

vector control.— J. Spacecraft and Rockets, 1964, v. 1, No. 4 (Рус. перев.: Влияние свойств жидкости на эффективность системы управления вектором тяги путем впрыска жидкости.— Вопросы ракетной техники, 1965, № 4).

Москва

Поступила в редакцию
21.VIII.1979

УДК 538.4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ В КОАКСИАЛЬНОМ КАБЕЛЕ. СЛУЧАЙ УЗКОГО ЗАЗОРА

СЕДОВА Г. Л.

Простые волны и разрывы в средах, магнитная проницаемость которых является функцией модуля напряженности магнитного поля, рассматривались в работе [1]. Распространение ударных волн в коаксиальных линиях, заполненных ферритом с прямоугольной кривой намагничивания, и методы инженерных расчетов изложены в работах [2, 3].

В данной статье рассматривается распространение разрыва электромагнитного поля в магнетике, находящемся в коаксиальном кабеле. Найдена форма скачка электромагнитного поля, распространяющегося по магнетикку от источника напряжения. В предположении малости зазора между коаксиальными бесконечно проводящими цилиндрами определены параметры поля за скачком.

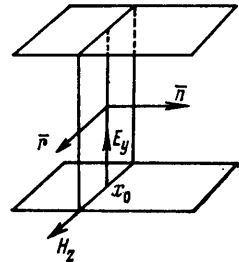
Если в бесконечном слое непроводящего магнетика в отсутствие свободных зарядов распространяется разрыв электромагнитных величин, то параметры поля за и перед фронтом разрыва связаны соотношениями [4]

$$(1) \quad [B_n]=0, \quad [D_n]=0 \\ [E_\tau]=\frac{1}{c} ([\mathbf{V} \times \mathbf{u})_\tau, \quad [H_\tau]=\frac{1}{c} (\mathbf{u} \times \mathbf{D})_\tau$$

Здесь \mathbf{n} — направление нормали, τ — направление касательной к плоскости скачка, $\mathbf{u}=\mathbf{u}\mathbf{n}$ — нормальная составляющая скорости распространения скачка по магнетикку, квадратными скобками обозначена разность между значениями параметров за и перед скачком.

Очевидно, что такой разрыв может распространяться в полупространстве, заполненном магнетиком, при отсутствии в нем электромагнитного поля, если к плоскости, ограничивающей это полупространство, мгновенно приложить и поддерживать постоянным некоторое электрическое поле \mathbf{E} , которое можно всегда считать направленным по оси y : $\mathbf{E}=\mathbf{E}_y\mathbf{y}$. В области за этим разрывом электрическое и магнитное поля постоянны. Скорость разрыва и магнитное поле за ним найдутся из равенств (1) при учете того, что электрическое и магнитное поля перед разрывом равны нулю, а электрическое поле за разрывом равно приложенному к ограничивающей полупространство плоскости вектору \mathbf{E} .

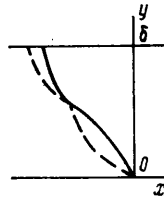
Такая же ударная волна будет распространяться в слое магнетика, заключенном между двумя бесконечно проводящими плоскостями $y=\pm h$ (фиг. 1), так как указанное выше решение удовлетворяет граничному условию на проводящих плоскостях, заключающемся в равенстве нулю касательной составляющей электрического поля. На частях плоскостей $y=\pm h$, граничащих с возмущенной областью, появятся поверхностный заряд σ . Этот заряд в силу известного граничного условия представляется формулой $\sigma=\epsilon E_y/4\pi$ (где ϵ — диэлектрическая проницаемость магнетика), далее без ограничения общности будем считать $\epsilon=1$, электрическое поле вне магнетика при $|y|>h$ отсутствует, так как плоскости $y=\pm h$ представляют собой идеальный проводник. Движение таких зарядов вдоль идеально проводящей поверхности соответствует наличию поверхностного тока, описывающегося формулой $j=v\epsilon E_y/4\pi$ (где v — скорость движения зарядов по поверхности). Ток j в свою очередь создает в магнетике магнитное поле $B_z=\mu j/4\pi c$ за фронтом волны.



