

УДК 532.517.013.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ, УВЛЕКАЕМОЙ  
ТУРБУЛЕНТНЫМ ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

ДЕМЕХИН Е. А.

В длинноволновом приближении на основе упрощенной системы уравнений, аналогичной рассмотренной в [1, 2], исследуются волны конечной амплитуды в тонких слоях вязкой жидкости на стенках канала при наличии турбулентного газового потока. Библиографию работ о линейной устойчивости таких плоскопараллельных течений можно найти в [3-5]. Нелинейная устойчивость рассмотрена в [6]. Периодическое стационарное решение ищется в виде разложения в ряд Фурье, коэффициенты которого находятся вблизи верхней кривой нейтральной устойчивости методом Ньютона, вблизи нижней ветви кривой устойчивости — методом [7, 8].

1. На горизонтальной плоскости  $y=0$  течет волнистая пленка жидкости  $0 < y < h(x, t)$ . В области  $h < y < 2L$  течет турбулентный газовый поток. Движение считается плоским. Как и в [6], величины, относящиеся к газу, обозначаются заглавными латинскими буквами или греческими с индексом  $g$ ; величины, относящиеся к жидкости, — малыми латинскими или греческими с индексом  $l$ .

Уравнения движения для осредненных по турбулентным пульсациям величин в газе, уравнения движения жидкости и граничные условия имеют вид

$$(1.1) \quad y=2L: U=0; \quad h(x, t) < y < 2L: \operatorname{div} \mathbf{U}=0$$

$$\frac{DU}{Dt} = -\frac{1}{\rho_g} \nabla p + \frac{\partial \tau_g^x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_g^y}{\partial y}, \quad \tau_g^x = \tau_v^{xx} e_x + \tau_g^{xy} e_y$$

$$(1.2) \quad y=h(x, t): \mathbf{U}=\mathbf{u}, \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$(1.3) \quad -pn^i + \tau_i^{im} n_m + \sigma K(h) n^i = -Pn^i + \tau_g^{im} n_m \quad (i, m=1, 2)$$

$$(1.4) \quad 0 < y < h: \operatorname{div} \mathbf{u}=0, \quad \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_l} \nabla p + \mathbf{g} + \Delta \mathbf{u}, \quad y=0: \mathbf{u}=0$$

Здесь  $\tau_g^{ij}$  — компоненты тензора напряжений молекулярного и турбулентного трения в газе;  $K(h)$  — кривизна поверхности раздела  $h$ ;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения пленки;  $n_i$  — составляющие вектора нормали к поверхности раздела;

$$\mathbf{U}=(U, V), \quad \mathbf{u}=(u, v)$$

Для случая установившихся волн необходимо добавить еще для заданного волнового числа  $k$  условие периодичности по  $k(x-ct) \in (0, 2\pi)$ . Если принята та или иная полумпирическая гипотеза относительно выражения для  $\tau_g^{ij}$ , то задача полностью поставлена.

Далее везде полагается:  $a = \mu_g/\mu_l \ll 1$ ;  $b$  — средняя толщина пленки намного меньше высоты канала,  $h_0/L \ll 1$ ;  $e$  — верхняя стенка находится до-

статочно далеко от поверхности раздела, чтобы не влиять на волновые режимы (высота канала намного больше длины волны,  $kL \gg 1$ );  $g$  — длина волны намного больше средней толщины пленки,  $kh_0 \ll 1$ ;  $\delta$  — для возмущенного движения в газе справедлива квазиламинарная модель [9];  $e$  — рассматриваются в соответствии с экспериментальными данными и результатами линейной теории [6] волны со скоростями порядка средней скорости жидкости.

Если воспользоваться допущениями  $a - e$ , то можно существенно упростить задачу. В [5, 6] показано, что при принятии  $a, b, e$  поток газа можно считать потоком над жесткой неподвижной волнистой стенкой, задача в газе отделяется и может рассматриваться отдельно. С другой стороны, как показано в [6], при выполнении  $b - g, e$  нелинейностью в газе можно пренебречь по сравнению с нелинейностью в пленке жидкости и считать газ линейной системой.

