

верхности должно быть использовано автомодельное решение уравнений (12) на линии  $r=R$ .

Косвенным подтверждением полученных результатов может служить известный факт сильного утоньшения пограничного слоя на торцевой стенке межлопаточного канала [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
2. Zamir M., Young A. D. Experimental investigation of the boundary layer in a streamwise corner. — Aeronaut. Quart. 1970, v. 21, No. 4.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
4. Белянин Н. М., Шальман Е. Ю. Ламинарный пограничный слой в закрученном потоке. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 1.
5. Лэнгстон, Нэйс, Хупер. Трехмерное течение в канале турбинной решетки. — Тр. Амер. об-ва инж.-мех. Сер. А. Энергетические машины и установки, 1977, № 1.

Москва

Поступила в редакцию  
16.VIII.1979

УДК 532.546

#### ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ ГРУНТАХ

ФАТКУЛЛИН Р. Г., ЯКИМОВ Н. Д.

В настоящей работе исследуется влияние изменения неоднородности грунта на решение задачи фильтрации в случае земляных плотин и каналов. Устанавливается класс задач, для которых удается указать изменения коэффициента фильтрации, приводящие к изменению положения депрессионной кривой в определенном направлении. Подобные теоремы сравнения для случая изменения формы тех или иных участков границы обложения были получены в [1], в частности был исследован характер изменения положения кривой депрессии.

В качестве примеров применения результатов дается оценка решения для плотины с вертикальной неоднородностью грунта через решение для однородной плотины с тем же профилем и оценка для одной осесимметричной задачи через решение соответствующей плоской задачи.

Полученные результаты могут использоваться как при теоретическом исследовании задач, так и с целью получения оценок искомого решения через известные решения.

1. Обозначим через  $h$  пьезометрический напор, тогда в обозначениях фиг. 1 имеем следующую общую постановку задачи. Требуется определить форму депрессионной кривой  $BC$  и функцию  $h(x, y)$  в области фильтрации  $\Omega$  по следующим условиям:

$$(1.1) \quad \nabla(\kappa \nabla h) = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$(1.2) \quad h = H_1(x, y) \in AB, \quad h = H_2(x, y) \in ED, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \quad (x, y) \in AE$$

$$h = y, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in BC, \quad h = y, \quad \frac{\partial h}{\partial n} \geq 0 \quad (x, y) \in CD$$

где  $\kappa(x, y)$  — коэффициент фильтрации, функция, непрерывно дифференцируемая в  $\Omega$ ;  $n$  — внутренняя нормаль.

Обозначим через  $\Gamma$  неизвестный участок  $BC$  границы области  $\Omega$ , т. е. кривую депрессии. Пусть  $\{\Gamma_1, h_1\}$  — решение задачи (1.1) — (1.2) при  $\kappa = \kappa_1$  и  $\{\Gamma_2, h_2\}$  — при  $\kappa = \kappa_2$ . Тогда основной результат работы можно сформулировать в следующем виде.

*Теорема 1.* Если имеют место условия

$$(1.3) \quad \begin{aligned} h_i - y > 0, \quad (x, y) \in \Omega_i, \\ i = 1; 2, \quad \nabla(\kappa_2 \nabla h_1) \geq 0, \\ (x, y) \in \Omega_1 \end{aligned}$$

то  $\Gamma_2$  не может иметь точек внутри  $\Omega_1$ . При  $\nabla(\kappa_2 \nabla h_1) \neq 0$  кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не имеют общих точек, кроме точки  $B$ .

Заметим, что первое условие (1.3) означает положительность давления в области фильтрации.

При доказательстве будем следовать работе [1]. Рассмотрим разность  $h^* = h_2 - h_1$  в пересечении  $\Omega^*$  областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , тогда имеем

$$(1.4) \quad \nabla(\kappa_2 \nabla h^*) = -\nabla(\kappa_2 \nabla h_1)$$

Предположим, что существуют участки  $S_2 = \Gamma_2 \cap \partial\Omega^*$ , где  $\partial\Omega^*$  граница области  $\Omega^*$ . Тогда в силу условия (1.3) в  $\Omega^*$  должна существовать совокупность областей  $\Omega_0$ , где  $h^* < 0$  и  $S_2 = \partial\Omega_0$ . Ясно, что на  $\partial\Omega_0 - S_2$  либо  $h^* = 0$ , либо  $\partial h^* / \partial n = 0$ .

