

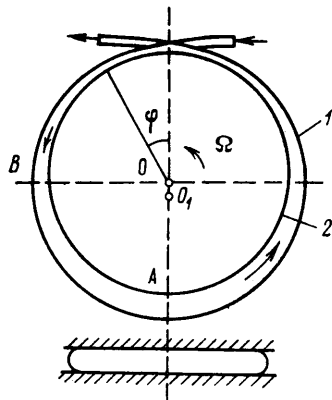
УДК 532.516

**ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ИЗОГНУТОЙ ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ТРУБКЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ**

СТАРОБИН И. М.

В данной работе рассматривается замкнутое течение вязкой, ньютоновской несжимаемой жидкости в деформирующейся трубке, участок которой используется как перистальтический насос, подключенный к заданной гидравлической нагрузке. Определены средний по времени расход жидкости (крови) во внешней цепи, падение давления на нагрузке и условия отсутствия травмы форменных элементов крови. Аналогичные задачи для изолированной трубки, не присоединенной к нагрузке, рассматривались в [1-4]. В [3, 4] изучалось течение жидкости в бесконечной плоской, а в [1, 2] - течение в осесимметричной трубке конечной длины. Эти задачи представляют интерес в связи с исследованием некоторых физиологических процессов, а также в связи с изучением гидродинамических характеристик насосов аппаратов искусственного кровообращения.

1. Рассмотрим движение ньютоновской жидкости в изогнутой трубке, вызываемое вращением эксцентрически закрепленного в точке  $O_1$  ролика, соприкасающегося со стенкой трубки (фиг. 1). На фиг. 1 показаны: 1 - неподвижное ложе, в котором изогнута трубка, 2 - ролик, точка  $O$  - центр ложа. Будем считать, что конструкция, изображенная на фиг. 1, удовлетворяет условию  $(R_2 - R_1)/R_1 \ll 1$ , где  $R_1 = OA$ ,  $R_2 = OB$ . При достаточно большом радиусе изгиба трубки это условие означает, что течение в ней можно считать плоским и описывать его двумерными уравнениями Навье - Стокса:



Фиг. 1

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \Delta v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

Здесь  $r$  и  $\varphi$  - радиальная и угловая координаты,  $v$  и  $u$  - радиальная и тангенциальная скорости,  $p$  - давление жидкости,  $\rho$  - плотность жидкости. Сделаем в (1.1) замену переменной  $r = R_1 + ay$ , где  $a = R_2 - R_1$ , а  $y$  - безразмерная переменная, изменяющаяся от нуля до  $h$ . Величина  $h$  с точностью до членов порядка  $o(a^2/R_1^2)$  равна  $h = 1 - \varepsilon \cos(\varphi - \Omega t)$ , где  $\varepsilon = \delta/a$ ,  $t$  - время, а  $\delta$  - расстояние между центрами ролика и ложа. Пользуясь введенной заменой переменной, безразмерными величинами  $t_* = \Omega t$ ,  $u_* = u/U$ ,  $p_* = pa^2/U\mu R_1$  и уравнением неразрывности, из которого следует  $v_* = vR_1/a$ , будем иметь ( $U = R_1\Omega$ )

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u(0) = u(h) = 0$$

Здесь и далее звездочки у безразмерных переменных опускаются. Уравнения (1.2) получены с точностью до величин  $o(Re \alpha)$  и  $o(\alpha)$ , где  $\alpha = a/R_1$  много меньше единицы по условию выбора конструкции насоса. В частности, при  $R_1 = 25$  см,  $U = 10$  см/с и  $a = 0,1$  см число Рейнольдса  $Re = R_1 a \Omega / \nu$  равно 25, а величины  $\alpha$  и  $Re \alpha$  равны 0,004 и 0,1 соответственно. Таким образом, при этих значениях параметров  $R_1$ ,  $a$  и  $U$  выполняются необходимые неравенства  $\alpha \ll 1$  и  $Re \alpha \ll 1$ . Отметим, что для величин  $R_1$ ,  $a$ ,  $U$ , близких к указанным, расход жидкости, прокачиваемой насосом при  $\varepsilon = 1$ , равен примерно 4 л/мин.

Будем считать, что к насосу подключена нагрузка с гидравлическим сопротивлением  $R$ . Получим расход жидкости  $Q$  через замкнутую цепь, состоящую из насоса и нагрузки. Найдем сначала разность давлений  $\Delta p_*$  между входом и выходом насоса, когда он замкнут на нагрузку с бесконечным сопротивлением. Пропедев выкладки, аналогичные [1], для градиента давления  $p_\varphi$  получим  $p_\varphi = -12h^{-2} + \text{const}$ . То, что сопротивление нагрузки бесконечно велико, означает  $Q(0, t) = Q(2\pi, t) = 0$ , откуда, учитывая равенство  $Q = -p_\varphi h^3/12$ , получаем  $p_\varphi = -12h^{-3}(h^{-1} + \varepsilon \cos t)$ . Интегрируя это выражение от 0 до  $2\pi$ , будем иметь

$$(1.3) \quad \Delta p_* = 12\pi(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^{-5/2}(Q_0 - \varepsilon \cos t), \quad Q_0 = 3\varepsilon^2(2 + \varepsilon^2)^{-1}$$

Как видно из (1.3), перепад давления  $\Delta p_*$  является пульсирующей величиной, которая колеблется около среднего значения с частотой  $\Omega$  и амплитудой  $\varepsilon$ .