Физический смысл последнего утверждения заключается в следующем. Если имеется неподвижная или движущаяся с малой по сравнению с характерной скоростью в газе жесткая волнистая стенка, то возмущения, вызванные стенкой, экспоненциально затухают при удалении от ее поверхности. Область влияния волнистости — порядка длины волны. При достаточно малых отношениях толщины пленки к ее длине возмущения можно считать линейными. Если же стенка движется со скоростью, совпадающей с собственным значением  $s_n$  для газового потока, то поведение возмущений меняется — возмущение становится собственной функцией для газового потока и значение амплитуды волнистой поверхности не дает представления о характерной амплитуде возмущения в газе. В частном случае амплитуда стенки может стремиться к нулю, но, тем не менее, в газе реализуется неустойчивость Толлмина — Шлихтинга. Иначе говоря, в двухфазном потоке есть возможность двух типов неустойчивости и соответственно двух типов волновых режимов. Для ламинарного газа наличие этих типов экспериментально показано в [10]. В настоящей работе неустойчивость в газе, вызывающая волны в пленке, не рассматривается.

Далее величины считаются безразмерными, принимаются два базиса: в газе и жидкости. В качестве характерных величин в газе приняты:  $\tau_0$  — среднее касательное напряжение на поверхности раздела газ — жидкость, а так как газ линейен, то  $\tau_0$  — то же, что и в невозмущенном случае;  $\rho_g$  — плотность газа;  $k$  — волновое число. В жидкости величины отнесены к плотности жидкости  $\rho_l$ , невозмущенной толщине пленки  $h_0$ , невозмущенной скорости на поверхности раздела  $u_0$ .

Итак, рассматривается в линейном приближении течение газа над жесткой неподвижной волнистой границей. Вследствие большого градиента скорости газового потока  $U'(0)$  граничные условия нельзя разложением в ряд переносить с возмущенной поверхности раздела на невозмущенную. Для любого малого фиксированного  $h_0/L$  выражение  $h(x, t)U'(0)$  может быть сколь угодно велико для достаточно больших среднерасходных чисел Рейнольдса газа. Поэтому, следуя [9], для волны  $H(X)$ , разложенной в ряд Фурье, вводилась криволинейная ортогональная система координат

$$H = H_n \exp(inX) + K$$

$$\xi_g = \xi = X - iH_n \frac{\operatorname{ch} n(2L - Y)}{\operatorname{sh} 2nL} \exp(inX) + K$$

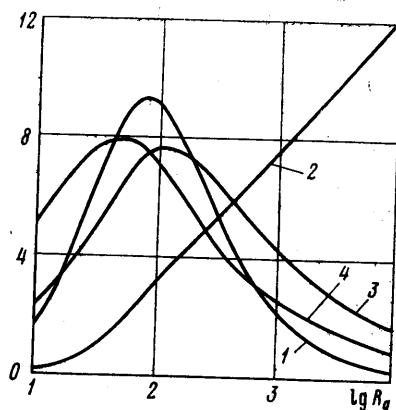
$$\eta_g = \eta = Y - H_n \frac{\operatorname{sh} n(2L - Y)}{\operatorname{sh} 2nL} \exp(inX) + K$$

которая с точностью до членов порядка  $H_n^2$  следует за профилем волны

и выпрямляется на верхней стенке. В этих координатах находились возмущения давления и касательного напряжения на  $y=h$ . В формулах  $K$  означает комплексно-сопряженную величину. Предполагается суммирование по повторяющемуся индексу  $n$  от единицы до бесконечности. Рассмотрим еще одну трудность. В жидкости на поверхности раздела  $\eta=0$  или  $y=h(x, t)$  бралась декартова координата  $x$ , а не криволинейная. Однако для возмущения некоторой величины в газе  $F$  при  $\eta=0$   $F(\xi) = F(X) + F_1$ , где  $F_1$  — члены порядка амплитуды возмущений, а так как газ линеен, то  $F(\xi)|_{\eta=0} = F(X)$ . Далее техника расчета амплитуд напряжений в газе ничем не отличается от проведенной в [6]. Поэтому с целью экономии места приводится сразу результат. Если в базе жидкости имеется волна  $h=1+h_n \exp(in\alpha(x-ct)) + K$ , то реакция газа на волнистую стенку (в базе пленки) имеет вид