Далее из формулы Грина и соотношения (1.4) имеем

$$\int_{\partial\Omega_0} \kappa_2 \frac{\partial h^*}{\partial n} ds = - \int_{\Omega_0} \nabla(\kappa_2 \nabla h^*) dx dy = \int_{\Omega_0} \nabla(\kappa_2 \nabla h_1) dx dy$$

где  $s$  — дуговая абсцисса (при возрастании  $s$  область остается слева). Учитывая  $\partial h_2 / \partial n = 0$  на  $S_2$ , имеем

$$(1.5) \quad \int_{S_2} \kappa_2 \frac{\partial h_1}{\partial n} ds = \int_{\partial\Omega_0 - S_2} \kappa_2 \frac{\partial h^*}{\partial n} ds - \int_{\Omega_0} \nabla(\kappa_2 \nabla h_1) dx dy$$

Поскольку  $\max h^* = 0$  при  $(x, y) \in \bar{\Omega}_0$ , то на участках, где  $h^* = 0$ , имеем  $\partial h^* / \partial n \leq 0$ . Следовательно, на  $\partial\Omega_0 - S_2$  будет  $\partial h^* / \partial n \leq 0$ . Тогда из (1.5) при  $\nabla(\kappa_2 \nabla h_1) \geq 0$  получим

$$(1.6) \quad \int_{S_2} \kappa_2 \frac{\partial h_1}{\partial n} ds < 0$$

Теперь рассмотрим подобласти области  $\Omega_1$ , лежащие по другую, чем  $\Omega_0$ , сторону от  $S_2$ . Обозначим их совокупность через  $\Omega_0'$ . Граница каждой из таких областей состоит из  $S_2$  и из участков  $S_1$ , принадлежащих  $\Gamma_1$ , за исключением одной области, в состав границы которой может входить часть участка  $CD$ .

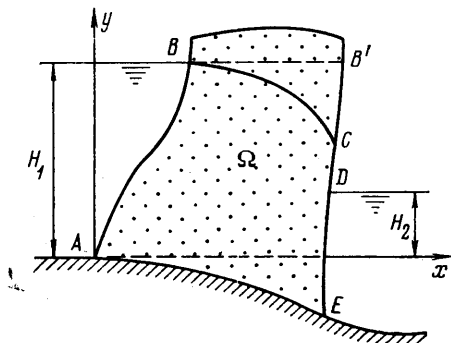
Применяя снова формулу Грина, получим

$$(1.7) \quad \int_{S_2} \kappa_2 \frac{\partial h_1}{\partial n} ds + \int_{\partial\Omega_0' - S_2} \kappa_2 \frac{\partial h_1}{\partial n} ds = - \int_{\Omega_0'} \nabla(\kappa_2 \nabla h_1) dx dy < 0$$

Так как  $\partial h_1 / \partial n = 0$  на  $S_1$  и  $\partial h_1 / \partial n \geq 0$  на  $CD$ , то второй интеграл в (1.7) неотрицателен, следовательно,

$$(1.8) \quad \int_{S_2} \kappa_2 \frac{\partial h_1}{\partial n} ds < 0$$

Однако (1.8) противоречит (1.6), поскольку направление нормали в (1.6) и (1.8) противоположно ( $\Omega_0$  и  $\Omega_0'$  лежат по разные стороны от рассматриваемого участка). Следовательно, предположение о существовании  $S_2$  неверно.



Фиг. 1

Пусть теперь  $\Omega_1 \subset \Omega_2$  и кривые  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют общую точку  $B^*$ , отличную от  $B$ . Тогда в точке  $B^*$ , где  $h^*=0$ , функция  $h^*$  достигает своего минимума. Следовательно, согласно принципу Заремба – Жиро, в точке  $B^*$  должно выполняться  $\partial h^* / \partial n > 0$ , но это невозможно, поскольку там  $\partial h^* / \partial n = \partial h_2 / \partial n - \partial h_1 / \partial n = 0$ . Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует единственность решения задачи, которая ранее была показана для более общего случая в [1].

2. В большинстве случаев непосредственная проверка условий теоремы 1 затруднительна, поэтому в этом пункте приведем достаточные условия для выполнения (1.3).

