\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{1}{Y_{2n}(a_*)}\left(\frac{1}{Y_{2n+1}(a_*)}-\frac{1}{Y_{2n-1}(a_*)}\right)$$

Следовательно,

$$R_y=2\pi\rho U_0^2a\left\{(\gamma_*(a_*)-NJ_1(a_*))\left[\frac{\pi a_*}{2}Y_1(a_*)\right]^{-1}+\right.$$
$$\left.+N\left(\frac{\pi a_*}{2}\right)^{-2}\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{1}{Y_{2n}(a_*)}\left(\frac{1}{Y_{2n-1}(a_*)}-\frac{1}{Y_{2n+1}(a_*)}\right)\right\} \quad (2.4)$$

При $a_*\to 0$, т. е. с уменьшением неоднородности потока, выражение (2.4) превращается в формулу Жуковского.

С точностью до малых второго порядка малости включительно формулы (2.3) и (2.4) переходят в соответствующие известные формулы для кругового цилиндра в скошенном потоке (потоке с простым сдвигом [6]).

Дополнительная аэродинамическая сила, возникающая на цилиндре вследствие наложения циркуляционного течения (2.2), равна

$$R_\gamma=-\rho U_0\Gamma,\ \Gamma=2\pi\gamma_0 \quad (2.5)$$

Поскольку последнее выражение можно рассматривать в качестве предельного значения (2.4) при $a\to 0$, то оно допускает истолкование как значение аэродинамической силы, действующей на одиночный вихрь в T-течении, при этом U_0 — скорость данного течения в центре вихря. Аналогичный результат имеет место и в H-течении [8], а потому можно сказать — в любом линейно-вихревом потоке.

Формула (2.5) выражает локальную теорему Жуковского (теорему Жуковского «в малом») для потенциальных течений, известную из [14].

Покажем, что эта теорема справедлива не только для линейно-вихревого потока [1].

Пусть $\varepsilon=a/l$ – малый параметр, представляющий собой отношение радиуса цилиндра a к некоторому характерному размеру потока l. Представим скорость U невозмущенного течения с функцией тока ψ_0 в виде ряда по степеням этого параметра:

$$U=U(0)+\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{U^{(n)}(0)}{n!}y_*^n$$

Тогда

$$\Omega(\psi_0)=-\frac{\partial U}{\partial y}=-l^{-1}\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{U^{(n)}(0)}{(n-1)!}y_*^{n-1}$$

$$\frac{d\Omega}{\partial\psi_0}=\frac{1}{U}\frac{d\Omega}{dy}=-\varepsilon^2l^{-2}\left[U''(0)+\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{U^{(n+2)}(0)}{n!}y_*^n\right]\times$$
$$\times\left[U(0)+\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\varepsilon^n\frac{U^{(n)}(0)}{n!}y_*^n\right]^{-1}$$

С точностью до ε^2 включительно

$$\frac{d\Omega(\psi)}{d\psi}=-\varepsilon^2l^{-2}\frac{U''(0)}{U(0)}(=\text{const})$$

[1] На это обстоятельство внимание автора обратил Г. Ю. Степанов.

т. е. с уменьшением относительного радиуса цилиндра условия его обтекания все более приближаются к условиям в линейно-вихревом потоке, а в таком потоке, как было показано выше, теорема Жуковского «в малом» имеет место.

Заметим также, что значение $\gamma_*(a_*)$ связано со значением c(=const) функции тока возмущенного течения на контуре цилиндра следующей зависимостью:

$$c_*=\gamma_*(a_*)\frac{Y_0(a_*)}{Y_1(a_*)}-NJ_0(a_*),\qquad c_*=\frac{c}{U_0l}$$

При $\gamma_*(a_*)=0$ $(c_*=-NJ_0(a_*))$ выражение (2.4) согласуется с [10].

Используя асимптотические разложения бесселевых функций для малых значений аргумента, придем к выводу, что при этом с точностью до a_*^2 включительно

$$R_y|_{\gamma_*=0}=-2\rho U_0\Gamma',\quad \Gamma'=\Omega_0\pi a^2 \tag{2.6}$$

Другими словами, подъемная сила цилиндра в этом случае такая же, как в скошенном потоке (потоке со сдвигом) с той же скоростью U_0 на оси и вихрем, равным Ω_0. Тем самым подтверждается вывод работы [15] о том, что при $\operatorname{grad}\Omega\neq0$ выражение для подъемной силы цилиндра отличается от соответствующего выражения в случае равномерно-завихренного течения на слагаемое порядка не ниже a_*^3.

