

ся дугой Ляпунова. Кроме того, известны аналитические решения для частных случаев формы АВ.

Авторы выражают благодарность Н. Б. Ильинскому за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Якимов Н. Д. Вариационные теоремы для задач с кривыми депрессии.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 13. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1976.
2. Baiocchi C., Friedman A. A filtration problem in a porous medium with variable permeability.— Ann. Mat. Pura ed. Appl., 1977, 114.
3. Данилова Г. В., Салимов Н. Б. Приближенный метод решения одной задачи фильтрации из канала.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 9. Изд-во Казанского ун-та, 1972.

Казань

Поступила в редакцию  
15.VIII.1979

УДК 532.525.6

### ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВОБОДНО РАСПИРЯЮЩЕЙСЯ СТРУИ С ПЛАСТИНОЙ

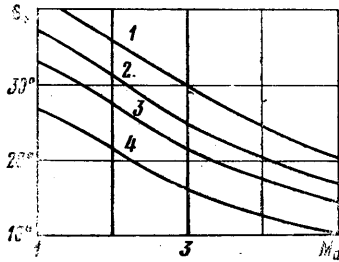
ГЕРАСИМОВ Ю. И.

В летательных аппаратах часто встречается конструктивная схема, в которой сверхзвуковое сопло установлено вблизи корпуса аппарата, поверхность которого можно в первом приближении считать плоской. При этом ось сопла расположена параллельно или под некоторым углом к поверхности корпуса.

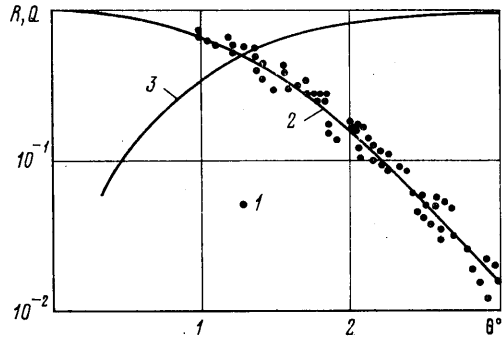
Решению вопросов, связанных с рассматриваемой схемой, посвящены работы [1–6]. В работах [1, 2] получено численное решение для гиперболической системы уравнений движения идеального газа методом сквозного счета. Однако из-за возможности образования дозвуковой зоны у поверхности пластины разработанные методы имеют ограничения по предельному значению угла разворота струи на кромке сопла, т. е. по степени нерасчетности истечения. Это приводит к тому, что в расчетном поле на довольно близком расстоянии образуется диск Маха, что не позволяет получить решение для дальнего следа расширяющейся в вакуум струи. В такой ситуации главенствующее положение занимают приближенные методы решения, основанные на результатах экспериментальных исследований. В качестве примера можно сослаться на [3, 4], где приведено решение задач о силовом воздействии струи на пластину и положение фронта скачка уплотнения для случая параллельного положения пластины относительно оси сопла. Авторы работ [5, 6], в которых приведены результаты исследований вопроса о тепловом воздействии струи на поверхность, так же ограничились рассмотрением этого частного случая взаимного расположения сопла и пластины.

В настоящей работе рассматривается приближенное решение задачи о силовом воздействии струи идеального газа, истекающего из осесимметричного сопла на пластину. Сформулированы параметры подобия и переменные, в которых решение рассматриваемой задачи для общего случая «бокового» взаимодействия струи с пластиной имеет автомоделный вид.

1. Течение газа в поле расширяющейся в вакуум струи на некотором удалении от среза сопла приближается по своему характеру к течению типа источника с переменной по углу интенсивностью. Для класса сверхзвуковых струй идеального газа, истекающего из сопла с сильным недорасширением, определен параметр подобия в виде отношения линейных поперечного и продольного масштабов длины, приводящих геометрию всякого скачка уплотнения струи к автомоделному виду [7]. С использованием этого параметра в [8] получена аппроксимационная зависимость для распределения плотности газа  $\rho$  во внутренней области струи, в которой течение газа не зависит от условий в окружающей среде. Однако область применения этой зависимости имеет ограничение по угловому положению  $\theta$  радиус-вектора, проведенного из центра среза сопла к рассматриваемой точке пространства, относительно оси сопла.