*Лемма 1.* Если выполнены условия  $\kappa_y \geq 0$  при  $H_2 < y \leq H_1$ ,  $dx/ds \geq 0$  в тех точках  $AE$ , в которых  $y > H_2$ , то  $h - y > 0$  в  $\Omega$ .

Таким образом, если проницаемость грунта не убывает по высоте и водоупор  $AE$  в области  $y > H_2$  не имеет участков с обратным наклоном, то давление в области фильтрации положительно. Доказательство леммы приведено в [1].

Следует также отметить, что в случае прямоугольной перемычки при  $\kappa = \exp [f(x) + g(y)]$  условие  $\kappa_y \geq 0$  можно заменить более слабым условием, полученным в [2]:

$$g'(y) \geq -\exp [g(y)] \int_y^{H_1} \exp [g(t)] dt$$

*Лемма 2.* Пусть  $k_{xy} = 0$ , где  $k = \ln \kappa$ , тогда из  $h_x \leq 0$  на  $\partial\Omega$  следует  $h_x < 0$  в  $\Omega$  и из  $h_y \geq 0$  на  $\partial\Omega$  следует  $h_y > 0$  в  $\Omega$ .

При доказательстве этой леммы для сокращения записи введем обозначения  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ . Рассмотрим функции  $U_i = (\partial h / \partial x_i) \exp [-\alpha_i]$ ,  $i = 1; 2$ , где  $\alpha_i$  – некоторые дважды дифференцируемые в  $\Omega$  функции. Тогда из (1.1) имеем

$$(2.1) \quad \Delta U_i + (\nabla (2\alpha_i + k), \nabla U_i) + \left[ \Delta \alpha_i + (\nabla \alpha_i)^2 + (\nabla \alpha_i, \nabla k) + \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_i} \right] U_i = - \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} \exp [\alpha_j - \alpha_i] U_j$$

$$i = 1; 2, \quad j = 3 - i, \quad \Delta U_i = \nabla (\nabla U_i)$$

Пусть  $k(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$ , полагая  $\alpha_i = -f_i$ , из (2.1) находим

$$\Delta U_i - f_i' \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + f_j' \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 3 - i$$

Отсюда, согласно принципу максимума, следует утверждение леммы.

*Лемма 3.* При  $k_{xy} < 0$  и  $(k_{xx} - k_{yy}) / k_{xy} = \text{const}$  из  $\{h_x \leq 0$  и  $h_y \geq 0$  на  $\partial\Omega\}$  следует  $\{h_x < 0$  и  $h_y > 0$  в  $\Omega\}$ .

Для доказательства леммы положим

$$\alpha_{1x} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} (k_y - \lambda k_x), \quad \alpha_{1y} = -\frac{1}{\lambda} \alpha_{1x}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \ln \lambda$$

где константа  $\lambda > 0$  выбрана так, что  $k_{xx} - \lambda^{-1} k_{xy} = k_{yy} - \lambda k_{xy}$ . Тогда (2.1) примет вид

$$(2.2) \quad \Delta U_i + (\nabla (2\alpha_i + k), \nabla U_i) + \lambda^{(i-j)} \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} U_i = -\lambda^{(j-i)} \frac{\partial^2 k}{\partial x_i \partial x_j} U_j$$

и для функции  $Z = U_2 - U_1$  получим

$$\Delta Z + (\nabla (2\alpha_1 + k), \nabla Z) = 0$$

Отсюда следует  $Z > 0$  в  $\Omega$ .

Пусть  $\Omega^+ = \{(x, y) \in \Omega \mid U_1 > 0\}$ ,  $\Omega^- = \{(x, y) \in \Omega \mid U_1 \leq 0\}$ . Ясно, что  $\partial\Omega^- \subset \partial\Omega \cup \partial\Omega^+$ , а из положительности  $Z$  в  $\Omega$  имеем  $U_2 \geq 0$  на  $\partial\Omega^+$  и на  $\partial\Omega^-$ . Тогда при  $k_{xy} < 0$ , согласно принципу максимума, из (2.2) вытекает, что  $U_2 > 0$  в  $\Omega^-$ , следовательно,  $U_2 > 0$  в  $\Omega$ . В результате из (2.2) получим  $U_1 < 0$  в  $\Omega$ . Лемма 3 доказана.