При $c_*=0$ или $\Gamma_{(L)}=0$ выражение (2.4) принимает более простой, симметричный вид:

$$R_y|_{c_*=0}=8\pi^{-1}\rho U_0^2lN\sum_{n\geqslant1}^{\infty}\frac{1}{Y_{2n-1}(a_*)}\left(\frac{1}{Y_{2n}(a_*)}-\frac{1}{Y_{2n-2}(a_*)}\right)$$

$$R_y|_{\Gamma_{(L)}=0}=8\pi^{-1}\rho U_0^2lN\sum_{n\geqslant1}^{\infty}\frac{1}{Y_{2n}(a_*)}\left(\frac{1}{Y_{2n-1}(a_*)}-\frac{1}{Y_{2n+1}(a_*)}\right).$$

Рассмотрим два приложения полученных выше результатов.

Пусть круговой цилиндр радиуса a помещен в поток типа пограничного слоя [7] с периодическим распределением скоростей

$$U/U_m=\cos\,(y_*-h_*) \tag{2.7}$$

где $h_*=h/l$ – относительное расстояние оси цилиндра от верхней границы слоя, а U_m – скорость набегающего потока на этой границе.

Положив $0\leqslant h\leqslant\delta$ и $l=2\delta/\pi$, где δ – толщина «пограничного слоя», получим $0\leqslant h_*\leqslant\pi/2$. Так как в рассматриваемом случае $N=\operatorname{tg}h_*$, то при $\gamma_*(a_*)=0$ в силу (2.6) с точностью до a_*^2 включительно

$$R_y=\frac{2\pi\operatorname{tg}h_*}{\delta}\frac{\rho U_0^2}{2}S=\frac{\pi\sin 2h_*}{\delta}\frac{\rho U_m^2}{2}S \tag{2.8}$$

где $S=\pi a^2$ – площадь поперечного сечения цилиндра.

Отсюда видно, что в потоке типа пограничного слоя смещение твердой цилиндрической частицы от верхней границы слоя влечет за собой появление «восстанавливающей» силы, причем эта сила возрастает с уменьшением толщины слоя и достигает максимума при $h_*=\pi/4$, т. е. посередине слоя.

Заметим, что выражение (2.7) аппроксимирует распределение скоростей в пограничном слое только в области $0\leqslant h-y\leqslant\delta$ при достаточно малом отношении a/δ [7].

Если имитировать профиль скоростей плоской струи шириной 2δ при $x\to-\infty$ полуволной косинусоиды (2.7) и понимать под U_m скорость на оси симметрии струи, а под h_* – относительное расстояние оси цилиндра от оси струи $(-\pi/2\leqslant h_*\leqslant\pi/2)$, то формула (2.8) с точностью до a_*^2 включительно) опишет аэродинамическое воздействие этой струи на помещенный в нее цилиндр радиуса a. Она показывает, что в потоке с выпуклым профилем скоростей (в отличие от потока типа следа за телом [9]) смещение цилиндра от оси симметрии приводит к появлению силы, стремящейся возвратить его на эту ось.

Когда центр контура цилиндра находится на оси струи $(h=0)$, $R_y=0$ и цилиндр подвержен воздействию только лишь силы P_γ, т. е. при симметричном обтекании на него действует такая же сила, как и в однородном потоке со скоростью U_0 и циркуляцией Γ.

Надо иметь в виду, что если ограничиться областью течения безвозвратных токов жидкости, то следует рассматривать обтекание цилиндра только лишь в полосе шириною 2δ, полагая радиус цилиндра величиной, малой по сравнению с 2δ.

Аналогично с помощью (1.8) можно найти подъемную силу цилиндра в H-течении [12] [1], в частности в потоке типа следа за телом [9].

Формулы (1.8) или (1.9) применимы к любому потоку, выражение для скорости которого допускает разложение в ряд Фурье (1.1) на контуре цилиндра. Основная трудность, конечно, заключается в нахождении коэффициентов этого разложения.