Фиг. 1



Фиг. 2

В настоящей работе угловой параметр подобия определен в виде

$$(1.1) \quad \theta_+ = \arctg \sqrt{\frac{1-I_1}{I_1}}, \quad I_1 = \left(1 + \frac{1}{\gamma M_a^2}\right) \left(1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{M_a^2}\right)^{-0.5}$$

Здесь  $I_1$  — импульс газа на срезе сопла [7],  $M$  — число Маха,  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей газа, индекс  $a$  обозначает значение параметра на срезе сопла. На фиг. 1 приведены результаты расчета по (1.1). Цифрами 1–4 обозначены зависимости  $\theta_+(M_a)$  для значений  $\gamma=1,2; 1,3; 1,4$  и  $1,67$  соответственно. Эти результаты указывают на то, что изменение  $\theta_+$  в пределах  $15$ – $33^\circ$  охватывает весь практически интересный диапазон значений  $M_a(\gamma)$  сопла.

Анализ распределения плотности газа в поле течения свободно расширяющейся струи проводился с использованием данных работы [9] для сопел с полууглом раствора  $10^\circ$  и диапазонами изменений значений  $M_a=1$ – $5$  и  $\gamma=1,2$ – $1,4$ . Рассматривалось изменение функции  $R=\rho/\rho_c$  в зависимости от значения параметра  $\theta^\circ=\theta/\theta_+$  для точек поля струи, расположенных на дуге окружности радиуса  $r$ , центр которой помещался на срезе сопла,  $\rho_c$  — значение плотности на оси сопла. Результаты такого представления данных работы [9] для диапазона изменения  $r=10$ – $70$  приведены на фиг. 2 (цифра 1). Здесь и далее все линейные размеры отнесены к радиусу срез сопла. Полученное распределение аппроксимируется функцией  $R=\exp[-0,5(\theta^\circ)^2]$  (цифра 2). Эта функция имеет более широкую область применения по  $\theta^\circ$ , чем аналогичная функция в [8]. Точность аппроксимации выражается формулой  $\delta R/R \approx 0,15\theta^\circ$ .

Используя модель источника, зависимость для определения плотности газа в поле течения струи можно выразить в виде

$$(1.2) \quad \rho \sim r^{-2} \exp[-0,5(\theta^\circ)^2]$$

График функции относительного расхода газа  $Q$  (линия 3 на фиг. 2) показывает, что в конус, вершина которого помещена на центр срез сопла, а полуугол при вершине равен  $3\theta_+$ , истекает 97–99% от суммарного расхода газа через сопло. Вследствие этого можно рассматривать значение  $\theta^\circ \approx 3$  в качестве условной границы струи, что придает параметру  $\theta_+$  реальный физический смысл.

2. Рассмотрим схему взаимного расположения пластины и сопла в плоскости симметрии:  $h$  — расстояние от поверхности пластины до центра выходного сечения сопла,  $x$  — ось симметрии пластины,  $x=0$  — точка пересечения высоты  $h$  с поверхностью,  $\beta$  — угол между плоскостью срез сопла и осью  $x$ ,  $\alpha$  — угол между осью сопла и осью  $x$ ,  $\alpha=\beta-\pi/2$ ,  $\theta$  и  $r$  — координаты точки в полярной системе, связанной с центром срез сопла и его осью.

Вид распределения давления газа на поверхность пластины с хорошей точностью описывается упрощенной формулой Ньютона  $p=\rho v^2 \sin^2 \psi$ , где  $\rho$  и  $v$  — плотность и скорость газа в невзмущенной струе у поверхности пластины,  $\psi$  — угол между линией тока газа (вектором, проведенным из центра срез сопла) и поверхностью. Скорость газа в рассматриваемых струях можно принять постоянной и не учитывать в последующем анализе:

$$(2.1) \quad p \sim \rho \sin^2 \psi$$

Для точек, расположенных на оси  $x$ , имеем  $r=h/\sin \psi$ ,  $\psi=\theta-\beta+\pi/2$ ,  $\sin \psi = -\cos(\theta-\beta)$ ,  $\theta=\theta^\circ\theta_+$ . Из рассмотренных выше свойств параметра  $\theta_+$  следует, что для характеристики углового положения пластины относительно сопла целесообразно использовать величину  $\theta_+$  в качестве нормировочной единицы, т. е. становится

очевидной замена  $\beta = \beta^\circ \theta_+$ , где  $\beta^\circ$  — безразмерный параметр. Учитывая сделанные преобразования в выражениях (1.2), (2.1) и объединив их, получаем

$$(2.2) \quad p \sim \cos^4(\theta^\circ \theta_+ - \beta^\circ \theta_+) \exp[-0.5(\theta^\circ)^2]$$

