

УДК 532.517+541.124

**ТУРБУЛЕНТНОЕ СМЕШЕНИЕ РЕЛАКСИРУЮЩИХ ГАЗОВ  
В СВЕРХЗВУКОВОМ СОПЛЕ**

АКАТНОВ Н. И., ЛАВРОВ А. В.

Исследованы процессы турбулентного смешения горячего азота и углекислого газа ( $\text{CO}_2$ ) в сверхзвуковом сопле применительно к газодинамическому лазеру с селективным тепловым возбуждением. Реальная картина течения в сопле и резонаторе моделируется системой уравнений турбулентного пограничного слоя. Результаты расчета профиля коэффициента усиления, концентрации  $\text{CO}_2$  и мощности генерации удовлетворительно согласуются с опытными данными.

1. Исследование турбулентного смешения неизотермических струй в сверхзвуковом сопле с учетом неравновесных физико-химических процессов необходимо при разработке гиперзвуковых прямоточных воздушно-реактивных двигателей [1, 2] (при этом в сверхзвуковом сопле происходит диффузионное горение воздуха, и какого-либо горючего), при создании газодинамических лазеров с селективным тепловым возбуждением [3-10] (при этом происходит смешение горячего азота с холодным  $\text{CO}_2$  и передача колебательной энергии от  $\text{N}_2$  к  $\nu_3 \text{CO}_2$ ) и в ряде других случаев. Численному моделированию процессов в газодинамическом лазере посвящено незначительное число работ [6, 8-10], в большинстве из которых течение в сопле и резонаторе рассчитывается с использованием модели мгновенного смешения. Применение этой модели оправдано, если  $\text{N}_2$  и  $\text{CO}_2$  смешиваются в сошловой решетке [7, 9] или если  $\text{CO}_2$  подмешивается в горловине сопла через систему эжекторов [5]. Однако, если  $\text{CO}_2$  подается через сопло в центральном теле, помещенном в горловине сверхзвукового сопла, хорошего согласия с экспериментом следует ожидать, только если в математической модели лазера будут учтены процессы диффузии компонентов и колебательной энергии.

Система уравнений пограничного слоя, включающая уравнения диффузии колебательной энергии, впервые была применена к анализу газодинамического лазера с селективным тепловым возбуждением в работе [6] для расчета течения только в сопле без рассмотрения процессов в резонаторе. В этой работе получено удовлетворительное согласие результатов расчета профиля коэффициента усиления  $g$  и объемной концентрации  $\text{CO}_2$   $\gamma$  на срезе сопла с опытными данными. Но этот результат получен путем «подгонки» эмпирической константы в формуле для коэффициента турбулентной вязкости, поэтому нет уверенности в том, что расчет сопла с иной геометрией и при других значениях исходных параметров также хорошо совпадает с экспериментом.

В данной работе для определения коэффициента турбулентной вязкости используется полуэмпирическая теория на основе уравнения баланса энергии турбулентности [11-15]. Эта теория позволяет рассчитать слой смешения и струи с универсальными значениями эмпирических констант. Расчет течения проводится как в сопле, так и в резонаторе с учетом вынужденного излучения. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными как по распределению  $g$  и  $\gamma$ , так и по величине мощности генерации.

2. Для описания течения в области, ограниченной осью симметрии плоского сопла и его стенкой (фиг. 1), используются дифференциальные уравнения движения, неразрывности, баланса тепловой энергии, переноса компонентов, колебательной энергии и энергетическое уравнение турбулентных пульсаций. Для смеси  $\text{CO}_2$ - $\text{N}_2$ -He они имеют следующий вид (см. [16, 17]):

$$(2.1) \quad \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle \langle v_* \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \langle \rho \rangle \varepsilon \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\langle \rho \rangle \langle u \rangle) + \frac{\partial}{\partial y} (\langle \rho \rangle \langle v_* \rangle) = 0$$

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle \langle v_* \rangle \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial y} &= \\ = \langle u \rangle \frac{dp}{dx} + \frac{\partial \langle \rho \rangle \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \langle h \rangle}{\partial y} + \langle \rho \rangle \varepsilon \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right)^2 - gI \\ \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle \langle v_* \rangle \frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial y} &= \frac{\partial \langle \rho \rangle \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \langle c_i \rangle}{\partial y} \end{aligned}$$