Условие  $k_{xy} = 0$  в лемме 2 означает, что коэффициент фильтрации представим в виде  $\kappa(x, y) = F(x)\Phi(y)$ . В случае условия  $(k_{xx} - k_{yy}) / k_{xy} = \text{const}$  леммы 3 функция  $k(x, y)$  должна являться решением уравнения гиперболического типа, поэтому допустимо представление  $\kappa(x, y) = F(x + my)\Phi(x - y / m)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\kappa_{iy} \geq 0$ ,  $i=1; 2$ , при  $H_2 < y \leq H_1$ , тогда утверждение теоремы 1 имеет место в следующих трех случаях:

$$(2.3) \quad \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)_x = 0, \quad \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)_y \geq 0, \quad k_{ixy} = 0$$

$$(2.4) \quad 0 \leq y < H_1, \quad \frac{dx}{ds} < 0, \quad (x, y) \in AB, \quad y < H_2 < H_1, \quad (x, y) \in ED$$

$$\frac{dx}{ds} \geq 0, \quad (x, y) \in EB', \quad \frac{dy}{ds} \leq 0, \quad (x, y) \in AE$$

$$(2.5) \quad \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)_x \leq 0, \quad \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)_y = 0, \quad k_{ixy} = 0$$

$$(2.6) \quad \frac{dy}{ds} < 0, \quad (x, y) \in AB, \quad \frac{dy}{ds} \geq 0, \quad (x, y) \in EB'$$

$$(2.7) \quad y < H_1, \quad \frac{dx}{ds} \geq 0, \quad (x, y) \in AE$$

$$\left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)_x \leq 0, \quad \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)_y \geq 0$$

В третьем случае кроме (2.7) одновременно выполнены (2.4), (2.6) и либо  $k_{ixy} = 0$ , либо  $k_{ixy} < 0$  и  $(k_{ixx} - k_{iy}) / k_{ixy} = \text{const}$ .

Ограничимся доказательством наиболее трудного случая (2.7). Из  $\kappa_{iy} \geq 0$  и (2.4) вытекает первое условие (1.3) (лемма 1), тогда из (2.4) и (2.6) получим  $h_{ix} \leq 0$  и  $h_{iy} \geq 0$  на  $\partial\Omega_1$ . Откуда, согласно леммам 2 и 3, следует  $h_{ix} < 0$  и  $h_{iy} > 0$  в  $\Omega_1$ . Поскольку  $\nabla(\kappa_2 \nabla h_1) = \kappa_1(\nabla(\kappa_2 / \kappa_1), \nabla h_1)$ , то имеем  $\nabla(\kappa_2 \nabla h_1) \geq 0$ . Теорема доказана.

3. Приведем примеры применения полученных результатов. Пусть схема фильтрации соответствует фиг. 1 с заданными участками границы, удовлетворяющими условиям (2.4). Тогда для случаев  $\kappa_1 = \text{const}$  и  $\kappa_2 = \kappa_2(y)$ ,  $\kappa_2'(y) \geq 0$  можно применить теорему 2 (случай (2.3) — (2.4)).

Депрессионная кривая, соответствующая такому неоднородному грунту, лежит строго выше депрессионной кривой, соответствующей однородному грунту.

В качестве второго примера рассмотрим задачу фильтрации из осесимметричного водоема в дренаж. Схема области фильтрации представлена на фиг. 2. Приведем общую постановку задачи.

Требуется определить форму депрессионной кривой  $BC$  и функцию  $h(x, y)$  по следующим условиям:

$$(3.1) \quad \nabla(x\kappa(x, y)\nabla h) = 0$$

$$h = 0, \quad (x, y) \in AB, \quad h = -H, \quad (x, y) \in CD, \quad h = y$$

$$(3.2)$$

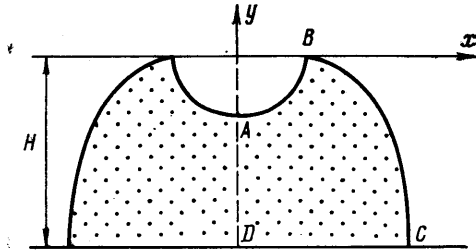
$$\frac{\partial h}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in BC, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in AD$$

Пусть  $dy/ds \leq 0$  на  $AB$  и  $\kappa(x, y) = \exp[f(x) + g(y)]$ ,  $g'(y) \geq 0$ , тогда для решения задачи (3.1) — (3.2) можно получить следующую оценку сверху.

