МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1981

УДК 536.25:524.33:524.352

КОНВЕКТИВНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В КОМПОНЕНТАХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

БУРДЭ Г. И.

Рассматривается конвекция в слое вещества звезды, входящей в состав двойной кеплеровской системы. Несинхронность аксиального вращения и орбитального обращения звезды приводит к периодической модуляции поля тяжести звезды приливными силами. Показано, что при определенных условиях возможен автоколебательный режим, в котором средняя интенсивность колебательных конвективных движений также периодически меняется со временем.

Возникновение автоколебаний качественно объясняется следующим образом. Известно [1], что в зависимости от значений параметров возбуждения модуляция силы тяжести может приводить как к затуханию конвекции (области устойчивости), так и к параметрической раскачке конвективных колебаний (области неустойчивости). Пусть в исходном равновесном состоянии звезды величина частоты модуляции соответствует области неустойчивости и близка к границе области. Конвекция, возникающая в этой ситуации, представляет собой параметрические конвективные колебания, средняя интенсивность и амплитуда которых медленно нарастают со временем. Развитие конвекции сопровождается перераспределением плотности и поэтому приводит (в силу закона сохранения момента импульса) к изменению частоты вращения звезды вокруг оси, а тем самым и к изменению частоты модуляции поля тяжести приливными силами.

Зависимость частоты модуляции от интенсивности конвекции и является фактором, обуславливающим существование автоколебаний. Если в результате развития конвекции частота модуляции приближается к границе с областью устойчивости, то при достижении достаточной интенсивности движения величина частоты перейдет через граничное значение, что приведет к постепенному затуханию конвекции. Произойдет обратное перераспределение плотности и соответственно обратное изменение частоты модуляции, после чего описанные процессы повторятся заново. Возможно, что автоколебания такого рода могут возникать в реальных звездных системах и обусловливать переменность некоторых типов звезд.

1. Для иллюстрации описанного механизма будем использовать простую аналитическую модель, предполагающую несжимаемость вещества звезды (приближение Буссинеска) и постоянство коэффициентов переноса.

Рассмотрим звезду массы M, входящую в состав двойной системы, массу второго компонента обозначим M', расстояние между их центрами — R, кеплеровскую частоту обращения по орбите — ω_R. Будем считать, что звезда вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты, с частотой $\Omega(t)$, имеет сферическую форму (отклонения, вызванные вращением и приливными силами, не учитываются) и обладает конвективным слоем толщиной h и внутренним радиусом r_0.

Запишем уравнения движения вещества в системе координат, связанной с центром вращающейся звезды (ось x_3 направлена вдоль вектора угловой скорости вращения):

$$(1.1)\qquad \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k\,\partial x_k}-$$

$$-\rho g\frac{x_i}{r_0}+\rho e_{ik3}\left(2\Omega u_k+\frac{d\Omega}{dt}x_k\right)+\rho b\left\{\left(\frac{x_i}{2}-\frac{3}{2}\delta_{i3}x_3\right)+\right.$$

$$+\frac{3}{2}[(x_1\delta_{i1}-x_2\delta_{i2})\cos 2\zeta-(x_1\delta_{i2}+x_2\delta_{i1})\sin 2\zeta]\Big\}$$

$$g=\frac{\gamma M r_0}{(r_0+h)^3},\qquad b=\gamma\frac{M'}{R^3} \tag{1.2}$$

$$\zeta=\int_0^t[\Omega(t')-\omega_R]dt' \tag{1.3}$$

Здесь ρ — плотность вещества, μ — коэффициент динамической вязкости, u_i — компоненты вектора скорости, Π — сумма давления и потенциала центробежных сил. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование, δ_{ij} обозначает символ Кронекера, e_{ikj} — символ Леви — Чивита, γ — гравитационная постоянная.

Члены, заключенные в фигурную скобку в уравнении (1.1), получены путем разложения приливного потенциала в ряд в предположении малости размеров звезды по сравнению с расстоянием до другого компонента [2] (совпадающее с этим выражение можно получить разложением потенциала по сферическим функциям).

Получим из (1.1) уравнение, выражающее закон сохранения момента количества движения. Для этого умножим (1.1) на x_j, проинтегрируем (с учетом закона сохранения массы) полученное уравнение по объему сферы и выделим из него антисимметричную часть. В проекции на ось x_3 уравнение закона сохранения момента импульса имеет вид

$$\frac{d}{dt}(U_{12}-U_{21})=-\Omega\frac{d}{dt}(I_{11}+I_{22})-\frac{d\Omega}{dt}(I_{11}+I_{22})+ \tag{1.4}$$

$$+\frac{3}{2}b[(I_{22}-I_{11})\sin 2\zeta-2I_{12}\cos 2\zeta]$$

$$I_{ij}=\int_{V'}\rho x_i x_j\,dV',\qquad U_{ij}=\int_{V'}\rho u_i x_j\,dV'$$

Здесь интегрирование производится по объему сферы.

