$\varphi=\mathrm{Re}\,w$. Окончательно выражение для φ представляется формулой

$$\varphi=\frac{e^{-\pi}+1}{e^{-\pi}-1}\frac{H_0}{r_0}\times$$

$$\times\left[\frac{\exp(-2\pi\sin y e^{x\pi/\delta})-1}{1+\exp(-2\pi\sin y e^{x\pi/\delta})+2\cos(\pi e^{x\pi/\delta}\cos y)\exp(-\pi\sin y e^{x\pi/\delta})}\right]$$

Подставив найденное выражение для функции φ в формулы (6) и (7), можно получить точное выражение для значений электромагнитного поля за волной и форму волны.

Автор выражает благодарность А. Г. Куликовскому и В. В. Гогосову за подробное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седова Г. Л.* Нелинейные волны и сильные разрывы в ферромагнетиках. Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.
2. *Богатырев Ю. К.* Импульсные устройства с нелинейными распределенными параметрами. М.: Сов. радио, 1974.
3. *Катаев И. Г.* Ударные электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1963.
4. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М.: Наука, 1976.

Москва

Поступила в редакцию 27.VIII.1979

УДК 538.4

О ВЛИЯНИИ ПЛЕНКИ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА ДВИЖЕНИЕ КАПЕЛЬ НЕМАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

ТАКТАРОВ Н. Г., ЧЫОНГ ЗА БИНЬ

Общие уравнения, описывающие движение сред в электромагнитном поле, приведены в [1]. Представляет интерес изучение влияния магнитного поля на движение намагничивающихся поверхностно-активных веществ (ПАВ), в качестве которых могут быть использованы так называемые ферромагнитные жидкости [2], помещенные на свободную поверхность обычной ненамагничивающейся жидкости либо на поверхность раздела жидкостей. Известно, что небольшое количество ПАВ, введенного в жидкость, адсорбируется на поверхности раздела жидкостей. Обычные ненамагничивающиеся ПАВ могут оказывать существенное влияние на движение жидкости в объемной фазе [3], на поверхности которой они находятся. Этот эффект связан с увеличением слоем ПАВ прилегающего к нему слоя жидкости. В случае намагничивающегося ПАВ движением немагнитной жидкости можно управлять посредством магнитного поля [4]. В приложенном магнитном поле намагничивающееся ПАВ будет увлекаться полем, приводя в движение прилегающую жидкость в объемной фазе.

Рассмотрим влияние пленки намагничивающегося ПАВ на движение капли немагнитной жидкости. Будем предполагать, что капля немагнитной жидкости, покрытой пленкой ПАВ, движется в другой немагнитной жидкости со скоростью U вдоль оси z. Перейдем к системе координат, в которой капля покоится, а окружающая жидкость движется со скоростью $-U$. Предполагая, что число Рейнольдса мало ($\mathrm{Re}\ll 1$), напишем уравнения движения жидкости и ПАВ [4]

$$\operatorname{grad} p=\eta\Delta\mathbf{v},\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\operatorname{div}_\tau(\gamma\mathbf{v}_\tau+\mathbf{j}_\tau)=0 \tag{1}$$

$$\mathbf{j}_\tau=-D_\tau\nabla_\tau\gamma+\gamma b_\tau\mathbf{G}_\tau$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость жидкости, η — вязкость жидкости, p — давление, $\mathbf{v}_\tau$ — скорость жидкости на поверхности капли, $\mathbf{j}_\tau$ — поверхностный поток диффузии ПАВ, D_τ и b_τ — соответственно коэффициент поверхностной диффузии и поверхностная подвижность частиц ПАВ, γ — поверхностная концентрация ПАВ, $\mathbf{G}_\tau$ — составляющая градиента магнитного поля касательная к поверхности капли. Далее предполагаем, что вектор G – постоянен и параллелен оси z. Движение жидкости и пленки ПАВ предполагается стационарным. Форму капли считаем сферической. Температура жидкости предполагается постоянной. Радиус капли равен a.

Вследствие осевой симметрии все величины зависят от сферических координат r и θ, но не от азимутального угла φ. Предполагается, что поверхностная намагниченность $m(\gamma)$ и коэффициент поверхностного натяжения $\alpha(\gamma)$ зависят только от концентрации γ, но не от магнитного поля.

Условия на бесконечности и на поверхности капли имеют вид $r\to\infty$:

$$v_{2r}=-U\cos\theta,\quad v_{2\theta}=U\sin\theta,\quad p_2=0 \tag{2}$$

$$r=a:\quad v_{1\theta}=v_{2\theta},\quad v_{1r}=v_{2r}=0$$

$$p_1-\tau_{1rr}-p_2+\tau_{2rr}-\frac{2\alpha(\gamma)}{a}+mG_z\cos\theta=0$$

$$\frac{1}{a}\frac{d\alpha(\gamma)}{d\theta}-mG_z\sin\theta+\tau_{2\theta r}-\tau_{1\theta r}=0$$

$$\tau_{rr}=2\eta\frac{\partial v_r}{\partial r},\qquad \tau_{\theta r}=\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)$$

Здесь индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к капле и окружающей жидкости соответственно.