Эксперимент и теория указывает на существование единственного максимума давления на пластине  $p_m$ . Положение максимума  $\theta_m^\circ$  можно определить, продифференцировав (2.2) по  $\theta^\circ$  и приравняв производную нулю:  $dp/d\theta_m^\circ = 0$ . Результатом такого преобразования является уравнение

$$(2.3) \quad \beta^\circ = \theta_m^\circ + \theta_+^{-1} \operatorname{arctg}(0,25\theta_m^\circ \theta_+^{-1})$$

Семейство решений этого уравнения  $\theta_m^\circ(\beta^\circ)$  показано на фиг. 3 для значений  $\theta_+ = 10, 12, 16, 20, 30$  и  $40^\circ$  (цифры 1–6 соответственно). Цифрой 7 на фиг. 3 обозначены решения, полученные для значений  $\beta = \pi/2$ , что соответствует случаю параллельного положения пластины относительно оси сопла ( $\alpha = 0$ ). Эти данные указывают на то, что при уменьшении  $\theta_+$  до величины 10–15° значение  $\theta_m^\circ$  асимптотически приближается к 2, т. е.

$h/x_m \approx 2(1 - I_1)^{0.5} / I_1^{0.5}$  ( $x_m$  — координата положения максимума давления на оси  $x$ ).

Таким образом, из рассмотрения общего случая взаимного расположения сопла и пластины получено решение частного случая для  $\alpha = 0$ , отмеченное и экспериментально подтвержденное в работе [3].

Анализ решений уравнения (2.3) для  $\alpha = 0$  показывает, что они с хорошей точностью аппроксимируются аналитическим выражением

$$(2.4) \quad \theta_m^\circ(0) = \theta_m^\circ(\alpha = 0) = 0,84 + 1,16I_1$$

В окрестности значений  $\theta_m^\circ(0)$  решения уравнения (2.3) могут быть с хорошей точностью аппроксимированы линейными функциями

$$(2.5) \quad \theta_m^\circ - \theta_m^\circ(0) = K \frac{\beta - \pi/2}{\theta_+} = \frac{K\alpha}{\theta_+} = 1,8\alpha^\circ, \quad \alpha^\circ = \frac{\alpha}{3\theta_+ I_1^{0.5}}$$

где  $\alpha^\circ$  — безразмерный параметр, определяющий угловое положение пластины относительно поля течения струи:  $\alpha^\circ = 0$  — пластина расположена параллельно оси сопла,  $\alpha^\circ = 1$  — пластина расположена вблизи границы расширяющейся в вакуум струи и струя практически не оказывает какого-либо воздействия на ее поверхность. Объединяя (2.4) и (2.5), получим формулу для определения положения максимума давления

$$(2.6) \quad \theta_m^\circ = 0,84 + 1,16I_1 + 1,8\alpha^\circ$$

3. Рассмотрим вопрос о распределении давления вдоль оси  $x$ . Отнесем величину давления  $p = p(\theta^\circ, \alpha^\circ)$  к его максимальному на оси  $x$  значению  $p_m = p(\theta_m^\circ, \alpha^\circ)$ :

$$(3.1) \quad p \sim \sin^4(\theta^\circ \theta_+ - \alpha^\circ 3\theta_+ I_1^{0.5}) \exp[-0,5(\theta^\circ)^2]$$

$$(3.2) \quad p \sim \sin^4(\theta_m^\circ \theta_+ - \alpha^\circ 3\theta_+ I_1^{0.5}) \exp[-0,5(\theta_m^\circ)^2]$$

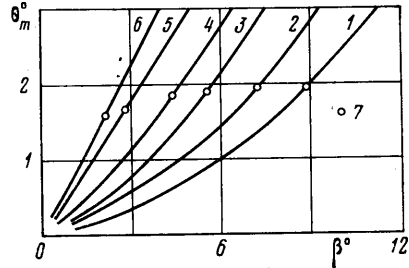
Преобразуя в (3.1)  $\theta^\circ$  к виду  $\theta^\circ = \theta_m^\circ - \delta\theta^\circ$  и разлагая функцию  $\sin$  в ряд по степеням  $\delta\theta^\circ$ , с исключением из рассмотрения членов разложения со степенями больше единицы, получим

$$(3.3) \quad p^\circ = p/p_m = [1 - \delta\theta^\circ C]^4 \exp[\delta\theta^\circ \theta_m^\circ - 0,5(\delta\theta^\circ)^2]$$