3. Покажем, что для кругового цилиндра в однородно-завихренном потоке (Ω=const) $\langle v\rangle=v_0$, где v_0 — скорость потока в отсутствие цилиндра в той точке, где располагается центр его контура (окружности).

Действительно,

$$\langle \bar v\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(a,\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=a}\frac{\bar v(z,\bar z)}{z}\,dz \tag{3.1}$$

По теореме об окружности для однородно-завихренного потока [16]

$$\bar v(z,\bar z)=\bar v_\infty(z,\bar z)-\frac{a^2}{z^2}\left(v_\infty\left(\frac{a^2}{z},\frac{a^2}{\bar z}\right)-\frac{1}{2}i\Omega\frac{a^2}{\bar z}\right) \tag{3.2}$$

где $\bar v_\infty(z,\bar z)$ — комплексная скорость невозмущенного течения.

С учетом этого, а также принимая во внимание, что на контуре цилиндра $z\bar z=a^2$ и $\oint_{(L)}\frac{\bar z\,dz}{z}=0$, представим выражение (3.1) в виде

$$\langle \bar v\rangle=\frac{1}{2\pi i}\oint_{(L)}\frac{\bar v_\infty(z,\bar z)+{}^1/_2\, i\Omega\bar z}{z}\,dz+ \tag{3.3}$$

$$+\frac{1}{2\pi i a^2}\oint_{(L)}\overline{z(\bar v_\infty(z,\bar z)+{}^1/_2\, i\Omega\bar z)\,dz}$$

В случае отсутствия особенностей в потоке функция

$$\bar v_\infty(z,\bar z)+\frac{1}{2}i\Omega\bar z$$

аналитична внутри замкнутой области, ограниченной контуром цилиндра [17].

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{(L)}\frac{\bar v_\infty(z,\bar z)+{}^1/_2\, i\Omega\bar z}{z}\,dz=\bar v_\infty(0)=\bar v_0$$

а второй интеграл в правой части (2.3) равен нулю.

Таким образом, в случае однородно-завихренного потока $\langle v\rangle=v_0$, т. е. среднее значение скорости возмущенного течения на контуре кругового цилиндра равно значению скорости набегающего потока в центре этого контура (при условии отсутствия цилиндра).

С помощью той же теоремы об окружности можно убедиться, что число слагаемых в выражении для σ не может превысить порядка p полюса функции

$$\bar v_\infty(z,\bar z)+\frac{1}{2}i\Omega\bar z$$

в бесконечно удаленной точке, так как все C_m с $m>p+1$ обращаются в нуль

[1] В этом случае $\langle v_x\rangle$ совпадает со скоростью, названной в [12] приведенной.

Поэтому в рассматриваемом случае формула (1.9) принимает вид

$$(3.4)\qquad R=i\rho v_0(\Gamma_0-\Gamma_{(L)}),\qquad \Gamma_0=-\frac{\pi i a}{2v_0}\sum_{m\geqslant1}^{p}\bar{C}_mC_{m+1}$$

Итак, обтекание кругового цилиндра однородно-завихренным потоком с динамической точки зрения эквивалентно обтеканию его однородным потоком со скоростью v_0 и циркуляцией $\Gamma=\Gamma_0-\Gamma_{(L)}$.

4. Чтобы обсудить возможность распространения обобщенной формулы Жуковского (3.4) на случай обтекания произвольного профиля однородно-завихренным потоком, воспользуемся обобщением формулы Чаплыгина – Блазиуса для аэродинамической силы R, действующей на контур в таком потоке [17]:

$$(4.1)\qquad \bar{R}=\frac{1}{2}i\rho\oint_{(L)}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2dz+\frac{1}{2}\rho\Omega\oint_{(L)}\overline{\frac{dw}{dz}z\,dz},\qquad \Omega=\mathrm{const}$$

$$\frac{dw}{dz}=\bar{v}+\frac{1}{2}i\Omega\bar{z}$$

Здесь w – комплексный потенциал безвихревой части течения, v – комплексная скорость возмущенного потока, интегрирование ведется вдоль профиля, а при условии отсутствия особенностей в потоке – по любому контуру, охватывающему профиль.

