**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1981**

УДК 532.5

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БУССИНЕСКА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

НИКИТИН Л. В., РЫЖАК Е. И.

В статье определяются поправки первого порядка к собственным числам и критическим значениям чисел Рэлея, полученным в приближении Буссинеска, для конвекции в жидкости с нулевой сжимаемостью. В качестве малого параметра принимается отношение равновесной разности плотностей к некоторой средней плотности жидкости.

Поправки находятся методами теории возмущений самосопряженных операторов. Показывается, что в классе задач с симметрией относительно горизонтальной плоскости поправки первого порядка обращаются в нуль. Выясняются ограничения на системы, для которых имеет смысл использование приближения Буссинеска в задаче о возникновении конвективной неустойчивости.

1. Вопрос о применимости приближения Буссинеска (ПБ) в различных задачах о конвекции был рассмотрен в ряде работ. В [1, 2] проводится учет изотермической сжимаемости жидкости. В [3, 4] устанавливается, что ПБ является нулевым приближением к точным уравнениям по некоторым малым параметрам. В [5] ПБ изучается применительно к конвекции в вязко-упругой среде.

Поправки к критическим числам определяются только в [2], причем отличие от ПБ состоит именно в учете изотермической сжимаемости, и при отсутствии таковой поправки обращаются в нуль.

В настоящей работе рассматривается конвекция в жидкости с нулевой изотермической сжимаемостью, причем пренебрегается работой давления и внутренней диссипацией в уравнении баланса тепла. Определяются поправки первого порядка к собственным числам и критическим значениям чисел Рэлея по малому параметру, являющемуся отношением равновесной разности плотностей к некоторой средней плотности. Эта задача решается путем разделения поля скоростей жидкости на основное бездивергентное поле и малое возмущение, обуславливающее изменение плотности. Поправки находятся методами теории возмущений самосопряженных операторов.

Показывается, что в задачах с симметрией относительно горизонтальной плоскости поправки первого порядка обращаются в нуль. Выясняются ограничения на системы, для которых имеет смысл использование ПБ в задаче о возникновении конвективной неустойчивости.

2. Пусть ньютонова, теплопроводящая, несжимаемая жидкость (плотность зависит только от температуры) занимает область G с непроницаемыми для жидкости неподвижными границами. Движение жидкости, если пренебречь в уравнении баланса тепла работой давления и внутренней диссипацией, описывается следующей системой уравнений:

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}=-\nabla\pi+\operatorname{div}\mathbf{S}+\rho\mathbf{g}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\chi\Delta\theta,\qquad \frac{d\rho}{dt}=-\rho\operatorname{div}\mathbf{u}\tag{2.1}$$

$$\rho=\rho_0[1-\alpha(\theta-\theta_0)]$$

$$\mathrm{S}=\eta[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})^T]+\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)\mathrm{I}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, $\mathbf{u}$ — скорость, π — давление, θ — абсолютная температура, S — тензор вязких напряжений, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, χ=const — коэффициент температуропроводности, α=const — коэффициент теплового расширения, η=const — сдвиговая вязкость, ζ=const — объемная вязкость, I — единичный тензор; через d/dt обозначена полная производная по времени.

Течение будем рассматривать при условиях прилипания на одной части границы и проскальзывания на другой. В обоих случаях одним из граничных условий является равенство нулю нормальной к границе составляющей скорости; в первом случае, кроме того, равна нулю и касательная к границе составляющая скорости, а во втором — соответствующее касательное напряжение.

Температура на границе поддерживается постоянной во времени и такой, чтобы стационарное поле температур отвечало равновесному состоянию жидкости.

Тогда в начальном равновесном состоянии [6]

$$\nabla\theta_i=-C\gamma,\quad C=\mathrm{const} \tag{2.2}$$

где γ — единичный вектор, направленный противоположно вектору $\mathbf{g}$; будем считать, что жидкость подогревается «снизу», т. е. $C>0$.