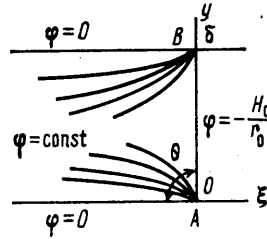
Фиг. 1

Будем далее рассматривать распространение электромагнитной волны между двумя бесконечно проводящими коаксиальными цилиндрами, зазор между которыми мал по сравнению с радиусами цилиндров и заполнен непроводящим магнетиком (магнитная проницаемость магнетика μ , зазор между цилиндрами δ и радиус внутреннего цилиндра r_0 заданы).

Если подключить цилиндры к источнику напряжения, то, как и в случае с плоскостями, по проводящим поверхностям цилиндров потечет индуцированный поверх-



Фиг. 2



Фиг. 3

ностный ток, который создает в магнетике электромагнитное поле. Будем искать решение задачи о распространении электромагнитного поля по магнетик в предположении, что по магнетик идет искривленный, в силу неоднородности всех величин по радиусу, скачок, за скачком следует с той же скоростью v некоторая зона, в которой все величины электромагнитного поля выравниваются вдали за фронтом скачка при $x \rightarrow -\infty$ до значений $H_\varphi = C_1/r$ и $E_x = 0$; $E_r = C_2/r$ (где C_1 и C_2 — константы). Предположим также, что все величины зависят только от координат x , r и времени t , магнитное поле всюду внутри магнетика имеет составляющую H_φ , а электрическое поле перпендикулярно к нему и имеет компоненты E_x и E_r . Определим электромагнитное поле за скачком и форму ударной волны.

В зоне, которая следует за скачком и в которой параметры меняются непрерывно, соотношения между электрическим и магнитным полями описываются дифференциальными уравнениями Максвелла, которые в цилиндрической системе координат имеют вид

$$(2) \quad \frac{\partial H_\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial E_r}{c \partial t}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \frac{\partial E_x}{c \partial t}, \quad \frac{\partial E_r}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial r} = -\frac{\partial B_\varphi}{c \partial t}$$

Решение системы (2) будем считать зависящим от комбинации переменных $x-vt$ и координаты r . Поскольку радиусы цилиндров близки, то $r = r_0 + y$, где r_0 — радиус внутреннего цилиндра $0 \leq y \leq \delta$ и $\delta \ll r_0$.

Представим основные параметры в виде: $H_\varphi = H_0 + h$; $B = B(H_0 + h) = B_0 + B'h$; $E_r = E_0 + e_r$; $E_x = e_x$, индексом «0» обозначены значения параметров при $r = r_0$ и $x \rightarrow -\infty$. Поскольку зазор между цилиндрами мал, то будем считать, что добавки e_x , e_y и h малы по сравнению с величинами E_0 и H_0 . Напряженность E_0 направлена по r , поскольку на цилиндрах $E_x = 0$. При $x \rightarrow -\infty$, $E_r = C_2/r \approx C_2/r_0 - C_2 y/r_0^2$, следовательно, $E_0 = C_2/r_0$; $e_y = -E_0 y/r_0$. Аналогично $H_0 = C_1/r_0$; $h = -H_0 y/r_0$.

Система (2) переписется в виде

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{v}{c} \frac{\partial e_y}{\partial x}, \quad \frac{H_0}{r_0} + \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{v}{c} \frac{\partial e_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = -B' \frac{v}{c} \frac{\partial h}{\partial x}$$

Исключая из системы (3) $\partial e_y/\partial x$, получим систему двух уравнений

$$(4) \quad \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{v}{c} \frac{\partial e_x}{\partial x} = -\frac{H_0}{r_0}, \quad \left(1 - B' \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{c} \frac{\partial e_x}{\partial y} = 0$$

Фронт ударной волны будем описывать уравнением $x=f(y)$ и будем считать слабо отклоняющимся от направления оси y , так что $f' \ll 1$ и можно принять для компонент вектора нормали n_x и n_y следующие выражения: $n_x = -1$, $n_y = f'(y)$. Отсюда следует, что с той же точностью нормальную компоненту скорости разрыва

можно принять постоянной и равной v . При этом, как следует из (1), непосредственно за волной $h=h_1=\text{const}$.