$$(1.5) \quad P = \frac{\alpha}{R_l} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ nh_n F \left( \frac{1}{n} R_g \right) \times \right. \\ \left. \times \exp(in\alpha(x-ct)) + K \right\}$$

$$(1.6) \quad \tau_g = \frac{1}{R_l} \left\{ 1 + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left[ nh_n T \left( \frac{1}{n} R_g \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp(in\alpha(x-ct)) + K \right] \right\}$$



Фиг. 1

Здесь  $P$ ,  $\tau_g$  — давление и касательное напряжение со стороны газа на волнистую поверхность;  $F$ ,  $T$  — амплитуда давления и касательного напряжения для элементарного синусоидального возмущения в базе газа, их зависимости от  $R_g = \tau_0^{1/2} / (k\rho_g^{1/2} v_g)$  даны на фиг. 1, где 1 —  $0,5 F_1$ , 2 —  $2 \cdot 10^{-2} F_R$ , 3 —  $T_1$ , 4 —  $T_R$  (согласно предположению  $\epsilon$ , зависимостью  $F$ ,  $T$  от высоты канала пренебрегается);  $\alpha = \alpha_l$  — безразмерное волновое число в базе жидкости.

2. В соответствии с предположением  $\epsilon$  уравнения (1.1) — (1.4) переходят в

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_l} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} - G, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$y=0: u=v=0, \quad y=h: p+W \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = R_l \tau_g, \quad v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$R_l = u_0 h_0 / \nu_l, \quad G = gh_0 / u_0^2, \quad W = \sigma / (\rho_l u_0^2 h_0)$$

$P$ ,  $\tau_g$  считаются выраженными по формулам (1.5), (1.6).

Принимая, что профиль скорости имеет вид  $u = a(x, t)y/h + b(x, t)(y/h)^2$ , проинтегрировав уравнение пограничного слоя и непрерывности по  $y$  от 0 до  $h(x, t)$  и воспользовавшись (2.1), аналогично [1, 2], получим в системе

координат, движущейся со скоростью  $c$ :

$$(2.2) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + h \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{3}{2R_1} \left( \tau - 2 \frac{q}{h^2} - \frac{c}{h} \right)$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

$$I = \frac{1}{5} [c^2 h + 2c q + \frac{1}{2} 4 h^3 \tau^2 + \frac{1}{4} h \tau q + \frac{1}{4} h^2 \tau c + 6 q^2 / h]$$

$$\Pi = P - h_{\text{max}} W + h G, \quad \tau = \tau_g R_1$$

Здесь  $q$  — локальный обращенный расход, т. е. расход в системе, движущейся со скоростью  $c$ ,  $h$  — локальная толщина пленки.

Ищутся стационарные решения (2.2), (2.3)  $\partial q / \partial t = \partial n / \partial t = 0$ . Если ввести сжатие  $\alpha x \rightarrow x$ , так что  $x \in (0, 2\pi)$ , то (1.3), (1.4) перейдут в

$$(2.4) \quad h^2 \frac{dI}{dx} + h^3 \frac{d\Pi}{dx} - \frac{3}{2\alpha R_1} (\tau h^2 - 2ch - 2q) = 0, \quad q = \text{const}(x)$$

Если линеаризовать (2.4), то получим результат работы [3].

В дальнейшем считается, что нелинейность искажает средний расход, а средняя толщина не меняется относительно безволновой,  $\langle h \rangle = 1$ .