В соответствии с теорией Ляпунова, конвективная устойчивость и неустойчивость жидкости определяются спектром системы уравнений (2.1), линеаризованной по отклонениям $\{\mathbf{u},\theta\}$ от их начальных равновесных распределений $\{0,\theta_i\}$. Вводя обозначения $T=\theta-\theta_i$, $p=\pi-\pi_i$, получим линеаризованную систему

$$\rho_i\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=-\nabla p+\mathrm{div}\,\mathrm{S}+\alpha\rho_0 gT\gamma$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\mathbf{u}\cdot\nabla\theta_i+\chi\Delta T,\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{u}=\frac{\rho_0}{\rho_i}\alpha\chi\Delta T \tag{2.3}$$

где $\partial/\partial t$ — производная по времени в данной точке пространства, $g=|\mathbf{g}|$, $\mathrm{div}\,\mathrm{S}=\eta\Delta\mathbf{u}+(\eta/3+\zeta)\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$.

Пусть $T_0=\theta_0-\theta_i$ $(T_0\neq\mathrm{const})$, $\nu=\eta/\rho_0$, $\mu=(\eta/3+\zeta)/\rho_0$. Тогда, деля первое уравнение на ρ_0, получим

$$(1+\alpha T_0)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=-\nabla\frac{p}{\rho_0}+\nu\Delta\mathbf{u}+\mu\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\alpha gT\gamma$$

Следуя [6], перейдем к безразмерным величинам с помощью следующих характерных величин: длины L, где L — характерный размер области G; времени L^2/ν; скорости χ/L; давления $\rho_0\nu\chi/L^2$; температуры CL.

Получим

$$(1+\varepsilon T_0)\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=-\nabla p+\Delta\mathbf{u}+\mu_1\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+RT\gamma$$

$$P\frac{\partial T}{\partial t}=\mathbf{u}\cdot\gamma+\Delta T,\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{u}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T_0}\Delta T \tag{2.4}$$

где введены число Прандтля $P=\nu/\chi$, число Рэлея $R=g\alpha CL^4/(\nu\chi)$, $\mu_1=\mu/\nu$

и отношение начальной разности плотностей к средней плотности $\varepsilon=\alpha CL$. Граничное условие для температуры имеет вид $T|_{\partial G}=0$, а для скорости на одной части границы $\mathbf{u}=0$ (условие прилипания), на другой — $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ и $\mathbf{n}\times\mathbf{Sn}=0$ (условие проскальзывания), где $\mathbf{n}$ — нормаль к границе.

Для решений, изменяющихся пропорционально $\exp(\lambda t)$, так называемых нормальных возмущений, получим задачу на собственные значения

$$\lambda(1+\varepsilon T_0)\mathbf{u}=-\nabla p+\Delta\mathbf{u}+\mu_1\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+RT\boldsymbol{\gamma}$$

$$\lambda PT=\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\Delta T,\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{u}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T_0}\Delta T \tag{2.5}$$

Поскольку при $R>0$ показатели вещественны [6], то возникновению неустойчивости соответствует обращение λ в нуль. Соответствующее значение числа Рэлея называется критическим, а поля скоростей и температур — нейтральными возмущениями.

Очевидно, что если $\varepsilon\to0$ при $R=\mathrm{const}$, то система (2.5) стремится к системе уравнений для нормальных возмущений в ПБ. В дальнейшем, считая параметр ε малым, найдем поправки первого порядка по ε к собственным числам и критическим значениям чисел Рэлея.

Заметим, что с точностью до членов первого порядка по ε уравнение для дивергенции скорости примет вид

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u}=\varepsilon\Delta T \tag{2.6}$$

3. Поставленная задача может быть сведена к задаче теории возмущений самосопряженных операторов. Рассмотрим линейное пространство, векторами которого являются пары полей $\{\mathbf{u},\ T\}\equiv U$ со скалярным произведением $(U_1\|U_2)\equiv\int\limits_G(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2+T_1T_2)\,d\Omega$. Подпространством F_0 назовем множество таких $V\equiv\{\mathbf{v},\ T\}$, для которых $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$ и удовлетворяются принятые граничные условия. Это подпространство является базисным для ПБ. Пусть оператор $\mathbf{H}(\varepsilon)=\mathbf{I}+\varepsilon\mathbf{H}_1$ переводит $\{\mathbf{v},\ T\}$ в $\{\mathbf{u},\ T\}$ так, чтобы $\mathrm{div}\,\mathbf{u}=\varepsilon\Delta T$ и $\{\mathbf{u},\ T\}$ удовлетворяли тем же граничным условиям (здесь $\mathbf{I}$ — тождественный оператор).

Подпространством F_H назовем образ F_0 при отображении $\mathbf{H}$; оно является базисным для точных уравнений начала конвекции.