Учтем теперь в уравнениях (1.1), (1.4) зависимость плотности от температуры, предполагая эту зависимость линейной:

$$\rho=\rho_S(1-\beta T') \tag{1.5}$$

где T' — температура, отсчитываемая от некоторого среднего значения. Зависимость (1.5) не будет учитываться в левых частях уравнений (1.1), (1.4) (приближение Буссинеска).

Введем сначала зависимость (1.5) в (1.4) и вычтем из полученного уравнения часть, соответствующую чисто приливным движениям. Переходя к сферическим координатам r, ϑ, φ и предполагая, что конвективные движения происходят в меридиональных плоскостях ($u_\varphi=0$), получим

$$\Omega\frac{d}{dt}\left[\int_{\Delta V'}Tr^2\sin^2\vartheta\,dV'\right]+\frac{d\Omega}{dt}\left[\int_{\Delta V'}Tr^2\sin^2\vartheta\,dV'\right]= \tag{1.6}$$

$$=\frac{3}{2}b\int_{\Delta V'}Tr^2\sin^2\vartheta\sin 2(\varphi+\zeta)\,dV'$$

Здесь T — конвективная часть температуры, а интегрирование производится только по объему конвективного слоя $\Delta V'$.

Подставим теперь (1.5) в (1.1) и после вычитания уравнения для чисто приливных движений пренебрежем членами, описывающими взаимодействие приливных и конвективных движений. Для упрощения расчетов запишем полученное уравнение для областей близких к экватору ($\sin\vartheta\approx\approx 1$, $\cos\vartheta\approx 0$) в приближении тонкого слоя. Из этих предположений следует также малость производных по φ по сравнению с производными по ϑ.

Введем новые координаты $x=r-r_0$, $z=r_0\vartheta$ и функцию тока конвективного движения ψ

$$u_r=-\frac{1}{r_0r^2\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta},\qquad u_\vartheta=\frac{1}{r_0r\sin\vartheta}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Перейдем к безразмерным переменным. В качестве единиц измерения координат, времени, угловой скорости, функции тока и температуры выберем соответственно величины h, h^2/ν, ν/h^2, $h^2\nu$ и Ah, где $\nu=\mu/\rho_e$ — коэффициент кинематической вязкости, A — величина равновесного градиента температуры. Сохраняя за безразмерными переменными прежние обозначения, получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}-\Delta^2\psi+G\left[1-\frac{\eta}{2}-\frac{3}{2}\eta\cos 2(\varphi+\zeta)\right]\frac{\partial T}{\partial z}=\\=\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial z}\end{gathered}\tag{1.7}$$

Здесь $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial z^2$; безразмерные параметры G (число Грассгофа) и η определены следующим образом:

$$G=\frac{g\beta Ah^5}{\nu^2r_0},\qquad \eta=\frac{br_0}{g}\tag{1.8}$$

Как видно из (1.7), параметр η определяет амплитуду модуляции поля тяжести приливными силами и одновременно задает величину перенормировки среднего поля тяжести, обусловленной теми же силами. Заметим, что предположение о малости размеров звезды по сравнению с расстоянием между компонентами, использующееся при записи приливных членов в (1.1), (1.7), означает и малость величины η, поскольку при $M\sim M'$ из (1.8) с учетом (1.2) следует $\eta\sim(r_0/R)^3$.

Уравнение переноса энергии с учетом предположений, сделанных при выводе (1.7), запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{P}\Delta T+\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z}\tag{1.9}$$

где $P=\nu/\chi$ — число Прандтля, χ — эффективный коэффициент температуропроводности.

Уравнения (1.7), (1.9) рассматриваются при следующих граничных условиях (свободные, идеально теплопроводящие границы):

$$\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0,\quad T=0,\quad x=0,\quad x=1\tag{1.10}$$

2. Рассмотрим на основе уравнений (1.6), (1.7), (1.9) механизм, приводящий к автоколебательному изменению средней интенсивности конвективных движений.