Из условия $e_x=0$ на проводящих поверхностях получаем с помощью (4) граничное условие $\partial h/\partial y = -H_0/r_0$. На ударной волне $E_n=0$; $E_x = -ch_1/v$ или $-e_x + f'(y)E_0 + f'(y)e_y = 0$ и $e_x f'(y) + E_0 + e_y = -ch_1/v$. Отбрасывая величину второго порядка малости, получаем соотношения $e_x = E_0 f'(y)$; $e_y = -(E_0 + ch_1/v)$.

Исключая из системы (4) e_x , получим для величины $h_* = h + H_0 y/r_0$ уравнение

$$(5) \quad \left(1 - B' \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 h_*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_*}{\partial y^2} = 0$$

Граничными условиями для уравнения (5) будут служить следующие соотношения:

при $y=0$; $y=\delta$ $\partial h_*/\partial y = 0$;

на ударной волне, условия на которой можно снести на прямую, параллельную оси y , например, $x=0$:

$$h_* = H_0 y/r_0 + h_1;$$

при $x \rightarrow -\infty$ $h=0$, так как $h_* = h + H_0 y/r_0$.

Решив уравнение (5) с учетом указанных выше граничных условий, найдем затем из связи векторов E и H на разрыве, задаваемой формулами (1), выражения для e_x , e_y и форму волны $f(y)$ из соотношения $f'(y) = e_x/E_0$ по формулам

$$(6) \quad e_y = -\frac{c}{v} (E_0 + h_1 + h), \quad e_x = \int_0^x \frac{c}{v} \frac{\partial h_*}{\partial y} dx$$

$$(7) \quad f(y) = \frac{c}{vE_0} \int_0^y \int_{-\infty}^0 \frac{\partial h_*}{\partial y} dx dy$$

Будем искать решение уравнения (5) для функции $\varphi(\xi, y) = \partial h_*/\partial y$ с переменными $\xi = x/\sqrt{1-B'v^2/c^2}$ и y . Разность $1-B'v^2/c^2 > 0$, так как предполагается, что скорость ударной волны v_n , равная скорости распространения ударной зоны v , меньше скорости распространения малых возмущений $a = \sqrt{1/B'}$ за ударной волной.

Уравнение (5) и следующие за ним граничные условия сводятся к виду

$$(8) \quad \Delta \varphi = 0$$

$$(9) \quad \varphi = 0, \quad y = 0; \quad y = \delta$$

$$(10) \quad \varphi = -H_0/r_0, \quad \xi = 0$$

$$(11) \quad \varphi \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow -\infty$$

Решение уравнения Лапласа (8) с граничными условиями (9), (10), (11) ищем в виде ряда Фурье

$$\varphi = \sum_{i=0}^{i=\infty} C_i \exp \frac{\pi n_i}{\delta} \xi \sin \frac{n_i \pi}{\delta} y$$

При этом уравнение $\Delta \varphi = 0$ и граничные условия (9) и (11) выполняются.

Определяем постоянные C_i из условия (10), и по формулам (6) и (7) определяем искомые величины e_x , e_y и $f(y)$

$$(13) \quad e_y = -\frac{c}{v} \left\{ E_0 + h_1 + \frac{H_0}{r_0} \sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\frac{\pi(2k+1)x}{\delta(1-B'v^2/c^2)^{1/2}} \right] \left[\frac{\cos(2k+1)y\pi/\delta}{(2k+1)^2} - 1 \right] \right\}$$

$$(14) \quad e_x = \frac{c2\pi H_0}{v\delta^2 r_0 (1-B'v^2/c^2)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp \left[\frac{\pi(2k+1)x}{\delta(1-B'v^2/c^2)^{1/2}} \right] \frac{\sin(2k+1)y\pi/\delta}{(2k+1)^2}$$

$$(15) \quad f(y) = \frac{c^2(2\pi)^3 H_0}{v^2 \delta^3 r_0 E_0 (1-B'v^2/c^2)^{1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)y\pi/\delta - 1}{(2k+1)^3}$$