$i=3, 4, 5$  ( $\text{CO}_2, \text{N}_2, \text{He}$ )

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \langle c_3 \rangle \langle \varepsilon_{12} \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle \langle v_* \rangle \frac{\partial \langle c_3 \rangle \langle \varepsilon_{12} \rangle}{\partial y} &= \\ = \frac{\partial \langle \rho \rangle \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \langle c_3 \rangle \langle \varepsilon_{12} \rangle}{\partial y} + Q_{12} \\ \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial \langle c_i \rangle \langle \varepsilon_i \rangle}{\partial x} + \langle \rho \rangle \langle v_* \rangle \frac{\partial \langle c_i \rangle \langle \varepsilon_i \rangle}{\partial y} &= \\ = \frac{\partial \langle \rho \rangle \varepsilon}{\partial y} \frac{\partial \langle c_i \rangle \langle \varepsilon_i \rangle}{\partial y} + Q_i \end{aligned}$$

$i=3, 4$  ( $\text{v}_3\text{CO}_2, \text{N}_2$ )

$$\begin{aligned} \langle \rho \rangle \langle u \rangle \frac{\partial e}{\partial x} + \langle \rho \rangle \langle v_* \rangle \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho \rangle \varepsilon \frac{\partial e}{\partial y} + \langle \rho \rangle \varepsilon \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right)^2 - w \\ \langle \rho \rangle \langle v_* \rangle &= \langle \rho \rangle \langle v \rangle + \langle \rho' v' \rangle \quad \varepsilon_i = \frac{r_i}{\exp(\theta_i/T_i) - 1} \end{aligned}$$

Здесь  $g$  — коэффициент усиления слабого сигнала (см., например, [18]),  $I$  — интенсивность вынужденного излучения ( $I=0$  в сопле),  $\varepsilon_{12}=2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_i$  — число колебательных квантов типа  $i$ , приходящихся на одну молекулу ( $i=1, \dots, 4$ ),  $\theta_i$  — характеристическая температура  $i$ -й колебательной моды,  $T_i$  — колебательная температура,  $r_i$  — вырождение,  $e$  — кинетическая энергия турбулентных пульсаций,  $\varepsilon$  — коэффициент турбулентной вязкости,  $w$  — диссипация пульсационной энергии,  $h$  — энтальпия единицы массы смеси, которая включает энергию вращательных и колебательных степеней свободы,  $c_i$  — концентрация  $i$ -го компонента. Остальные обозначения общеприняты в гидроаэродинамике. Источниковые слагаемые  $Q_{12}$ ,  $Q_3$ ,  $Q_i$  соответствуют изменению колебательной энергии за счет  $V-V$ - и  $V-T$ -процессов и, кроме того,  $Q_{12}$  и  $Q_3$  включают слагаемые, зависящие от  $g$  и  $I$ . Выражения для  $\varepsilon$  и  $w$  приведены в [11–14]. При написании системы (2.1) предполагалось, что турбулентный аналог числа Льюиса  $Le_T=1$ , при проведении расчетов предполагалось  $Pr_T=0.7$ . Как и в большинстве работ, предполагалось, что  $T_1=T_2$  и  $\theta_1=2\theta_2$ . Это позволило объединить уравнения переноса колебательной энергии для первой и второй мод  $\text{CO}_2$ .

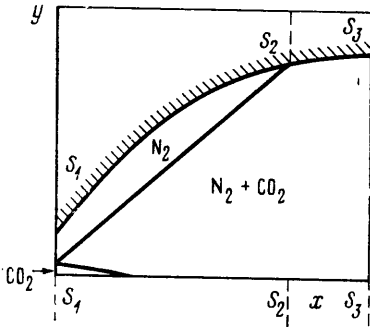
3. Оценка толщины вытеснения  $\delta^*$  на стенке сопла, проведенная с использованием эмпирических формул [19], показывает, что для условий эксперимента [9]  $\delta^*$  не превышает 3% от сечения сопла, поэтому допустимо его пренебречь.