Кривая депрессии для плоского случая лежит строго вне области фильтрации, соответствующей осесимметричному случаю.

Действительно, это следует из теоремы 2 (случай (2.5) — (2.6)), если положить  $\kappa_1 = x\kappa(x, y)$  и  $\kappa_2 = \kappa(x, y)$ .

Отметим, что плоский вариант этой задачи (фильтрация из канала в дренаж) был рассмотрен при  $\kappa = \text{const}$  в [3], где установлена однозначная разрешимость и предложен приближенный метод решения задачи в предположении, что  $AB$  являет-



Фиг. 2

ся дугой Ляпунова. Кроме того, известны аналитические решения для частных случаев формы  $AB$ .

Авторы выражают благодарность Н. Б. Ильинскому за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Якимов Н. Д. Вариационные теоремы для задач с кривыми депрессии.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 13. Казань, Изд-во Казанского ун-та, 1976.
2. Baiocchi C., Friedman A. A filtration problem in a porous medium with variable permeability.— Ann. Mat. Pura ed. Appl., 1977, 114.
3. Данилова Г. В., Салимов Н. Б. Приближенный метод решения одной задачи фильтрации из канала.— Тр. семинара по краевым задачам, вып. 9. Изд-во Казанского ун-та, 1972.

Казань

Поступила в редакцию  
15.VIII.1979

УДК 532.525.6

### ПАРАМЕТРЫ ПОДОБИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВОБОДНО РАСПИРЯЮЩЕЙСЯ СТРУИ С ПЛАСТИНОЙ

ГЕРАСИМОВ Ю. И.

В летательных аппаратах часто встречается конструктивная схема, в которой сверхзвуковое сопло установлено вблизи корпуса аппарата, поверхность которого можно в первом приближении считать плоской. При этом ось сопла расположена параллельно или под некоторым углом к поверхности корпуса.

Решению вопросов, связанных с рассматриваемой схемой, посвящены работы [1–6]. В работах [1, 2] получено численное решение для гиперболической системы уравнений движения идеального газа методом сквозного счета. Однако из-за возможности образования дозвуковой зоны у поверхности пластины разработанные методы имеют ограничения по предельному значению угла разворота струи на кромке сопла, т. е. по степени нерасчетности истечения. Это приводит к тому, что в расчетном поле на довольно близком расстоянии образуется диск Маха, что не позволяет получить решение для дальнего следа расширяющейся в вакуум струи. В такой ситуации главенствующее положение занимают приближенные методы решения, основанные на результатах экспериментальных исследований. В качестве примера можно сослаться на [3, 4], где приведено решение задач о силовом воздействии струи на пластину и положение фронта скачка уплотнения для случая параллельного положения пластины относительно оси сопла. Авторы работ [5, 6], в которых приведены результаты исследований вопроса о тепловом воздействии струи на поверхность, так же ограничились рассмотрением этого частного случая взаимного расположения сопла и пластины.

В настоящей работе рассматривается приближенное решение задачи о силовом воздействии струи идеального газа, истекающего из осесимметричного сопла на пластину. Сформулированы параметры подобия и переменные, в которых решение рассматриваемой задачи для общего случая «бокового» взаимодействия струи с пластиной имеет автомоделный вид.

1. Течение газа в поле расширяющейся в вакуум струи на некотором удалении от среза сопла приближается по своему характеру к течению типа источника с переменной по углу интенсивностью. Для класса сверхзвуковых струй идеального газа, истекающего из сопла с сильным недорасширением, определен параметр подобия в виде отношения линейных поперечного и продольного масштабов длины, приводящих геометрию всякого скачка уплотнения струи к автомоделному виду [7]. С использованием этого параметра в [8] получена аппроксимационная зависимость для распределения плотности газа  $\rho$  во внутренней области струи, в которой течение газа не зависит от условий в окружающей среде. Однако область применения этой зависимости имеет ограничение по угловому положению  $\theta$  радиус-вектора, проведенного из центра среза сопла к рассматриваемой точке пространства, относительно оси сопла.