Для решения (2.4)  $h$ ,  $P$ ,  $\tau$  представлялись в виде ряда Фурье, подставлялись в (2.4) и собирались при одинаковых гармониках. Так как решение определено с точностью до сдвига по  $x$ , то без ограничения общности считалось  $h_{11} = \text{Im}\{h_1\} = 0$ . Если обрезать ряд на  $N$  гармониках, то получаем нелинейную алгебраическую систему из одного действительного уравнения при  $n=0$  и  $N$  комплексных при  $n=1, \dots, N$  относительно трех действительных неизвестных  $q$ ,  $c$ ,  $h_{1R}$  и  $N$  комплексных  $h_2, \dots, h_N$ . Полученная система решалась численно, причем программа позволяла автоматически расписать систему уравнений для заданного произвольного  $N$ . Для решения системы применялись два метода. Около верхней ветви кривой нейтральной устойчивости применялся метод Ньютона. Метод позволял находить решение при максимальном числе гармоник  $N_{\text{max}} = 8-10$ . Однако при уменьшении  $\alpha$  и подходе к нижней ветви кривой устойчивости волна начинала по своей форме приближаться к уединенной и указанное число гармоник оказывалось недостаточным. Поэтому в этой области применялся итерационный метод Петвиашвили [7, 8] для уединенных волн. Уравнения для фурье-коэффициентов представлялись в виде

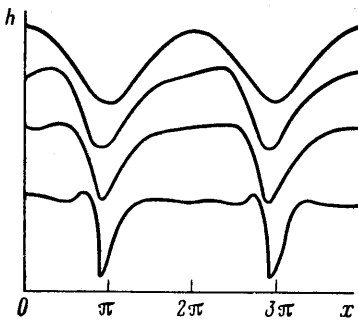
$$(2.5) \quad L_n h_n = N_n^{(2)} + N_n^{(3)} + N_n^{(4)} + N_n^{(5)} \quad (n=0, 1, \dots, N)$$

Здесь выделялась линейная часть  $L_n h_n$  и члены с квадратичной нелинейностью  $N_n^{(2)}$ , члены с кубичной нелинейностью  $N_n^{(3)}$  и т. д. Максимальный порядок нелинейности (2.4) и соответственно (2.5) равен 5. Уравнение (2.5) при  $n=0$  и условии  $h_{11} = 0$  или  $((N_1^{(2)} + N_1^{(3)} + N_1^{(4)} + N_1^{(5)}) / L_1)_{\text{Im}} = 0$  использовались для нахождения  $a$  и  $c$ . Уравнения (2.5) при  $n=1, 2, \dots, N$  приводились к эквивалентному виду

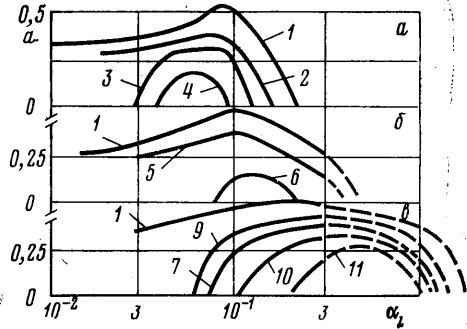
$$(2.6) \quad h_n = \left( \frac{I_1}{I_2} \right)^2 \{ N_n^{(2)} + N_n^{(3)} + N_n^{(4)} + N_n^{(5)} \} \frac{1}{L_n}, \quad n=1, \dots, N$$

$$I_1 = \sum_{n=1}^N h_n h_n^*, \quad I_2 = \sum_{n=1}^N (N_n^{(2)} + N_n^{(3)} + N_n^{(4)} + N_n^{(5)}) \frac{h_n^*}{L_n}$$