Окончательно форма поверхности ударной волны с учетом только двух первых членов суммы (14) имеет вид

$$(16) \quad f(y) = \frac{C_1}{C_2} \left(\frac{2\pi}{\delta} \right)^3 \frac{c^2}{v^2} \frac{1}{\sqrt{1-B'v^2/c^2}} \times \\ \times \left[\left(\cos \frac{\pi}{\delta} y - 1 \right) + \frac{1}{27} \left(\cos \frac{3\pi}{\delta} y - 1 \right) \right]$$

Форма волны представлена на фиг. 2, пунктиром показана добавка от второй скобки в формуле (16).

Уравнение (8) с граничными условиями (9) можно решить также методом конформных отображений. Для этого необходимо найти функцию комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$, отображающую область $z = \xi + iy$ ($-\infty < \xi < 0$; $0 < y < \delta$) на область w ($-H_0/r_0 < \varphi < 0$; $-\infty < \psi < \infty$).

Область w берется по ψ в пределах от $-\infty$ до ∞ , поскольку при обратном отображении области w на z линии $\varphi = \text{const}$ в точках $A(\xi=0; y=0)$ и $B(\xi=0; y=\delta)$ имеют вид $\varphi = -k\theta$; $\theta = \text{arctg } y/\xi$ в окрестности точки A и $\varphi = k\theta$; $\theta = \text{arctg} [(y-\delta)/\xi]$ в окрестности точки B (фиг. 3). Вид функции ψ находится из условий Коши - Римана $\partial\varphi/\partial\xi = \partial\psi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial y = -\partial\psi/\partial\xi$.

Определим функцию ψ в окрестности точки A . Из формулы $\varphi = -k \text{arctg } y/\xi$ находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{ky}{y^2 + \xi^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{k\xi}{\xi^2 + y^2}$$

Отсюда следует, что $\partial\psi/\partial y = ky/(\xi^2 + y^2)$. Интегрируя по y , получаем

$$\psi = k \ln (\xi^2 + y^2)/2 + C(\xi)$$

Продифференцировав последнее равенство по ξ и сравнивая его с выражением для $\partial\varphi/\partial\xi$, получаем $C'(\xi) = 0$ или $C(\xi) = \text{const}$.

Окончательно в окрестности точки A функция ψ имеет вид

$$\psi = k \ln (\xi^2 + y^2)/2 + C, \quad \xi \rightarrow 0; \quad y \rightarrow 0 \quad \psi \rightarrow -\infty.$$

Проведя аналогичные рассуждения для точки B , получаем, что в окрестности этой точки $\psi = -k \ln [\xi^2 + (y-\delta)^2]/2 + C$ и при $\xi \rightarrow 0$, $y \rightarrow \delta$ $\psi \rightarrow \infty$. Таким образом, при изменении гармонической функции φ от $-H_0/r_0$ до 0 комплексно-сопряженная к ней функция ψ меняется в пределах от $-\infty$ до ∞ .

Чтобы отобразить область z на область w , переведем сначала полуполосу $-\infty < \xi < 0$, $0 < y < \delta$ на полуокружность плоскости W_1 . Это отображение дается формулой $W_1 = \exp(z\pi/\delta)$. Затем полуокружность плоскости W_1 переводим в полосу плоскости W . Для этого растянем окружность на $\pi/2$ отображением $W_2 = \pi/2 \exp(z\pi/\delta)$, а затем при помощи преобразования $W_3 = \text{tg } W_2$ переводим полуокружность в полосу $-\infty < \varphi_3 < \infty$; $(e^{-\pi} - 1)/(e^{-\pi} + 1) i < \psi_3 < 0$. Повернув эту полосу на $\pi/2$ и растянув на величину $H_0(e^{-\pi} + 1)/(e^{-\pi} - 1)r_0$, получаем окончательную формулу

$$w = \frac{e^{-\pi} + 1}{e^{-\pi} - 1} \frac{H_0}{r_0} i \text{tg } \frac{\pi}{2} e^{z\pi/\delta}$$