Умножим второе уравнение в (2.5) на R. Получим систему уравнений для $U\in F_H$

$$\lambda\mathbf{A}U=-\begin{pmatrix}\nabla p\\ 0\end{pmatrix}+\mathbf{B}U$$

$$\mathbf{A}(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1+\varepsilon T_0 & 0\\ 0 & RP\end{pmatrix}\cdot\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\Delta+\mu_1\nabla\,\mathrm{div} & R\boldsymbol{\gamma}\\ R\boldsymbol{\gamma} & R\Delta\end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Заметим, что принятые граничные условия обеспечивают самосопряженность «оператора Буссинеска» $\mathbf{B}$ на F_H.

Назовем подпространством F_A образ F_H при отображении $\mathbf{A}(\varepsilon)$; очевидно, что при $\varepsilon=0$ подпространства F_0, F_H и F_A совпадают между собой.

Поскольку вектор $\{\nabla p,\ 0\}$ всегда ортогонален к F_0, то он в (3.1) осуществляет проектирование в направлении, ортогональном к F_0. Вводя $\mathbf{N}$ — проектор на F_A в направлении, ортогональном к F_0, можем записать систему (3.1) в виде

$$\lambda\mathbf{A}U=\mathbf{NB}U,\qquad U\in F_H \tag{3.2}$$

При $\varepsilon=0$ она перейдет в систему уравнений ПБ

$$\lambda_0\mathbf{A}_0V_0=\mathbf{N}_0\mathbf{B}_0V_0,\quad V_0\in F_0 \tag{3.3}$$

Система (3.2), рассматриваемая как возмущенная относительно системы (3.3), порождает две задачи: о возмущении спектра собственных чисел λ и о возмущении критических значений чисел Рэлея (т. е. таких значений, при которых собственные числа обращаются в нуль). Найдем первые приближения для этих задач.

Будем искать сначала поправки первого порядка по ε к собственным числам системы (3.3), считая ее решение известным, спектр дискретным и собственные числа различными.

Для решения воспользуемся подстановкой $U=\mathbf{H}V$ и учтем, что оператор $\mathbf{N}-\mathbf{N}_0$ переводит любой вектор в вектор, ортогональный к F_0. Разлагая λ, V и $\mathbf{N}$ по степеням ε $(\lambda=\lambda_0+\varepsilon\lambda_1+\ldots,\ldots)$ и собирая члены при нулевой и первой степенях ε, получим

$$\begin{gathered}\lambda_0\mathbf{A}_0V_0=\mathbf{N}_0\mathbf{B}V_0\\ \lambda_1\mathbf{A}_0V_0+\lambda_0(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_0\mathbf{H}_1)V_0+\lambda_0\mathbf{A}_0V_1=\mathbf{N}_0\mathbf{B}V_1+(\mathbf{N}_1\mathbf{B}+\mathbf{N}_0\mathbf{B}\mathbf{H}_1)V_0\end{gathered} \tag{3.4}$$

Принимая условие нормировки $(V|\mathbf{A}_0V)=(V_0|\mathbf{A}_0V_0)$, что дает $(V_0|\mathbf{A}_0V_1)=0$, и учитывая, что $(V_0|\mathbf{N}_1\mathbf{B}V_0)=0$, умножим равенство (3.4) скалярно на V_0. При этом

$$(V_0|\mathbf{N}_0\mathbf{B}V_1)=(V_0|\mathbf{N}_0\mathbf{B}\mathbf{N}_0V_1)=(\mathbf{N}_0\mathbf{B}V_0|V_1)=\lambda_0(\mathbf{A}_0V_0|V_1)=0$$

Тогда

$$\lambda_1=(V_0|[\mathbf{B}\mathbf{H}_1-\lambda_0(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_0\mathbf{H}_1)]V_0)(V_0|\mathbf{A}_0V_0)^{-1}$$

Вводя $W\equiv\mathbf{H}_1V$, получим

$$\lambda_1=[(V_0|(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}_0)W_0)-\lambda_0(V_0|\mathbf{A}_1V_0)](V_0|\mathbf{A}_0V_0)^{-1}$$

Учитывая самосопряженность оператора $\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}_0$ на F_H и равенство $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}_0)V_0=(\mathbf{I}-\mathbf{N}_0)\mathbf{B}V_0$, получим

$$\lambda_1=[(\mathbf{B}V_0|(\mathbf{I}-\mathbf{N}_0)W_0)-\lambda_0(V_0|\mathbf{A}_1V_0)](V_0|\mathbf{A}_0V_0)^{-1} \tag{3.5}$$

Таким образом, необязательно знать вектор W_0, достаточно знать его ортогональную к F_0 составляющую.