Выражение (4.1) содержится в качестве частного случая в формулах работ [18, 19], позволяющих задачу об обтекании контура однородно-завихренным потоком с вихрем Ω свести к задаче о вращении этого контура с угловой скоростью $\omega=-\Omega/2$ в безвихревом потоке.

Соотношение (4.1) может быть непосредственно получено из известных формул [1], если ввести в рассмотрение вращающуюся с угловой скоростью $\omega=-\Omega/2$ систему координат, неизменно связанную с контуром[1]. При этом к силе, действующей на вращающийся цилиндр и определяемой по формулам [1], придется приложить дополнительно центробежную силу жидкости в объеме цилиндра (в расчете на единицу его длины), если бы она двигалась как твердое тело [6].

В скошенном потоке (течении сдвига) со скоростью U_0 на оси абсцисс

$$(4.2)\qquad \bar{v}=U_0+\frac{1}{2}i\Omega(z-\bar{z})+\frac{dF}{dz},\qquad \frac{dw}{dz}=U_0+\frac{1}{2}i\Omega z+\frac{dF}{dz}$$

где $F(z)$ – комплексный потенциал возмущенного течения.

Подставив (4.2) в (4.1), после преобразований получим

$$(4.3)\qquad \bar{R}=\frac{1}{2}i\rho\oint_{(L)}\left(\frac{dF}{dz}\right)^2dz-i\rho\Omega\,\mathrm{Im}\oint_{(L)}\frac{dF}{dz}z\,dz+i\rho U_0\Gamma$$

где Γ – циркуляция.

При $\Gamma=0$ последняя формула совпадает с формулой [20].

В круговом потоке с центром в точке z_0 и угловой скоростью ω

$$(4.4)\qquad \bar{v}=-i\omega(\bar{z}-\bar{z}_0)+\frac{dF}{dz},\qquad \frac{dw}{dz}=\bar{v}_0+\frac{dF}{dz}$$

($v_0=-i\omega z_0$ – скорость невозмущенного течения в начале координат).

[1] На это также указал автору Г. Ю. Степанов.

Следовательно, в рассматриваемом случае (4.1) принимает вид

$$\bar{R}=\frac{1}{2}i\rho\oint\limits_{(L)}\left(\frac{dF}{dz}\right)^2dz+\rho\omega\oint\limits_{(L)}\overline{\frac{dF}{dz}z\,dz}+i\rho\bar{v}_0\Gamma \tag{4.5}$$

В связи с последним выражением коснемся вопроса о принципе обратимости движения.

Если начало координат поместить в центр тяжести движущегося цилиндра, то при установившемся относительном движении силу, действующую на этот цилиндр, можно найти по формуле [1, 21].

$$\bar{R}_1=\frac{1}{2}i\rho\oint\limits_{(L)}\left(\frac{dF}{dz}\right)^2dz-\rho\omega\oint\limits_{(L)}\overline{\frac{dF}{dz}z\,dz}-i\rho\bar{v}_0\Gamma-i\rho\omega\bar{v}_0S \tag{4.6}$$

где ω — угловая скорость цилиндра, v_0 — скорость центра тяжести его поперечного сечения, а S — площадь этого сечения.

В круговом потоке с направлением вращения по часовой стрелке силу, действующую на неподвижный цилиндр, найдем по формуле (4.5):

$$\bar{R}_2=\frac{1}{2}i\rho\oint\limits_{(L)}\left(\frac{dF}{dz}\right)^2dz-\rho\omega\oint\limits_{(L)}\overline{\frac{dF}{dz}z\,dz}-i\rho\bar{v}_0\Gamma \tag{4.7}$$

Сравнивая (4.6) и (4.7), заключаем, что аэродинамическая сила, действующая на цилиндр, который при постоянной циркуляции Γ совершает поступательное движение со скоростью $v_0=\text{const}$ и вращается с угловой скоростью $\omega=\text{const}$ в неподвижной жидкости, слагается из силы, приложенной к неподвижному цилиндру в круговом равномерно-завихренном потоке с угловой скоростью $-\omega$ и с центром вращения в точке

$$z_0=iv_0/\omega \tag{4.8}$$

и силы

$$R_0=i\rho\omega v_0S=\rho\omega^2Sz_0 \tag{4.9}$$

равной по модулю

$$|R_0|=M\omega^2|z_0|$$

где $M=\rho S$ — масса жидкости, вытесненная цилиндром (в слое единичной толщины).