Чтобы получить значение φ , надо определить действительную часть w , поскольку

$\varphi = \text{Re } w$. Окончательно выражение для φ представляется формулой

$$\varphi = \frac{e^{-\pi} + 1}{e^{-\pi} - 1} \frac{H_0}{r_0} \times \left[\frac{\exp(-2\pi \sin y e^{\pi/b}) - 1}{1 + \exp(-2\pi \sin y e^{\pi/b}) + 2 \cos(\pi e^{\pi/b} \cos y) \exp(-\pi \sin y e^{\pi/b})} \right]$$

Подставив найденное выражение для функции φ в формулы (6) и (7), можно получить точное выражение для значений электромагнитного поля за волной и форму волны.

Автор выражает благодарность А. Г. Куликовскому и В. В. Гогосову за подробное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седова Г. Л. Нелинейные волны и сильные разрывы в ферромагнетиках. Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 2.
2. Богатырев Ю. К. Импульсные устройства с нелинейными распределенными параметрами. М.: Сов. радио, 1974.
3. Катаев И. Г. Ударные электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1963.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М.: Наука, 1976.

Москва

Поступила в редакцию
27.VIII.1979

УДК 538.4

О ВЛИЯНИИ ПЛЕНКИ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА ДВИЖЕНИЕ КАПЕЛЬ НЕМАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

ТАКТАРОВ Н. Г., ЧЫОНГ ЗА БИНЬ

Общие уравнения, описывающие движение сред в электромагнитном поле, приведены в [1]. Представляет интерес изучение влияния магнитного поля на движение намагничивающихся поверхностно-активных веществ (ПАВ), в качестве которых могут быть использованы так называемые ферромагнитные жидкости [2], помещенные на свободную поверхность обычной немагничивающейся жидкости либо на поверхность раздела жидкостей. Известно, что небольшое количество ПАВ, введенного в жидкость, адсорбируется на поверхности раздела жидкостей. Обычные немагничивающиеся ПАВ могут оказывать существенное влияние на движение жидкости в объемной фазе [3], на поверхности которой они находятся. Этот эффект связан с увеличением слоем ПАВ прилегающего к нему слоя жидкости. В случае намагничивающегося ПАВ движением немагнитной жидкости можно управлять посредством магнитного поля [4]. В приложенном магнитном поле намагничивающееся ПАВ будет увлекаться полем, приводя в движение прилегающую жидкость в объемной фазе.

Рассмотрим влияние пленки намагничивающегося ПАВ на движение капли немагнитной жидкости. Будем предполагать, что капля немагнитной жидкости, покрытой пленкой ПАВ, движется в другой немагнитной жидкости со скоростью U вдоль оси z . Перейдем к системе координат, в которой капля покоится, а окружающая жидкость движется со скоростью $-U$. Предполагаем, что число Рейнольдса мало ($Re \ll 1$), напишем уравнения движения жидкости и ПАВ [4]

$$\text{grad } p = \eta \Delta v, \quad \text{div } v = 0$$

$$(1) \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \text{div}_\tau (\gamma v_\tau + j_\tau) = 0$$

$$j_\tau = -D_\tau \nabla_\tau \gamma + \gamma b_\tau G_\tau$$

Здесь v — скорость жидкости, η — вязкость жидкости, p — давление, v_τ — скорость жидкости на поверхности капли, j_τ — поверхностный поток диффузии ПАВ, D_τ и b_τ — соответственно коэффициент поверхностной диффузии и поверхностная подвижность частиц ПАВ, γ — поверхностная концентрация ПАВ, G_τ — составляющая градиента магнитного поля касательная к поверхности капли. Далее предполагаем,