В случае вырождения, если задача в нулевом приближении имеет вырождение не шире, чем вырождение точной задачи, равенство (3.5) остается в силе, а V_0 — любой из соответствующих собственных векторов.

Пусть теперь $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_0$ зависят от некоторого параметра R и собственное число $\lambda_0=0$ при $R=R_0$, $\varepsilon=0$. Найдем поправку первого порядка по ε к критическому значению параметра R, т. е. такое значение $R(\varepsilon)$, при котором $\lambda(\varepsilon)=0$. Пусть $R=R_0+\varepsilon R_1+\ldots$

$$\begin{gathered}\mathbf{B}(R)=\mathbf{B}(R_0)+\varepsilon R_1\mathbf{B}'(R_0)+\ldots\equiv\mathbf{B}_0+\varepsilon R_1\mathbf{B}_0'+\ldots\\ \mathbf{A}_0(R)=\mathbf{A}_0(R_0)+\varepsilon R_1\mathbf{A}_0'(R_0)+\ldots\equiv\mathbf{A}_0+\varepsilon R_1\mathbf{A}_0'+\ldots\end{gathered}$$

Тогда выражение для $\lambda_1=0$, с учетом того, что $\lambda_0=0$, примет вид

$$\lambda_1=\frac{(V_0|(R_1\mathbf{B}_0'+\mathbf{B}\mathbf{H}_1)V_0)}{(V_0|\mathbf{A}_0V_0)}=0$$

Таким образом,

$$R_1=-\frac{(V_0|\mathbf{B}\mathbf{H}_1V_0)}{(V_0|\mathbf{B}_0'V_0)}=-\frac{(\mathbf{B}V_0|(\mathbf{I}-\mathbf{N}_0)W_0)}{(V_0|\mathbf{B}_0'V_0)} \tag{3.6}$$

Если оператор **B** зависит от двух параметров R и k и существует наименьшее критическое значение R_0, достигаемое при $k=k_0$, то новое наименьшее критическое значение R может достигаться при $k\neq k_0$. Пусть $R^{cr}=R^{cr}(\varepsilon, k)$; $k=k_0+\varepsilon k_1+\ldots$. Тогда

$$R^{cr}=R_0(k_0)+\varepsilon\left[R_1(k_0)+k_1\frac{dR_0}{dk}(k_0)\right]+\ldots$$

Но так как $R_0(k)$ имеет при $k=k_0$ минимум, то $dR_0/dk(k_0)=0$, т. е. и в этом случае, как и в случае дискретного спектра, $R_1^{cr}=R_1(k_0)$.

4. Чтобы воспользоваться полученными в п. 3 результатами, нужно конкретизировать оператор **H**, осуществляющий отображение F_0 на F_H.

Тут имеется определенный произвол. Выберем **H** таким образом, чтобы он действовал только на скоростную компоненту, переводя $\{\mathbf{v}, T\}$ в $\{\mathbf{v}+\varepsilon\mathbf{w}, T\}$, где $\{\mathbf{w}\}$ отвечает равновесному течению при заданной плотности источников $\operatorname{div}\mathbf{w}=\Delta T$ и упомянутых в п. 2 граничных условиях. Тогда $\{\mathbf{w}\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned}&\Delta\Delta\mathbf{w}=\nabla\Delta\Delta T\\&\operatorname{div}\mathbf{w}=\Delta T\end{aligned}\tag{4.1}$$

которая при данных граничных условиях имеет единственное решение.

Поле $\{\mathbf{w}\}$ можно представить в виде $\mathbf{w}=\nabla\varphi+\mathbf{a}$, причем $\Delta\varphi=\Delta T$, $(\partial\varphi/\partial\mathbf{n})_{\partial G}=0$, а для $\{\mathbf{a}\}$ имеем $\Delta\Delta\mathbf{a}=0$, $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}/_{\partial G}=0$; кроме того, $\{\mathbf{a}\}$ удовлетворяет граничным условиям для разности $\{\mathbf{w}-\nabla\varphi\}$.