Это так называемая дополнительная архимедова сила [22], возникающая при равномерном вращении жидкости с полностью увлекаемым цилиндром, направленная к центру вращения независимо от знака угловой скорости.

Из (4.8) вытекает, что для нахождения центра вращения потока надо повернуть вектор скорости центра тяжести профиля на прямой угол в направлении угловой скорости и в этом направлении отложить отрезок длины $|v_0/\omega|$ [1].

5. Обобщим теперь формулу Жуковского на случай произвольного контура в однородно-завихренном потоке. Поле скоростей v возмущенного течения представим в виде суперпозиции двух полей — поля скоростей $v^*=$ $={}^1/{}_2 i\Omega z$ кругового равномерно-завихренного потока с центром вращения

[1] Таким образом, непосредственное использование принципа обратимости движения (без учета дополнительной силы R_0) невозможно. По этому поводу см. также упражнение [6, с. 666].

в начале координат и безвихревого течения со скоростью v° и комплексным потенциалом w [21]:

$$v=v^*+v^\circ \tag{5.1}$$

Предполагая отсутствие особенностей в потоке, будем считать комплексную скорость $\bar{v}^\circ(z)$ регулярной функцией z во внешней по отношению к контуру (L) части плоскости z.

Пусть, далее, $\bar{v}^\circ(z)$ имеет в бесконечности полюс порядка p. Тогда в окрестности бесконечно удаленной точки, как известно, справедливо разложение

$$\frac{dw}{dz}=\bar{v}^0=\sum_{n\geqslant 0}^{p} c_n z^n+\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n} \tag{5.2}$$

Подставив (5.2) в выражение (4.1) и выполнив в нем интегрирование по любому контуру (в частности, по окружности), охватывающему контур (L), получим главный вектор R сил давления жидкости на обтекаемый контур [17]:

$$R=-\pi\rho\left(2\sum_{n\geqslant 0}^{p}\bar{c}_n\bar{c}_{-(n+1)}-ic_{-2}\Omega\right) \tag{5.3}$$

Найдем циркуляцию $\Gamma_{(L)}$ вдоль профиля

$$\Gamma_{(L)}=\int_{(L)}\bar{v}\,dz=\oint_{(L)}\bar{v}^*\,dz+\oint_{(L)}\bar{v}^\circ dz= \tag{5.4}$$

$$=-\frac{1}{2}i\Omega\oint_{(L)}\bar{z}\,dz+2\pi ic_{-1}=\Omega S+2\pi ic_{-1}$$

где S — площадь профиля.

При этом учтено, что, согласно теореме Стокса в комплексной форме [21]

$$\oint_{(L)}\bar{z}\,dz=2iS$$

Из выражения (5.4)

$$c_{-1}=(2\pi i)^{-1}(\Gamma_{(L)}-\Omega S) \tag{5.5}$$

Коэффициент c_0 определим по формуле

$$c_0=\frac{1}{2\pi i}\oint_{(L)}\frac{\bar{v}^\circ\,dz}{z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{(L)}\frac{\bar{v}_\infty{}^\circ\,dz}{z}$$

$$\bar{v}_\infty{}^\circ=\sum_{n\geqslant 0}^{p}c_n z^n$$

Так как, согласно (5.1)

$$\bar{v}_\infty{}^\circ(z)=\bar{v}_\infty(z,\bar{z})+\frac{1}{2}i\Omega\bar{z} \tag{5.6}$$

то

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{(L)} \frac{\bar v_\infty(z,\bar z)+{}^1/{}_2\, i\Omega\bar z}{z}\,dz$$

По теореме Коши для функции $\bar v_\infty(z, \bar z)+i\Omega\bar z/2$, регулярной в замкнутой области, ограниченной контуром (L)

(5.7) $$c_0=\bar v_\infty(0)=\bar v_0$$

Здесь $\bar v_0$ — комплексная скорость невозмущенного течения в начале координат.