В любом сечении сопла расчетная область разбивается на две подобласти: область от оси симметрии сопла до внешней границы слоя смешения, в которой решение находится с использованием системы уравнений (2.1), и область невязкого течения  $\text{N}_2$  от внешней границы пограничного слоя до стенки сопла, в которой решение находится с использованием изэнтропических формул [20].

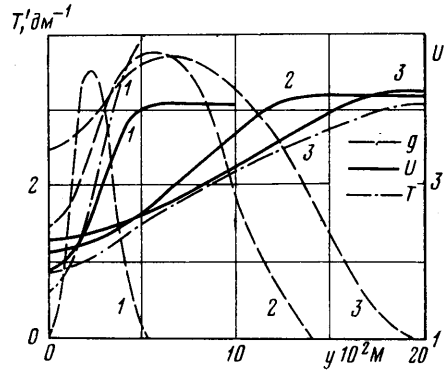
Начальный участок течения, создаваемого центральным соплом, рассчитывается как пограничный слой с заданным распределением параметров на срезе сопла, а коэффициент турбулентной вязкости  $\varepsilon$  на этом участке принимается постоянным в данном сечении и равным среднему значению  $\varepsilon$  по толщине слоя смешения при сохранении универсальных значений эмпирических коэффициентов. Так как на начальном участке слой смешения занимает не более половины сечения сопла,

а продольный шаг мал из-за резкого падения давления, время расчета уменьшается примерно в 2 раза по сравнению с тем случаем, когда уравнения пограничного слоя используются для нахождения решения во всем сечении сопла с момента слияния струй  $\text{CO}_2$  и  $\text{N}_2$ . Граничные условия на внешней границе для системы уравнений (2.1) на начальном участке (сечения  $S_1-S_2$  на фиг. 1) определяются по изэнтропическим формулам.

После того как внешняя граница слоя смешения достигает стенки сопла (сечение  $S_2$  на фиг. 1), решение во всем сечении сопла находится с использованием системы уравнений (2.1). Граничные условия на внешней границе суть условия отсутствия трения на стенке и отсутствия тепло-массообмена через стенку сопла. Граничными условиями на оси сопла как на участке  $S_1S_2$ , так и на участке  $S_2S_3$



Фиг. 1



Фиг. 2

являются условия симметрии, и, кроме того,  $\langle v_x \rangle = 0$  при  $y=0$ . Начальные профили для всех переменных задавались согласно методике, изложенной в [14].

Градиент давления  $dp/dx$  определяется из интегрального условия сохранения массового расхода

$$F_E \int \langle \rho \rangle \langle u \rangle dy = \text{const}$$

где  $F_E$  — координата стенки сопла. Решение системы (2.1) находилось с использованием двухслойной четырехточечной явной разностной схемы с итерациями.

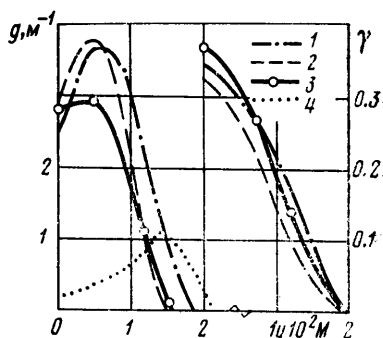
При оценке мощности предполагалось, что интенсивность поля постоянна во всем объеме резонатора. Значение интенсивности находилось с использованием интегрального условия стационарной генерации (см. [18]). Коэффициенты поглощения зеркал  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.02$ , коэффициент пропускания одного из зеркал полагался равным  $t_1 = 0$ . Для каждого режима течения определялось оптимальное значение  $t_2$ , соответствующее максимальной мощности генерации при заданных размерах зеркал. Совокупность учитываемых  $V-V$ - и  $V-T$ -процессов и соответствующие значения констант скоростей релаксации приведены в [21]. Отсутствующие в [21] значения констант скоростей релаксации на гелии заимствованы из [18].