Уравнения (1) для стационарного случая с учетом осевой симметрии в сферической системе координат примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}v_\theta\right) \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}=\eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r}=0$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\gamma v_\theta-\frac{D_\tau}{a}\frac{d\gamma}{d\theta}-\gamma b_\tau G_z\sin\theta\right)=0$$

Направление касательного к поверхности капли вектора τ совпадает с положительным направлением отсчета полярного угла θ.

Из последнего уравнения системы (3) следует, что $\gamma v_\theta+j_\theta=\text{const}$. Эту константу необходимо считать равной нулю, иначе на одном из полюсов капли произошло бы непрерывное накапливание ПАВ. Концентрацию ПАВ представим в виде $\gamma=\gamma_0+\gamma'$, где γ_0 – постоянная равновесная концентрация при отсутствии магнитного поля, γ' – малое возмущение. Величинами второго порядка малости далее будем пренебрегать. Поскольку количество ПАВ на поверхности капли остается постоянным, можно написать

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\gamma'\sin\theta\,d\varphi\,d\theta=0 \tag{4}$$

Решение системы уравнений (3) ищем в виде

$$v_{1r}=(A_1+B_1r^2)\cos\theta,\qquad v_{1\theta}=-(A_1+2B_1r^2)\sin\theta$$

$$p_1=F_1+10\eta_1B_1r\cos\theta,\qquad p_2=F_2+\eta_2\frac{B_2}{r^2}\cos\theta \tag{5}$$

$$v_{2r}=\left(A_2+\frac{B_2}{r}+\frac{C}{r^3}\right)\cos\theta,\qquad v_{2\theta}=-\left(A_2+\frac{1}{2}\frac{B_2}{r}-\frac{1}{2}\frac{C}{r^3}\right)\sin\theta$$

Уравнение $\gamma v_\theta + j_\theta = 0$ с точностью до малых первого порядка при выполнении условия $Ua/D_\tau \ll 1$, принимает вид

$$\gamma_0 v_\theta - \frac{D_\tau}{a}\frac{d\gamma'}{d\theta} - \gamma_0 b_\tau G_z \sin\theta = 0 \tag{6}$$

Из уравнений (4)—(6) с учетом граничных условий (2) следует:

$$\gamma' = K\cos\theta, \qquad K = \frac{\gamma_0 a}{D_\tau}(b_\tau G_z + A_1 + 2B_1 a^2) \tag{7}$$

Далее, в граничных условиях для напряжений (2) будем предполагать выполненным неравенство

$$\frac{1}{a}\left|\frac{d\alpha}{d\gamma}\right| \gg \left|\frac{dm}{d\gamma}G_z\right| \tag{8}$$

Из выражений (5) и (7) с учетом соотношений (2) и (8) находим скорость движения капли U

$$U = \frac{aG_z}{3\eta_2}\left[2m_0 - 2\eta_2\frac{d\alpha}{d\gamma}\frac{\gamma_0}{D_\tau}b_\tau\left(2\eta_2 + 3\eta_1 - \frac{d\alpha}{d\gamma}\frac{\gamma_0}{D_\tau}a\right)^{-1}\right] \tag{9}$$

Здесь m_0 — равновесное значение намагниченности единицы площади пленки ПАВ. Из формулы (9) следует, что скорость капли линейно зависит от намагниченности пленки и градиента магнитного поля и всегда направлена в ту же сторону, что и G_z, так как для ПАВ выполняется условие $d\alpha/d\gamma < 0$ [5]. Отметим, что уравнение (9) применимо к пленкам ПАВ с не очень плотной упаковкой частиц. Упругая постоянная таких пленок [5] мала $-(\gamma_0/\alpha_0)(d\alpha/d\gamma) < 1$. Условие $Ua/D_\tau \ll 1$ показывает, что уравнение (9) применимо в случае капель достаточно малого размера, движущихся с небольшими скоростями; коэффициент диффузии частиц ПАВ вдоль поверхности капли должен быть достаточно большим, это имеет место для частиц ПАВ достаточно малого размера. Что касается условия (8), то оно выполняется, например, при следующих порядках величин: $\gamma_0 \sim 10^{10}$ *см*$^{-2}$, $a \sim 10^{-2}$ *см*, $\gamma|d\alpha/d\gamma| \sim 10^{-2}$ *эрг/см*^{2}, $dm/d\gamma \sim 10^{-15}$ *гс·см*^{3}, $|G_z| \sim 10^2$ *э/см*. Очевидно, условие (8) будет выполняться и для капель меньших размеров при тех же значениях остальных параметров.