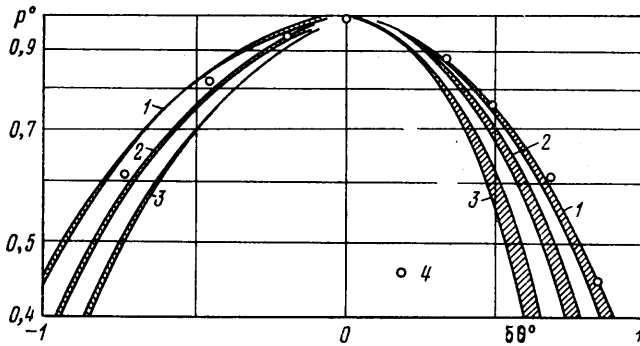
$$C = \theta_+ \operatorname{ctg}[\theta_+(\theta_m^\circ - 3\alpha^\circ I_1^{0.5})]$$

Результаты расчета по (3.3) с учетом (2.6) приведены на фиг. 4 для значений  $\alpha^\circ = 0, 0,3$  и  $0,6$  (цифры 1–3 соответственно). Штриховкой показан разброс расчетных значений  $p^\circ(\alpha^\circ, \delta\theta^\circ, \theta_+)$ , соответствующий изменению  $\theta_+$  внутри оговоренного ранее диапазона 15–33°. Приведенные данные показывают, что при фиксированных значениях  $\alpha^\circ$  и  $\delta\theta^\circ$

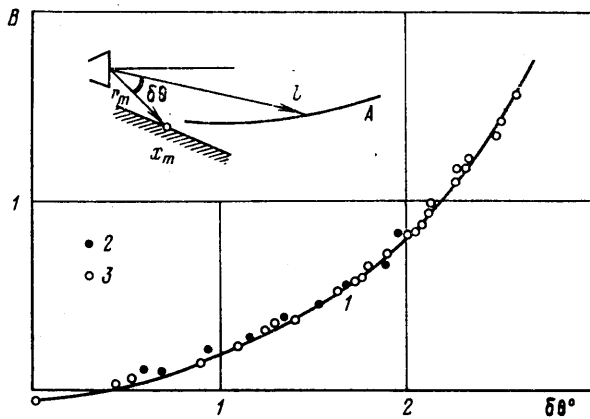
$$\frac{p_1^\circ - p_2^\circ}{p_1^\circ + p_2^\circ} \leq 0,1, \quad p_1^\circ = p^\circ(\theta_+ = 33^\circ), \quad p_2^\circ = p^\circ(\theta_+ = 15^\circ)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Это позволяет считать функцию (3.3) автомодельной в первом приближении по значениям  $\theta_+$  для рассмотренных диапазонов изменения  $\alpha^\circ=0-0,6$ ,  $\theta_+=15-33^\circ$  и  $p^\circ=0,4-1$ . Цифрой 4 на фиг. 4 обозначены данные, полученные в результате эксперимента:  $M_a=2,54$ ,  $\gamma=1,4$ ,  $h=2,75$ ,  $\alpha=0$  [3]. Положение этих данных с хорошей точностью согласуется с расчетной зависимостью (цифра 2).

Из изложенного выше анализа приближенного решения задачи о силовом воздействии свободно расширяющейся струи на пластину следует, что параметрами подобия этой задачи являются:  $I_1$ ,  $\alpha^\circ=\alpha/30+I_1^{0,5}$ ,  $\delta\theta^\circ=\theta_m^\circ-\theta^\circ=(\theta_m-\theta)/\theta_+$ . Провести сравнение полученных решений с результатами экспериментов в настоящее время не представляется возможным из-за отсутствия последних для случаев, отличных от  $\alpha=0$ .

В этой ситуации хорошее подтверждение справедливости сделанных выводов следует из рассмотрения задачи о положении в струе фронта скачка уплотнения, образующегося из-за преломления линий тока газа у поверхности пластины.

4. Для случая параллельного положения пластины относительно оси сопла решение задачи о положении фронта скачка уплотнения получено в [4]. Аргументом функции, аппроксимирующей положение фронта скачка уплотнения, является параметр  $\xi=x/x_m$ . В этой же работе сделан вывод об инвариантности распределения  $p^\circ(\xi)$  относительно значений  $M_a$ . Этот факт позволяет сделать предположение о наличии связи между видом распределения давления по поверхности пластины и положением фронта скачка уплотнения в струе. Следствием этого предположения и установленной выше инвариантности по  $\theta_+$  функции  $p^\circ(\delta\theta^\circ, \alpha^\circ)$  является вид переменных в зависимости, определяющей положение фронта скачка уплотнения для общего случая взаимного расположения сопла и пластины:  $S=l/r_m$ ,  $\delta\theta^\circ=\theta_m^\circ-\theta^\circ$  и  $\alpha^\circ$ , где  $r_m$  и  $l$  — соответственно расстояние от центра выходного сечения сопла до точки  $x_m$  и до фронта скачка уплотнения  $A$  (фиг. 5). В этих переменных искомая зависимость, определенная по результатам экспериментов [4, 10], имеет вид

$$(4.1) \quad S = \exp \{ 2,3 \left[ (1+1,1\alpha^\circ) [0,049(\delta\theta^\circ)^3 + 0,047(\delta\theta^\circ)^2 + 0,176\delta\theta^\circ] - 0,06 \right] \}$$