4. Профиль сопла, используемый в расчетах, был взят из работы [6]. Его параметры: угол раскрытия  $\approx 30^\circ$ , полувысоты сопла в критическом сечении  $A_{0E} = 0.001$  м, отношение выходного сечения к критическому  $A_E/A_{0E} = 25$ , длина сверхзвуковой части сопла  $x_c = 0.14$  м, полувысота сопла для подачи  $\text{CO}_2 + \text{He}$   $A_{0I} = 0.0002$  м, высота струи горячего азота  $(A_{0E} - A_{0I}) = 0.0008$  м. Исходные данные для расчетов приведены в таблице, числа Маха для всех случаев полагались равными  $M_{0I} = M_{0E} = 1.2$ , давление  $\text{N}_2$  в ресивере  $p_0 = 9 \cdot 10^5$  Па, давление в момент слияния струй  $p_{0E} = p_{0I} = 3.7 \cdot 10^5$  Па, температура  $\text{CO}_2$  в ресивере  $T_0 = 400^\circ \text{K}$ .

Типичные профили безразмерных температуры ( $T' = T/T_{0I}$ ), скорости ( $U = u/u_{0I}$ ) и коэффициента усиления ( $g$ ) в нескольких сечениях сопла (расчет 1, таблица) приведены на фиг. 2 (1 —  $x = 0.02$ , 2 —  $0.08$ , 3 —  $0.14$  м). Из фигур видно, что в начале сопла слой смешения занимает небольшую часть сечения, что подтверждает эффективность выбранного нами алгоритма. Результаты сравнения профилей

$g$  и  $\gamma$  в выходном сечении сопла, полученные в данной работе (1) и в расчете (2) и эксперименте (3) работы [6], приведены на фиг. 3. Учитывая сложность процессов, происходящих в сопле, и некоторую неопределенность начальных условий истечения газа, следует считать согласие настоящего расчета с опытными данными удовлетворительным. Результаты расчетов [6] лежат несколько ближе к экспериментальной ширине зоны смещения, однако этот результат получен путем подгонки эмпирической константы в выражении для  $e$ .

При оценке мощности  $E$  параметры резонатора (полувысота зеркала  $y_p=0.0125$  м, длина зеркала по потоку  $x_p=0.02$  м, расстояние между зеркалами  $L=0.12$  м) и исходные данные (расчет 2, таблица) были взяты из эксперимента [6]. Оптимальное значение пропускания составило  $t_2=0.15$ , а  $E=2.2$  квт (в эксперименте  $E=2$  квт). Таким образом, предложенный алгоритм позволяет, во-первых, рассчитать течение в сопле, а во-вторых, с достаточной точностью предсказывает мощность генерации. Отметим, что распределение коэффициента усиления в потоке на выходе из резонатора (кривая 4 на фиг. 3) свидетельствует о том, что использованный в экспериментах [6] резонатор не является оптимальным, т. е. не позволяет преобразовать в излучение всю запасенную в по-



Фиг. 3

Расчет	Струя CO <sub>2</sub> +He			Струя N <sub>2</sub>		
	$\gamma$	$T_{0Г}, ^\circ\text{K}$	$u_{0Г}, \text{м/сек}$	$T_0, ^\circ\text{K}$	$T_{0E}, ^\circ\text{K}$	$u_{0E}, \text{м/сек}$
1	0.4	237	441	2000	1550	960
2	0.2	223	575	3000	2330	1180

токе колебательную энергию. С целью определения максимально достижимых в экспериментах [6] характеристик были проведены расчеты с  $y_p=0.025$  м,  $x_p=0.08$  м. Оказалось, что  $E=3.4$  квт при  $t_2=0.1$ .

Из всего вышесказанного следует, что предложенная в работе модель может быть с успехом применена при анализе струйного смещения в сверхзвуковом сопле газодинамического лазера с учетом неравновесных физико-химических процессов.