Уравнение (2.6) решалось методом итераций. Процесс сходил за 20–100 итераций. Концом вычислений считалось  $|h_n^i - h_n^{i-1}| / \max |h_n^i| < 0,05$ . Метод легко позволял находить решение вплоть до нижней ветви кривой нейтральной устойчивости; при этом максимальное число гармоник было  $N_{\text{max}} = 50$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Задача полностью определялась заданием независимых параметров  $R_i$ ,  $G$ ,  $W$ ,  $R_g$ ,  $\alpha$ . Пользоваться этими параметрами для расчета конкретных жидкостей, однако, неудобно. Заметим, что из определения  $\tau_0$ ,  $u_0$ ,  $h_0$  следует равенство  $\tau_0 = \mu_i u_0 / h_0$  или в безразмерном виде  $\alpha^2 R_g = \gamma_1 R_i$ ,  $\gamma_1 \equiv (\rho v_i^2) / (\rho_g v_g^2)$ . Пользуясь этим равенством и соотношением  $W = \gamma_2 R_i^{-1/2} G^{1/2}$ ,  $\gamma_2 = \sigma \rho_i^{-1} v_i^{-1/2} g^{-1/2}$ , вводили безразмерные параметры  $R_i$ ,  $T = R_i^{-1/2} G^{-3/2} = \tau_0 / (v_i g \rho_i^{1/2})^{3/2}$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\alpha$ . Параметры  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  определяют физические свойства жидкости и газа. Тогда  $G$ ,  $W$ ,  $R_g$  определялись из равенств  $W = \gamma_2 R_i^{-1/2} T^{-1/2}$ ,  $G = R_i^{-1/2} T^{-3/2}$ ,  $R_g = \sqrt{\gamma_1 R_i / \alpha}$ .

Принималось, что  $\gamma_1 = 3,83$ ,  $\gamma_2 = 3370$ , что соответствовало течению воды и воздуха при температуре  $20^\circ \text{C}$ , давлении 760 мм рт. ст., т. е. условиям, при которых получены кривые нейтральной устойчивости в [6]. Задача, таким образом, определялась заданием параметров  $R_i$ ,  $T$ ,  $\alpha$ .

Рассмотрим некоторые результаты расчетов. На фиг. 2 показано типичное изменение формы волны при изменении  $\alpha$ ;  $R_i = 25$ ,  $T = 0,5$ . Значения волнового числа на фиг. 2, начиная с верхнего профиля волны: 0,3; 0,086; 0,057; 0,028. При уменьшении  $\alpha$  форма волны начинает приближаться по виду к уединенной волне. Причем получается волна типа «впадин», фазовая скорость волны меньше, чем по линейной теории. Волны типа «горба» в данном пленочном течении обнаружены не были, несмотря на многочисленные попытки при различных  $R_i$ ,  $T$ . (Такие волны получались в стекающих пленках [11–12].) Укажем, что солитонов в пленках с газом получено не было, хотя и получались решения, близкие к солитонам, при достаточно малых  $\alpha$ . Это, по-видимому, связано с тем, что между осью  $R_i$  и кривой нейтральной устойчивости имеется область устойчивости  $\Delta\alpha$ , отсутствующая в случае стекающих пленок (см. [6], фиг. 1).

На фиг. 3 показано распределение среднеквадратичной амплитуды  $a$ , отнесенной к средней толщине в зависимости от числа Рейнольдса пленки  $R_i$  (фиг. 3,  $a-v$ ,  $R_i = 15; 20; 30$ ) и  $T$ . Кривые 1–11 соответствуют  $T = 0,5; 0,413; 0,37; 0,341; 0,391; 0,326; 0,32; 0,261; 0,348; 0,283; 0,196$ . Считалось, что длинноволновое приближение справедливо при  $\alpha_i < 0,3$ . Поэтому пунктирные части кривых при  $\alpha_i > 0,3$  показаны условно. Так как на нижней ветви кривой устойчивости при достаточном удалении от носика колебания возбуждаются жестко, а на верхней — мягко [6], то на верхней ветви  $a = 0$ , на нижней  $a$  имеет конечное значение. На носике кривых нейтральной устойчивости автоколебательный режим ответвляется мягко, поэтому при достаточно малых  $T$   $a = 0$  и на нижней ветви.

Вычисленные добавки к расходу в пленке показали, что средний профиль скоростей в волновых режимах сильно отличается от линейного в безволновых и становится более заполненным. Дополнительный расход

всегда направлен в сторону основного и может даже превосходить его по величине, что намного больше, чем в стекающих пленках [1, 2].