Положение экспериментальных данных относительно аппроксимирующей их зависимости показано на фиг. 5 в координатах  $\delta\theta^\circ$  и  $B = (1 + 1,1\alpha^2)^{-1} \lg S$ . Цифрой 1 на фиг. 5 обозначена функция, описываемая многочленом, заключенным в квадратные скобки выражения (4.1). Цифрами 2 и 3 обозначены данные работ [4, 10] соответственно. Область применения (4.1), определяемая условиями экспериментов [4, 10], имеет следующие границы:  $\alpha^\circ = 0 - 0,36$ ,  $\theta_+ = 19 - 25^\circ$ . Хорошая сходимость результатов экспериментов в единую зависимость иллюстрирует возможности применения рассмотренной системы параметров подобия и переменных в решении вопросов задачи о взаимодействии свободно расширяющейся струи с пластиной для диапазонов параметров  $\alpha^\circ = 0 - 0,6$  и  $\theta_+ = 15 - 33^\circ$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хромов Н. Е. Расчет взаимодействия осесимметричной сверхзвуковой недорасширенной струи с преградой.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5.
2. Иванов М. Я., Назаров В. П. Численное решение задачи о «боковом» взаимодействии нерасчетных сверхзвуковых струй идеального газа с плоскостью и друг с другом.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 1.
3. Лейтес Е. А. Моделирование силового воздействия сильно недорасширенной струи на плоскую поверхность, параллельную ее оси.— Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 1.
4. Кононов Ю. Н., Лейтес Е. А. Параметры течения в составных струях.— Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1721.
5. Васильев А. А., Елизаров В. А., Игин П. Г., Коплякевич Р. М. Исследование теплового воздействия сильно недорасширенной газовой струи на плоскую поверхность.— Тр. 4-й Всес. конф. по динамике разрежен. газа и молекул. газ. динамике. Б.м., 1977.
6. Вознесенский Э. Н., Немченко В. И. Воздействие сильно недорасширенной струи подогретого воздуха на плоскую пластину.— Тр. 18-й Науч. конф. Моск. физ.-техн. ин-т. Сер. Аэромеханика. Процессы упр., 1972. Долгопрудный, 1973.
7. Мурзинов И. Н. Параметры подобия при истечении сильно недорасширенных струй в затопленное пространство.— Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
8. Лейтес Е. А. Распределение плотности в дальнем поле сверхзвуковой струи, истекающей в вакуум.— Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1672.
9. Жозов В. А., Хомутский А. А. Атлас сверхзвуковых течений свободно расширяющегося идеального газа, истекающего из осесимметричного сопла.— Тр. ЦАГИ, 1970, вып. 1224.
10. Герасимов Ю. И., Палопеженцев С. А., Ярыгин В. Н. Исследование газодинамической структуры блочных струй.— Тез. докл. 6-й Всесоюз. конф. по динамике разреженных газов. Новосибирск, 1979.

Москва

Поступила в редакцию  
3.IX.1979

УДК 532.593:532.529

### ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО СЛОЕМ ПУЗЫРЬКИ ГАЗА-ЖИДКОСТЬ

ГЕЛЬФАНД Б. Е., ГУБАНОВ А. В., ТИМОФЕЕВ Е. И.

Взаимодействие ударных волн с границами раздела в двухфазных средах изучается в течение длительного времени в связи с практической важностью этого явления. В [1] впервые рассмотрено взаимодействие ударных волн с границей раздела двухфазная среда — твердая стенка. Дальнейшее исследование этого явления описано в [2–4], и сейчас имеются простые способы для расчета параметров ударных волн за границами раздела жидкость — газожидкостная среда при нормальном падении волны давления на границу раздела. В значительно меньшей степени исследовано косоое падение ударных волн на границы раздела в двухфазных средах. Еще меньше сведений о прохождении ударных волн через слои (экраны) газожидкостных смесей при произвольном угле встречи волны с экраном. Последняя задача, однако, представляется одной из наиболее интересных для практических приложений, так как