Подставляя найденные значения c_{-1} и c_0 в (5.3), получим

(5.8) $$R=-i\rho v_0\left[\Gamma_{(L)}-\Omega S+\pi i v_0^{-1}\left(i\Omega c_{-2}-2\sum_{n\geqslant1}^{p}\bar c_n\bar c_{-(n+1)}\right)\right]$$

Введем обозначение

(5.9) $$\Gamma_0=\Omega(\pi v_0^{-1}c_{-2}+S)+2\pi i v_0^{-1}\sum_{n\geqslant1}^{p}\bar c_n\bar c_{-(n+1)}$$

Тогда (5.8) можно окончательно представить в виде

(5.10) $$R=i\rho v_0(\Gamma_0-\Gamma_{(L)})$$

Если Γ_0 — действительная величина, эта сила направлена перпендикулярно вектору v_0 и соответственно может быть названа подъемной.

В случае кругового цилиндра выражение (5.9) можно упростить. Используя теорему об окружности [21] и соотношения (5.1), (5.7), найдем, что в разложении (5.2) $c_{-(n+1)}=-a^{2n}\bar c_{n-1}$ $(n=1;\ 2;\ldots,\ p)$, в частности $c_{-2}=-a^2\bar c_0=-a^2v_0$. Поэтому

$$\Gamma_0=-2\pi i v_0^{-1}\sum_{n\geqslant1}^{p}a^{2n}c_{n-1}\bar c_n$$

В рассматриваемом случае коэффициенты c_n лорановского разложения (5.2) связаны с коэффициентами ряда (1.1) следующей зависимостью:

$$c_n=-\frac{1}{2}ia^{-n}\bar C_{n+1},\qquad C_n=A_n+iB_n\qquad (n=1,2,\ldots,p)$$

С учетом этого снова приходим к формуле (3.4).

Рассмотрим пример.

В невозмущенном сдвиговом (скошенном) потоке, комплексная скорость которого определяется выражением

$$\bar v_\infty=\frac{1}{2}i\Omega(z-\bar z)-U_0$$

комплексная скорость $v_\infty{}^0$ потенциальной части, согласно (5.6), имеет вид

$$\bar v_\infty{}^0=i\Omega z/2-U_0$$

Следовательно, разложение (5.2) может быть записано следующим образом:

$$\bar v^0=c_1z+c_0+\sum_{n\geqslant1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n}$$

$$c_{-1}=\frac{1}{2}i\Omega,\qquad c_0=-U_0,\qquad c_{-1}=\frac{\Gamma}{2\pi i}$$

Здесь Г – наложенная на течение вокруг цилиндра циркуляция.

В этом случае из выражения (5.5) имеем

$$\Gamma_{(L)}=\Gamma+\Omega S$$

а из соотношения (5.9) получим

$$\Gamma_0=-2\pi\Omega U_0^{-1}\operatorname{Re} c_{-2}+\Omega S$$

Следовательно,

$$R=i\rho U_0\Gamma+2\pi i\rho\Omega\operatorname{Re} c_{-2}$$

что соответствует [6].

6. Покажем применение результатов п. 4 и 5 к определению аэродинамической силы, действующей на произвольный цилиндр, который совершает установившееся движение в жидкости, покоящейся на бесконечности.

Пусть v_0 – скорость центра тяжести его поперечного сечения, а ω – угловая скорость. Начало координат поместим в центр тяжести поперечного сечения цилиндра. Рассмотрим обтекание этого цилиндра круговым потоком с угловой скоростью $-\omega$ и центром вращения в точке $z_0=iv_0/\omega$. Комплексная скорость невозмущенного течения $\bar{v}_\infty=i\omega(\bar{z}-\bar{z}_0)$.

Выделяя с помощью (5.6) комплексную скорость потенциальной части этого течения, получим

$$\bar{v}_\infty{}^\circ=-i\omega\bar{z}_0=-\bar{v}_0$$

Следовательно, ряд Лорана для v_0 имеет в рассматриваемом случае вид

$$\bar{v}^\circ=-\bar{v}_0+\sum_{n\geqslant 1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{z^n},\qquad c_{-1}=\frac{\Gamma}{2\pi i}$$

Тогда

$$\Gamma_{(L)}=\Gamma-2\omega S,\qquad \Gamma_0=2\pi\omega v_0^{-1}c_{-2}-2\omega S$$

Таким образом, на неподвижный цилиндр действует сила

$$R=i\rho v_0\Gamma-2\pi i\rho\omega c_{-2}$$

что тоже соответствует [6].