Тогда вектор $\{\nabla\varphi, 0\}$ дает компоненту вектора $W\equiv\{\mathbf{w}, 0\}$, ортогональную к F_0. Обозначая решение, полученное в ПБ, через $V_0\equiv\{\mathbf{v}^0, T^0\}$ и вычисляя входящие в (3.5) выражения, получим

$$\lambda_1=\left(\int_G[\Delta\mathbf{v}^\circ\cdot\nabla\varphi^\circ+RT^\circ\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\varphi^\circ-\lambda_0T_0(\mathbf{v}^\circ)^2]d\Omega\right)\times\left(\int_G[(\mathbf{v}^\circ)^2+RP(T^\circ)^2]d\Omega\right)^{-1}\tag{4.2}$$

или, преобразуя первый интеграл в числителе,

$$\lambda_1=\left(\int_G[RT^\circ\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\varphi^\circ-\lambda_0T_0(\mathbf{v}^\circ)^2]d\Omega+\int_{\partial G}(\nabla\varphi^\circ\cdot\mathbf{S}_v\mathbf{n}-\mathbf{v}^\circ\cdot\mathbf{S}_\varphi\mathbf{n})d\Sigma\right)\times\left(\int_G[(\mathbf{v}^\circ)^2+RP(T^\circ)^2]d\Omega\right)^{-1},\tag{4.3}$$

где $\mathbf{S}_v$ и $\mathbf{S}_\varphi$ — тензоры вязких напряжений, обусловленные полями скоростей $\{\mathbf{v}^\circ\}$ и $\{\nabla\varphi^\circ\}$ соответственно; здесь использовано также равенство $\operatorname{div}\mathbf{v}^\circ=0$.

Замечая, что

$$\mathbf{B}_0'=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{\gamma}\\\boldsymbol{\gamma}&\Delta\end{pmatrix}$$

получим

$$(V_0/\mathbf{B}_0'V_0)=\int_G T^\circ\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{v}^\circ d\Omega=\int_G(\nabla T^\circ)^2d\Omega$$

Поправка к критическому значению числа Рэлея примет вид

$$R_1=-\left(\int_G(\Delta\mathbf{v}^\circ\cdot\nabla\varphi^\circ+R_0T^\circ\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla\varphi^\circ)d\Omega\right)\left(\int_G(\nabla T^\circ)^2d\Omega\right)^{-1}\tag{4.4}$$

или

$$R_1=-\left(\int\limits_G R_0T^\circ\gamma\cdot\nabla\varphi^\circ d\Omega+\int\limits_{\partial G}(\nabla\varphi^\circ\cdot\mathbf{S}_v\mathbf{n}-\mathbf{v}^\circ\cdot\mathbf{S}_\varphi\mathbf{n})d\Sigma\right)\times \tag{4.5}$$
$$\times\left(\int\limits_G(\nabla T^\circ)^2d\Omega\right)^{-1}$$

Заметим, что если область течения и граничные условия симметричны относительно горизонтальной плоскости, то λ_1 и R_1 обращаются в нуль, т. е. поправки имеют порядок не ниже второго по ε. Действительно, в этом случае функция $\{T^\circ\}$ либо симметрична, либо антисимметрична относительно этой плоскости, функция $\{\varphi^\circ\}$ имеет тот же тип симметрии, что и $\{T^\circ\}$, а вместе с ней и $\{\nabla\varphi^\circ\}$. Наоборот, поле $\{\mathbf{v}^\circ\}$ имеет противоположный тип симметрии, а вместе с ним и поле $\{\Delta\mathbf{v}^\circ\}$. Кроме того, отсчет температуры в равновесном состоянии, естественно, производится от плоскости симметрии, так что функция $\{T_0\}$ является антисимметричной линейной функцией расстояния от этой плоскости. Тогда из равенств (4.2) и (4.4) очевидно, что поправки первого порядка к λ и критическому значению R равны нулю.

5. В качестве примера вычислим поправку к критическому значению числа Рэлея в задаче с симметричной областью, но несимметричными граничными условиями, а именно в задаче о возникновении конвекции в бесконечном горизонтальном слое с условием проскальзывания на нижней граничной плоскости и условием прилипания на верхней.