Найдем теперь внутреннее сопротивление насоса  $r_\varphi$ . Падение давления на нагрузке  $\Delta p_e$  дается формулой  $\Delta p_e = \Delta p_* - Q r_\varphi$ . Если насос замкнут сам на себя, то  $\Delta p_e = 0$  и  $r_\varphi = \Delta p_*/Q$ . Из условия  $\Delta p_e = 0$  определяем постоянную в выражении для  $p_\varphi$ , а также величины  $Q(0)$  и  $Q(2\pi)$ :  $Q(0) = Q(2\pi) = Q_0 - \varepsilon \cos t$ . Таким образом,  $r_\varphi = \Delta p_*/(Q_0 - \varepsilon \cos t)$ . Поскольку  $\Delta p_e = QR$ , окончательно для расхода  $Q$  во внешней цепи будем иметь

$$(1.4) \quad Q = \left[ 1 + \frac{R(1 - \varepsilon^2)^{5/2}}{12\pi(2 + \varepsilon^2)} \right]^{-1} (Q_0 - \varepsilon \cos t)$$

Используя (1.4) и уравнение неразрывности, находим расход жидкости  $Q_\varphi$  внутри насоса

$$(1.5) \quad Q_\varphi = Q + \varepsilon \cos t - \varepsilon \cos(\varphi - t)$$

Формула (1.5) отличается от формул, полученных в [3, 4], несмотря на сходство исходной системы уравнений (1.2). Отличие обусловлено тем, что в [3, 4] рассматривалась бесконечная перистальтирующая трубка, а в данном случае имеется перистальтический насос конечной длины со входом и выходом.

2. Перейдем теперь к определению условий, при которых работа насоса происходит без гемолиза крови, т. е. без разрушения ее форменных элементов — эритроцитов. Из (1.2) находим выражение для сдвигового напряжения  $\tau$ :

$$(2.1) \quad \tau = 1/2 p_\varphi(2y - h)$$

Откуда следует, что абсолютная величина  $\tau$  достигает своего максимума на стенках трубки.

В [4] было показано, что жидкие частицы (эритроциты), находящиеся вблизи деформирующихся стенок трубки, дрейфуют вдоль них с очень малой скоростью, при этом начальные расстояния между стенкой и частицами по мере их продвижения почти не изменяются. В данном случае имеет место тот же самый эффект. С другой стороны, из экспериментальных данных о пороговых значениях  $\tau$  и о минимальном допустимом времени их действия на эритроциты [5, 6] следует, что эритроциты не разрушаются практически для сколь угодно большого времени воздействия при  $\tau_0 \leq 80$  Па. Таким образом, эритроцит, первоначально находившийся близко от стенки, не разрушится в течение всего времени его дрейфа, если среднее значение абсолютной величины сдвигового напряжения на стенках не будет превышать  $\tau_0$ . Эритроциты, первоначально находившиеся вдали от стенок, не разрушатся и подавно. Следовательно, для определения условий работы насоса без гемолиза крови достаточно найти среднее значение абсолютной величины сдвигового напряжения на стенке трубки за один оборот ролика  $\langle \tau_+ \rangle$  и решить неравенство  $\langle \tau_+ \rangle \leq \tau_0$ . Из (2.1) и равенства  $Q = -p_\varphi h^3/12$  следует

$$(2.2) \quad \tau_+ = 6h^{-2} |Q + \varepsilon \cos t - \varepsilon \cos(\varphi - t)|$$

Для  $\tau_+$  можно получить неравенство

$$(2.3) \quad \tau_+ \leq \frac{6}{h^2} \left( \frac{Q_0 + \varepsilon}{1 + R_0} + 2\varepsilon \right), \quad R_0 = \frac{R(1 - \varepsilon^2)^{5/2}}{12\pi(2 + \varepsilon^2)}$$

Учитывая (2.3), для  $\langle \tau_+ \rangle$ , будем иметь оценку

$$(2.4) \quad \langle \tau_+ \rangle \leq 6(1 - \varepsilon^2)^{-3/2} [(Q_0 + \varepsilon)(1 + R_0)^{-1} + 2\varepsilon] \leq \tau_*, \quad \tau_* = \tau_0 a / \mu U$$