Отметим, что при выводе формулы (9) предполагалось, что капля имеет сферическую форму. Это предположение справедливо в том случае, когда капиллярные силы на поверхности капли значительно превосходят напряжения, связанные с перепадом давления вдоль поверхности капли [3], т. е. $U\eta_2\alpha^{-1} \ll 1$.

Рассмотрим различные частные случаи формулы (9). При выполнении условия (капли жидкости в газе)

$$\eta_1 \gg \eta_2, \qquad \eta_1 \gg -\frac{d\alpha}{d\gamma}\gamma_0\frac{a}{D_\tau}$$

формула (9) принимает вид

$$U = {}^2/_3\, a m_0 G_z/\eta_2 \tag{10}$$

При выполнении условия (пузырек газа в жидкости)

$$\eta_2 \gg \eta_1, \qquad \eta_2 \gg -\frac{d\alpha}{d\gamma}\gamma_0\frac{a}{D_\tau}$$

формула (9) принимает вид (10), например при следующих порядках величин: $\gamma_0 \sim 10^{10}$ *см*$^{-2}$, $T \sim 300°$ K, $a \sim 10^{-3}$ *см*, $\gamma_0(d\alpha/d\gamma) \sim 10^{-3}$ *эрг/см*^{2}, $D_\tau \sim 10^{-4}$ *см*^{2}*/сек*.

Наконец, при условии

$$-\frac{d\alpha}{d\gamma}\gamma_0\frac{a}{D_\tau} \gg 2\eta_2 + 3\eta_1$$

формула (9) принимает вид

$$U = \frac{2am_0G_z}{3\eta_2}\left[1 + \frac{\eta_2 b_\tau}{a}\right] \tag{11}$$

В случае, когда η_2 достаточно мало (капля жидкости в воздухе), формула (11) принимает вид (10).

Кроме рассмотренного случая пленок ПАВ со слабой упаковкой частиц возможны пленки с плотной упаковкой частиц. У таких пленок упругая постоянная велика $-(\gamma_0/\alpha_0)(d\alpha/d\gamma)\sim 1$. Диффузия частиц в плотных пленках затруднена, и, следовательно, приведенные выше результаты к таким пленкам неприменимы. Очевидно, что в случае плотной пленки движением жидкости внутри капли можно пренебречь. Для нахождения скорости капли в этом случае можно воспользоваться формулой Стокса при обтекании твердой сферы. Скорость капли, покрытой пленкой ПАВ, в этом случае находится из условия равенства вязкой силы $6\pi\eta_2 aU$ и силы, действующей на сферу со стороны магнитного поля $4\pi a^2 m_0$. Из этого равенства следует, что скорость капли U вычисляется по формуле (10). Однако в отличие от случая пленки со слабой упаковкой частиц ПАВ единственными ограничениями, накладываемыми на параметры в этом случае, являются малость числа Рейнольдса $Ua/\nu_2 \ll 1$, где ν_2 — кинематическая вязкость окружающей каплю среды и выполнение условия сферичности капли $U\eta_2 \ll \alpha$.

Оценим скорость капли жидкости, покрытой плотной пленкой ПАВ, при следующих значениях параметра: $a=10^{-2}$ *см*, $\eta_2=1.5\cdot 10^{-2}$ *г/см·сек*, $G_z=10^3$ *э/см*, $\gamma_0=10^{12}$ *см*$^{-2}$, $m_0=10^{-4}$ *гс·см*. Скорость капли, вычисленная по формуле (10), равна $U=0.05$ *см/сек*. Если $G_z=10^4$ *э/см*, то при тех же значениях остальных параметров $U=0.5$ *см/сек*.

В заключение необходимо отметить, что вопрос об устойчивости движения капли остается открытым. Вместе с тем, например, в случае конденсированных пленок ПАВ течение, несомненно, будет устойчивым, так как оно представляет собой стоксово обтекание твердой сферы.

Авторы глубоко благодарны В. В Гогосову за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1976.
2. *Neuringer J. L., Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics, Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
3. *Harper J. F.* On bubbles with small immobile adsorbed films rising in liquids at low Reynolds numbers. J. Fluid. Mech., 1973, vol. 58, pt. 3.
4. *Тактаров Н. Г.* О движении поверхностных монослоев намагничивающейся жидкости. Магнитная гидродинамика, 1978, № 3.
5. *Абрамзон А. А.* Поверхностно-активные вещества. Л., «Химия», 1975.

Москва

Поступила в редакцию
15 V 1979