Пусть (x, y, z) — декартовы координаты, ось z направлена вертикально вверх, слой лежит между $z=0$ и $z=1$. Будем считать, что движение жидкости происходит параллельно плоскости (x, z). Тогда, как известно, критические скорости и температуры имеют вид

$$\mathbf{v}^0(x,z)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{k_0}v_a'(z)\cos k_0x\\ v_a(z)\sin k_0x\end{pmatrix};\quad T^0(x,z)=T_a(z)\sin k_0x \tag{5.1}$$

где $k_0=2{,}682$, а для функций $v_a(z)$, $T_a(z)$ имеются таблицы в [7].

Функция $\{\varphi^\circ\}$ должна удовлетворять уравнению $\Delta\varphi^\circ=\Delta T^\circ$ с граничными условиями $(\partial\varphi^\circ/\partial\mathbf{n})_{\partial G}=0$. Представим ее в виде $\varphi^\circ=\psi^\circ+T^\circ$. Тогда ψ° — гармоническая функция, причем $(\partial\psi^\circ/\partial\mathbf{n})_{\partial G}=-(\partial T^\circ/\partial\mathbf{n})_{\partial G}$. Пусть $\psi^\circ(x, z)=\psi_a(z)\sin k_0x$. Тогда для ψ_a имеем

$$\psi_a''-k_0^2\psi_a=0;\qquad \psi_a'|_{z=0;\,1}=-T_a'|_{z=0;\,1}$$

Решая эту задачу, получим

$$\psi_a(z)=-\frac{T_a'(0)}{k_0}\operatorname{sh}k_0z+\left[\frac{T_a'(0)}{k_0\operatorname{th}k_0}-\frac{T_a'(1)}{k_0\operatorname{sh}k_0}\right]\operatorname{ch}k_0z \tag{5.2}$$

Заметим, что так как $T^\circ|_{\partial G}=0$, то

$$\int\limits_G R_0T^0\gamma\cdot\nabla\varphi^0\,d\Omega=\int\limits_G R_0T^0\gamma\cdot\nabla\psi^0\,d\Omega \tag{5.3}$$

Поверхностный интеграл в (4.5) в случае плоских границ может быть определенным образом преобразован. Во-первых, поскольку $\mathbf{n}\cdot\nabla\varphi^\circ|_{\partial G}=0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}^\circ|_{\partial G}=0$, то тензоры $\mathbf{S}_\varphi$ и $\mathbf{S}_v$ могут быть взяты с точностью до произвольного шарового тензора. Тогда $\mathbf{S}_\varphi=2\nabla\nabla\varphi^\circ+\ldots$, $\mathbf{S}_v=\nabla\mathbf{v}^\circ+(\nabla\mathbf{v}^\circ)^T+\ldots$, где многоточиями обозначены некоторые шаровые тензоры. Во-вторых, очевидно, что там, где задано проскальзывание, под интегралом останется только член $(-\mathbf{v}^\circ\cdot\mathbf{S}_\varphi\mathbf{n})$, а там, где прилипание,— только член $\nabla\varphi^\circ\cdot\mathbf{S}_v\mathbf{n}$. Вычислим эти члены, учитывая постоянство нормали к плоскости:

$$\mathbf{v}^\circ\cdot\mathbf{S}_\varphi\mathbf{n}=2\mathbf{v}^\circ\cdot(\nabla\nabla\varphi^\circ)\mathbf{n}=2\frac{\partial\nabla\varphi^\circ}{\partial\mathbf{v}^\circ}\cdot\mathbf{n}=2\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}^\circ}(\nabla\varphi^\circ\cdot\mathbf{n})=0$$

$$\nabla\varphi^\circ\cdot\mathbf{S}_v\mathbf{n}=\nabla\varphi^\circ[\nabla\mathbf{v}^\circ+(\nabla\mathbf{v}^\circ)^T]\mathbf{n}=\frac{\partial\mathbf{v}^\circ}{\partial\nabla\varphi^\circ}\cdot\mathbf{n}+\nabla\varphi^\circ\cdot\frac{\partial\mathbf{v}^\circ}{\partial\mathbf{n}}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\nabla\varphi^\circ}(\mathbf{v}^\circ\cdot\mathbf{n})+\nabla\varphi^\circ\cdot\frac{\partial\mathbf{v}^\circ}{\partial\mathbf{n}}=\nabla\varphi^\circ\cdot\frac{\partial\mathbf{v}^\circ}{\partial\mathbf{n}}$$