Решения уравнений конвекции (1.7), (1.9) имеют вид колебаний, частота и декремент нарастания которых определяются при прочих заданных параметрах частотой модуляции, равной $2(\Omega-\omega)$, где $\omega=\omega_R h^2/\nu$ — безразмерная кеплеровская частота. В силу закона сохранения момента импульса (1.6) частота модуляции сама зависит от интенсивности конвекции. Это обстоятельство, обуславливая автоколебательный характер процесса, вместе с тем значительно осложняет исследование.

Далее будет использоваться то, что в задаче естественным образом присутствует малый параметр. Действительно, для того чтобы нарастание конвективных колебаний приводило к переходу частоты через границу области неустойчивости прежде, чем будет достигнут стационарный колебательный режим, необходима малость величины ε, определенной следующим образом:

$$\varepsilon^2=\Omega_0-\Omega_c \tag{2.1}$$

Здесь Ω_0 — частота вращения звезды при отсутствии конвекции, а Ω_c — частота вращения, соответствующая границе области неустойчивости.

Поскольку малость ε означает и малость декремента нарастания колебаний, в задаче можно выделить два временных масштаба, один из которых связан с частотой колебаний (частотой модуляции), а другой — с декрементом (величиной ε). В соответствии с идеями метода двухмасштабных разложений введем кроме «быстрого» времени $\zeta=\int\limits_0^t[\Omega(t')-\omega]dt'$ медленное время $\tau=\varepsilon^2 t$; величины ψ и T будем рассматривать как функции отдельно переменных ζ и τ, вычисляя производную по t как сумму частных производных по ζ и τ:

$$\frac{\partial}{\partial t}=(\Omega-\omega)\frac{\partial}{\partial\zeta}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{2.2}$$

Частота вращения Ω при этом считается функцией только медленного времени τ.

Получим уравнения, определяющие «медленные» изменения со временем средней интенсивности и амплитуды «быстрых» конвективных колебаний. Основываясь на виде уравнения (1.7), величины ψ и T можно представить в виде суммы гармоник с аргументами, кратными $(\varphi+\zeta)$, и коэффициентами, зависящими от x, z и τ. При небольших амплитудах модуляции колебания должны происходить с частотой, равной частоте модуляции («основная» область неустойчивости, см. [1]). Колебания в основной области неустойчивости имеют простой спектральный состав [3] и с хорошей точностью могут быть аппроксимированы только постоянной и основными гармониками

$$\begin{gathered}\psi=\psi_0(x,z,\tau)+\psi_1(x,z,\tau)\sin 2(\varphi+\zeta)+\psi_2(x,z,\tau)\cos 2(\varphi+\zeta)\\ T=T_0(x,z,\tau)+T_1(x,z,\tau)\sin 2(\varphi+\zeta)+T_2(x,z,\tau)\cos 2(\varphi+\zeta)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в уравнения (1.7), (1.9) и применяя процедуру метода Канторовича, получим систему уравнений для амплитуд ψ_i, T_i. В силу (2.2) коэффициенты уравнений будут содержать малый параметр ε, так что решение системы можно искать в виде рядов по ε:

$$\begin{gathered}\psi_i=\varepsilon\psi_i^{(1)}+\varepsilon^2\psi_i^{(2)}+\ldots,\quad T_i=\varepsilon T_i^{(1)}+\varepsilon^2 T_i^{(2)}+\ldots\\ \Omega=\Omega_c+\varepsilon^2\Omega^{(2)}+\ldots\end{gathered} \tag{2.4}$$

Заметим, что в отсутствие конвекции $\Omega=\Omega_0$ и $\Omega^{(2)}=1$ (см. (2.1)).

При записи уравнений в последовательных приближениях удобно уменьшить число уравнений, исключая $\psi_i^{(k)}$ из числа переменных. Уравнения для $T_i^{(1)}$ (первый порядок по ε) образуют систему линейных однородных уравнений, определяющих решение на границе устойчивости при $\Omega=\Omega_c$. В следующих порядках по ε получаются системы линейных неоднородных уравнений для $T_i^{(k)}$ с теми же левыми частями, что и в уравнениях первого приближения. Вводя трехмерный вектор-столбец $\mathbf{T}^{(k)}$ с компонентами $T_i^{(k)}$ и матричный дифференциальный оператор L, соответствующий линейной однородной системе, уравнения в первом и следующих приближениях по ε можно записать в виде

(2.5) $$L\mathbf{T}^{(1)}=0$$

(2.6) $$L\mathbf{T}^{(2)}=\mathbf{Q}^{(2)}$$

(2.7) $$L\mathbf{T}^{(3)}=\mathbf{Q}^{(3)}$$

где $\mathbf{Q}^{(k)}$ вычисляются через функции $T_i^{(k-1)}, \psi_i^{(k-1)}, T_i^{(k-2)}, \psi_i^{(k-2)}$ и т. д.