Фазовая скорость, вычислявшаяся при тех же значениях параметров, что и  $a$ , слабо зависела от  $R_i$  и  $T$ ; зависимость же от волнового числа была сильной: для  $R_i=30$  на верхней ветви кривой нейтральной устойчивости фазовая скорость  $s$  была порядка 6–7 безволновых скоростей на поверхности жидкого слоя, мало отличаясь от вычисленной по линейной теории; вблизи нижней же ветви кривой нейтральной устойчивости  $s$  достигала значений, меньших скорости на поверхности раздела, до 0,5 от скорости на поверхности раздела. По линейной теории фазовая скорость всегда больше скорости на поверхности раздела [6]. К сожалению, в рассматриваемой зоне умеренных чисел Рейнольдса пленки нет экспериментов, которые можно было бы количественно сравнить с данной теорией, однако возможно качественное сравнение с [13]. Волны, реализовавшиеся на эксперименте Крайка, имели несинусоидальную природу, крутые фронты и длинные скаты, двигались со скоростями, меньшими скорости на поверхности раздела вплоть до 0,5 от поверхностной скорости. Это всегда были волны типа впадин, положительных волн типа горбов не наблюдалось. Впадина была перед вершиной, пленка в месте впадины могла быть настолько тонкой, что возникали сухие пятна (см. фиг. 2,  $\alpha=0,028$ ). Укажем, что, как показывает эксперимент, для рассмотренных волн нет преимущественных длин волн как для стекающих пленок. Однако реализовавшиеся на эксперименте медленные волны (по терминологии [13]) располагались в некоторой окрестности нижней ветви кривой устойчивости. По-видимому, такое расположение вблизи нижней ветви справедливо не только для умеренных  $R_i$  (см. эксперимент в [6]).

Автор приносит благодарность В. Я. Шкадову за руководство работой и всем участникам семинара Г. И. Петрова за полезное обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
2. Набиль М. Е., Шкадов В. Я. К нелинейной теории волн в слое вязкой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 4.
3. Чан Ван Чан, Шкадов В. Я. Неустойчивость слоя вязкой жидкости, под воздействием граничного потока газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 2.
4. Гугучкин В. В., Демехин Е. А., Калугин Г. Н., Маркович Э. Э., Пикин В. Г. Волновое движение пленок жидкости, текущих совместно с газовым потоком.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4.
5. Демехин Е. А. О линейной устойчивости течения пленок жидкости совместно с газовым потоком.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1.
6. Гугучкин В. В., Демехин Е. А., Калугин Г. Н., Маркович Э. Э., Пикин В. Г. О линейной и нелинейной устойчивости совместного плоскопараллельного течения пленки жидкости и газа.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 1.
7. Петвашвили В. И. Об уравнении необыкновенного солитона.— Физика плазмы, 1976, т. 2, вып. 3.
8. Петвашвили В. И., Цвелодуб О. Ю. Подковообразные солитоны на стекающей вязкой пленке жидкости.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 6.
9. Benjamin T. B. Shearing flow over a wavy boundary.— J. Fluid Mech., 1979, v. 6, № 2.
10. Gupta A. K., Landahl M. T., Mollo-Christensen E. L. Experimental and theoretical investigation of the stability of air flow over a water surface.— J. Fluid Mech., 1968, v. 33, pt 4.
11. Маурин Л. Н., Одишария Г. Э., Точигин А. А. Уединенная волна на стекающей жидкой пленке.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах (Матер. 20-го Сиб. теплофиз. семинара, Новосибирск, 1976). Новосибирск, 1977.
12. Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Двумерные волны на вертикальной пленке жидкости.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах (Матер. 20-го Сиб. теплофиз. семинара, Новосибирск, 1976). Новосибирск, 1977.
13. Craic A. D. Wind-generated waves in thin liquid films.— J. Fluid Mech., 1966, v. 26, № 2.