Таким образом, остается поверхностный интеграл от функции $\nabla\varphi^\circ\cdot\partial\mathbf{v}^\circ/\partial\mathbf{n}$ только по той граничной плоскости, где задано прилипание. В данном случае $\nabla\varphi^\circ\cdot(\partial\mathbf{v}^\circ/\partial\mathbf{n})_{z=1}=\varphi_a(1)v_a''(1)\cos^2k_0x=\psi_a(1)v_a''(1)\cos^2k_0x$. Принимая область интегрирования совпадающей с конвективной ячейкой и интегрируя по x от $x=-\pi/2k_0$ до $x=\pi/2k_0$, получим

$$R_1=-\left(\int_0^1 R_0T_a(z)\psi_a'(z)dz+v_a''(1)\psi_a''(1)\right)\left(\int_0^1 T_a(z)v_a(z)dz\right)^{-1}$$

Вычисляя, основанные на таблицах для T_a и v_a, дают окончательно: $R_1=6{,}3\cdot10^{-2}R_0$, где $R_0=1100{,}66$. Можно записать

$$\frac{\delta R}{R_0}=6{,}3\cdot10^{-2}\varepsilon+O(\varepsilon^2) \tag{5.4}$$

При величине малого параметра порядка 0,1 это дает относительную поправку к критическому числу Рэлея меньше 1%.

6. Как уже отмечалось, в [3] было показано, что ПБ получается из точных уравнений конвекции предельным переходом $\varepsilon\to0$ при $R=\mathrm{const}$. Порядок величины критических чисел Рэлея в задачах о возникновении конвективной неустойчивости совпадает с порядком критических чисел R_0, полученных в ПБ, и равен 10^3. Поскольку $R=\varepsilon g/b$, где $b=\nu\chi/L^3$ — характерное масштабное ускорение системы, то стремление ε к нулю при $R=\mathrm{const}\cong R_0$ подразумевает, что и $b=\varepsilon g/R$ стремится к нулю. Иными словами, если установить для малого параметра некоторое максимальное значение ε_m, то для b получим неравенство $0\leqslant b\leqslant\varepsilon_m g/R\cong\varepsilon_m g/R_0$.

Если считать при этом, что параметры жидкости фиксированы, то получим для характерного размера ограничение снизу

$$L\geqslant(\nu\chi R_0/\varepsilon_m g)^{1/3}$$

Поэтому неверно без оговорок утверждение [3], что точность ПБ увеличивается с уменьшением толщины слоя жидкости. Для тех параметров воды, которые берутся в качестве примера в [3], а именно $\nu\cong10^{-2}$ *см²/сек*, $\chi\cong10^{-2}$ *см²/сек*, принимая $R_0\cong10^3$, $\varepsilon_m=10^{-2}$, получим $L\geqslant0{,}2$ *см*. Этот нижний предел для L не слишком велик, но для более вязких жидкостей он будет увеличиваться. Например, для $\nu\cong10^{20}$ *см²/сек*, что соответствует вязкости верхней мантии Земли, $L\geqslant10$ *км*. Таким образом, в задачах о возникновении конвекции тонкость слоя понижает точность ПБ.

Вообще же точность ПБ в реальных задачах высока, особенно в задачах с симметрией относительно горизонтальной плоскости, в которых она оказывается не первого, а второго порядка по ε. В задачах с неполной симметрией, как показывает численный пример, рассмотренный в п. 5, поправка $\delta R/R_0$ хоть и имеет первый порядок по ε, но коэффициент при ε мал и точность, даваемая ПБ, опять-таки весьма высока. Кроме того, классы симметрии точной задачи и «оператора Буссинеска» совпадают, и поэтому ПБ правильно отражает качественное строение спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spigel E. A., Veronis G.* On the Boussinesq approximation for a compressible fluid.— Astrophys. J., 1960, v. 131, No. 2.
2. *Гитерман М. Ш., Штейнберг В. А.* Критерии возникновения свободной конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости.– ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
3. *Mihaljan J. M.* A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid.— Astrophys. J., 1962, v. 136, No. 3.
4. *Gray D. D., Giorgini A.* The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases.— Int. J. Heat. Mass Transfer, 1976, v. 19, No. 5.
5. *Биргер Б. И.* Комплексная вязкость и приближение Буссинеска при анализе конвективной неустойчивости верхней мантии Земли.– Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 4.
6. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
7. *Reid W. H., Harris D. L.* Some further results on the Benard problem.— Phys. Fluids, 1958, v. 1, No. 2.

Москва

Поступила в редакцию 17.VII.1979