Последний пример, а также пример, приведенный в конце п. 5, показывают, что формула (5.10) является обобщением результатов, полученных в [6] для случаев кругового и сдвигового потоков.

Сила, приложенная к перемещающемуся цилиндру, согласно п. 4, получается путем добавления к R дополнительной силы R_0, определяемой выражением (4.9). Этот результат совпадает с приведенным в [21].

При обтекании круговым потоком эллиптического цилиндра с полуосями a и b [17]

$$c_{-2}=\frac{1}{2}(b^2U_0+ia^2V_0+abv_0),\qquad U_0=\operatorname{Re} v_0,\ \ V_0=\operatorname{Im} v_0$$

Поэтому на такой цилиндр при установившемся бесциркуляционном движении в жидкости, неподвижной вдали от него, действует сила

$$R=\pi\rho\omega(a^2V_0-ib^2U_0)$$

что полностью согласуется с [1].

В заключение автор выражает признательность Г. Ю. Степанову, который внимательно рассмотрел рукопись, сделал по ней ряд конструктивных замечаний и высказал много ценных пожеланий, направленных на углубление содержания и на улучшение стиля изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. М.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. *Давидсон В. Е.* Плоска пластинка в розбіжному двовимірному потоці нестисливої рідини.— Прикл. механіка, 1962, т. 8, № 5.
3. *Ярмицкий А. Г.*, Аэродинамические силы, действующие на профиль в расходящемся потоке несжимаемой жидкости. В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. Харьков, Изд-во Харьк. ун-та, 1968, вып. 7.

4. *Дементьев М. А.* Транспорт одиночного твердого тела неоднородным потоком жидкости.– Изв. ВНИИгидротехники, 1955, т. 54.
5. *Микута В. И., Новиков Б. Г.* Обтекание профилей круговым потоком.– ПМТФ, 1960, № 3.
6. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
7. *Murray J. D., Mitchell A. R.* Flow with variable shear past circular cylinders.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1957, v. 10, No. 1.
8. *Weissinger J.* Theorie des Tragflügelprofils in exponentieller Scherströmmung.— Ingr.-Arch., 1968, v. 37, No. 1.
9. *Холявко В. И.* Обтекание кругового цилиндра вихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости.– Самолетостроение и техника воздушного флота. Респ. межвед. науч.-техн. сб., 1968, вып. 13.
10. *Ярмицкий А. Г.* Обтекание кругового цилиндра потоками несжимаемой жидкости с линейной связью между вихрем и функцией тока.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 5.
11. *Ярмицкий А. Г.* О поведении критических точек на поверхности кругового цилиндра в неоднородном потоке. В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости. вып. 14. Днепропетровск, 1972.
12. *Цельник Д. С.* Обтекание кругового цилиндра некоторыми вихревыми потоками с непостоянной завихренностью.– Изв. АН СССР, МЖГ. 1973, № 3.
13. *Толстов Г. П.* Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1960.
14. *Голубев В. В.* Лекции по теории крыла. М.– Л.; Гостехиздат, 1949.
15. *Якимов Ю. Л.* Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.
16. *Ярмицкий А. Г.* Обобщение теоремы об окружности на равномерно-завихренные течения несжимаемой жидкости. В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости, вып. 10. Харьков. Изд-во Харьк. ун-та, 1969.
17. *Ярмицкий А. Г.* Определение реакции равномерно-завихренного потока на обтекаемый контур.– ПМТФ, 1968, № 5.
18. *Вильховченко С. Д.* Движение деформирующегося контура в потоке идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3.
19. *Вильховченко С. Д.* Гидродинамическое воздействие на контур со стороны потока идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 1.
20. *Kuo Y.-H.* On the force and moment acting on a body in shear flow.— Quart. Appl. Math., 1943, v. 1, No. 3.
21. *Милн-Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
22. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.

Жданов

Поступила в редакцию
29.XI.1977