Авторы глубоко благодарны Б. С. Александрову и В. К. Поздышеву за многочисленные полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дубов Н. А. К расчету двумерного смещения и горения двух спутных струй в канале заданной формы при конечных скоростях химических реакций. Тр. ЦАГИ, 1971, вып. 1306.
2. Гуляевдинов Б. Н., Залотока В. В., Звягинцев В. И., Шумский В. В. Характеристики ГПВРД в диапазоне чисел Маха 3–15. В сб.: Физическая газодинамика, вып. 6. Новосибирск, 1976.
3. Басов Н. Г., Ораевский А. Н., Щеглов В. А. Тепловые методы возбуждения лазеров. Ж. техн. физ., 1967, т. 37, № 2.
4. Крошко В. Н., Солоухин Р. И. Оптимальные режимы инверсии при тепловом возбуждении смещением в сверхзвуковом потоке. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 4.
5. Крауклис А. В., Крошко В. Н., Солоухин Р. И., Фомин Н. А. Режимы генерации в ГДЛ с термическим возбуждением и смещением в сверхзвуковом потоке. Физика горения и взрыва, 1976, т. 12, № 5.
6. Taran J. P. E., Charpenel M., Borghi R. Investigation of a mixing CO<sub>2</sub> GDL. AIAA Paper, 1973, No. 622.
7. Schall W., Hoffmann P. H., Hügel H. Performance of N<sub>2</sub>/CO<sub>2</sub> gasdynamic mixing lasers with various injection techniques. J. Appl. Phys., 1977, vol. 48, No. 2.
8. Бреев В. В., Кухаренко А. Т., Напарович А. П., Шарков В. Ф. К возможности повышения эффективности газодинамического лазера. Теплофизика высоких температур, 1974, т. 12, № 6.

9. Cassady P. E., Newton J., Rose P. A new mixing gasdynamic laser. AIAA Paper, 1976, No. 343.
10. Ачасов О. В., Солоухин Р. И., Фомин Н. А. Численный анализ характеристик газодинамического лазера с селективным тепловым возбуждением. В сб.: Проблемы тепло- и массообмена. 77. Минск, Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1977.
11. Акатнов Н. И., Кузнецов А. П. Уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций в теории свободного турбулентного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
12. Акатнов Н. И. О линейных масштабах турбулентности в полуэмпирической теории. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
13. Акатнов Н. И. Влияние внешней турбулентности на развитие турбулентной струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
14. Акатнов Н. И., Лавров А. В. О влиянии пульсаций температуры на образование NO в высокотемпературной среде. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1976, № 352.
15. Акатнов Н. И., Лавров А. В. О влиянии пульсаций температуры и концентрации на физико-химические процессы в высокотемпературной турбулентной газовой струе. Теплофизика высоких температур, 1978, т. 16, № 5.
16. Абрамович Г. Н., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Турбулентное смещение газовых струй. М., «Наука», 1974.
17. Borghi R., Charpenel M. La mélange à grande vitesse d'azote excité en vibration avec du gaz carbonique. Astronautica Acta, 1972, vol. 17, No. 4/5.
18. Лосев С. А. Газодинамические лазеры. М., «Наука», 1977.
19. Бурке А. Ф., Бирд К. Д. Применение конических и профилированных сопел в гиперзвуковых установках. В сб.: Современная техника аэродинамических исследований при гиперзвуковых скоростях. Машиностроение, 1965.
20. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1973.
21. Александров Б. С., Ананьев Ю. А., Лавров А. В., Трусов В. П. Модель среды для расчета резонаторов газодинамических CO<sub>2</sub>-лазеров. Квантовая электроника, 1977, т. 4, № 7.

Ленинград

Поступила в редакцию  
24.VII.1979

УДК 532.526

### ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛА МЕЖДУ ВОГНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И ПЛОСКОСТЬЮ

ГУРЕВИЧ Ю. Г.

В работах, посвященных теоретическому и экспериментальному исследованию продольного обтекания угловых областей вязкой жидкостью, обычно рассматривается обтекание угла, образованного пересечением двух плоскостей [1-3]. В отличие от этого в данной работе рассматривается течение в окрестности линии пересечения плоскости и вогнутой цилиндрической поверхности (см. фигуру). В статье проведено исследование асимптотического поведения уравнений Навье - Стокса при больших числах Re для такого течения. Получены оценки для величин скорости и характерных масштабов течения. Показано, что искривление одной из поверхностей существенно меняет картину продольного обтекания угла вязкой жидкостью. Рассмотрен вопрос о развитии трехмерного пограничного слоя на плоскости в области влияния вогнутой цилиндрической поверхности.

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в окрестности угла, образованного плоскостью и вогнутой цилиндрической поверхностью (фигура). Запишем уравнение Навье - Стокса и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат:

$$\frac{u}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{wu}{r} = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} +$$

$$+ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right)$$