Заметим, что средняя величина расхода жидкости во внешней цепи за один оборот ролика равна  $\langle Q \rangle = Q_0 / (1 + R_0)$ . Используя это равенство, а также неравенство (2.4), получим условие безгемолизной работы насоса

$$(2.5) \quad \langle Q \rangle \leq 1/2\varepsilon(2 + 3\varepsilon + \varepsilon^2)^{-1} [\tau_*(1 - \varepsilon^2)^{3/2} - 12\varepsilon]$$

Условие (2.5) можно записать в эквивалентном виде в терминах  $R$  и  $\varepsilon$ :

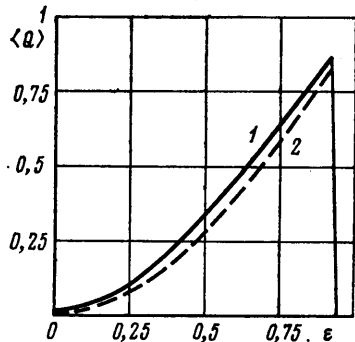
$$(2.6) \quad R \geq \frac{72\pi(2+3\varepsilon+\varepsilon^2)\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}[\tau_*(1-\varepsilon^2)^{3/2}-12\varepsilon]} - \frac{12\pi(2+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

Формула (2.5) верна не во всем диапазоне  $\varepsilon$  от нуля до единицы, а для  $\varepsilon$  от  $\varepsilon_1$  до  $\varepsilon_2$ , где  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — корни уравнений  $R=0$  (см. (2.6)) и  $\tau_*(1-\varepsilon^2)^{3/2}-12\varepsilon=0$  соответственно.

Необходимо отметить, что наряду с условием полного отсутствия разрушения эритроцитов (2.5) по данным из [5, 6] можно определить ту часть объема  $\langle Q \rangle$ , которая содержит разрушившиеся эритроциты, если условие (2.5) не выполняется. Для этого достаточно по решению задачи (1.2) вычислить траектории лагранжевых частиц и сравнить импульсы сдвиговых напряжений, которые испытывают частицы, двигаясь вдоль траекторий, с их критическими значениями, приведенными в [5, 6].

Кроме гемолиза крови при некоторых режимах работы насоса может возникнуть еще одно нежелательное явление — дрейф эритроцитов в направлении, противоположном направлению основного потока. Обратный ток эритроцитов наиболее выражен у стенок трубки, поскольку в этих областях сдвиговое напряжение  $\tau$  максимально. Для того чтобы получить условия существования обратного тока эритроцитов, необходимо вычислить среднее значение величины сдвигового напряжения на стенке трубки за один оборот ролика  $\langle \tau_w \rangle$ . Используя (2.2), получаем

$$(2.7) \quad \langle \tau_w \rangle = 6(1+R_0)^{-1}(1-\varepsilon^2)^{-3/2} \times \\ \times (Q_0 - (1+R_0)\varepsilon^2 - R_0\varepsilon^2 \cos \varphi)$$



Фиг. 2

Обратного тока эритроцитов не будет для любых  $\varphi$ , если  $Q_0 - \varepsilon^2 - 2R_0\varepsilon^2 \geq 0$ , откуда  $2R_0 \leq (1-\varepsilon^2)/(2+\varepsilon^2)$ . Учитывая  $\langle Q \rangle = Q_0/(1+R_0)$ , получим неравенство

$$(2.8) \quad \langle Q \rangle \geq 6\varepsilon^2(5+\varepsilon^2)^{-1}$$

На фиг. 2 области изменения  $\varepsilon$  и  $\langle Q \rangle$ , где выполнены условия (2.5) и (2.8), обозначены цифрами 1 и 2. Управляя работой насоса так, чтобы  $\varepsilon$  и  $\langle Q \rangle$  попадали в область 2, можно обеспечить отсутствие гемолиза крови. Если же  $\varepsilon$  и  $\langle Q \rangle$  попадают в область 1, то гемолиз крови и обратный ток эритроцитов отсутствуют одновременно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Регурер С. А. О движении вязкой жидкости в трубе с деформирующейся стенкой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 4.
2. Brown T. D., Hung T. K. Computational and experimental investigations of two-dimensional nonlinear peristaltic flows. — J. Fluid Mech., 1977, v. 83, No. 2.
3. Burns J. C., Parkes T. Peristaltic motion. — J. Fluid Mech., 1967, v. 29, No. 4.
4. Shapiro A. H., Jaffrin M. Y., Weinberg S. L. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number. — J. Fluid Mech., 1969, v. 37, No. 4.
5. Leverett L. B., Hellums J. D., Alfrey C. P., Lynch E. C. Red blood cell damage by shear stress. — Biophys. Journal, 1972, v. 12, No. 3.
6. Roschke E. J., Harrison E. C. Fluid shear stress in prosthetic heart valves. — J. Biomechanics, 1977, v. 10, No. 5-6.

Москва

Поступила в редакцию  
15.II.1980