Система (2.5) допускает решение вида

(2.8) $$T_i^{(1)}=V(\tau)c_i^{(1)}\cos(\alpha z)\sin(\pi x)$$

(решение такой периодичности при отсутствии модуляции соответствует наинизшему уровню неустойчивости). Постоянные коэффициенты $c_i^{(1)}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получающейся при подстановке (2.8) в (2.5). Условие равенства нулю определителя этой системы дает значение частоты вращения Ω_c, соответствующее границе области неустойчивости (формулы для Ω_c и $c_i^{(1)}$ не приводятся из-за их громоздкости).

Решение систем (2.6), (2.7) существует лишь при условии ортогональности их правых частей к решению сопряженного однородного уравнения $L^+\mathbf{T}^+=0$, представляющемуся в форме

$$T_i^+=c_i^+\cos(\alpha z)\sin(\pi x),\quad c_0^+=c_0^{(1)}=1,\quad c_1^+=-c_1^{(1)}/2,\ c_2^+=c_2^{(1)}/2$$

Ортогональность определяется следующим образом:

(2.9) $$\int\limits_0^{2\pi/\alpha}dz\int\limits_0^1 dx(Q_1^{(k)}T_1^++Q_2^{(k)}T_2^++Q_3^{(k)}T_3^+)=0$$

Для уравнений второго приближения условие разрешимости (2.9) выполняется тождественно, а решения имеют вид

(2.10) $$T_i^{(2)}=V^2c_i^{(2)}\sin(2\pi x)$$

Условие разрешимости уравнений третьего приближения приводит к уравнению для амплитуды $V(\tau)$:

(2.11) $$\Omega^{(2)}V+N_1V^3+N_2dV/d\tau=0$$

где N_1 и N_2 выражаются через параметры задачи (как явно, так и через величину Ω_c и коэффициенты $c_i^{(1)}, c_i^{(2)}$).

Уравнение (2.11) содержит две неизвестные функции — амплитуду конвективного движения $V(\tau)$ и величину $\Omega^{(2)}(\tau)$, связанную с частотой вращения $\Omega(\tau)$. Используем теперь уравнение закона сохранения момента импульса (1.6). Подставляя в (1.6) аппроксимации (2.3) и усредняя по быстрому времени, с учетом $c_0^{(1)}=1$ получим

$$(2.12)\qquad (\Omega_c+\varepsilon^2\Omega^{(2)})\varepsilon^2\frac{dV}{d\tau}+\varepsilon^4\frac{d\Omega^{(2)}}{d\tau}V-\frac{3}{4}Bc_1^{(1)}V=0$$

$$B=b(h^4/\nu^2)=(\gamma M'/R^3)(h^4/\nu^2)$$

Исключим из уравнений (2.11), (2.12) величину $\Omega^{(2)}$ и перейдем к переменным, представляющим собой обычное (безразмерное) время $t=\tau/\varepsilon^2$ и амплитуду колебаний температуры $\Theta=\varepsilon V$.

Уравнение для Θ примет вид

$$(2.13)\qquad \frac{d^2\Theta}{dt^2}-E(1-K\Theta^2)\omega_A\frac{d\Theta}{dt}+\omega_A{}^2\Theta=0$$

$$(2.14)\qquad \omega_A{}^2=\frac{3}{4}B\frac{c_1^{(1)}}{N_2},\quad E^2=\frac{4\Omega_c{}^2}{3BN_2c_1^{(1)}},\quad K=3\frac{N_1}{\Omega_c}$$

Заменой переменной $\tilde{t}=\omega_At$ уравнение (2.13) приводится к уравнению Ван-дер-Поля, достаточно хорошо изученному в литературе (см., например, [4]). Характер автоколебаний, являющихся решениями уравнения, зависит от величины E. При малых E автоколебания близки к гармоническим, а при $E\gg1$ решение имеет вид релаксационных колебаний. Величина ω_A при небольших E играет роль частоты автоколебаний.

В выражения (2.14) для $\omega_A{}^2$ и E^2 входят величины Ω_c, N_2 и $c_1^{(1)}$, определяемые из достаточно громоздких выражений. В этих выражениях можно произвести упрощения, используя то обстоятельство, что в условиях лучистого переноса энергии эффективный коэффициент температуропроводности χ на несколько порядков больше коэффициента кинематической вязкости ν, т. е. число Прандтля P много меньше единицы.

Выпишем прежде всего в приближении малых P выражение, определяющее границу области неустойчивости:

$$(2.15)\qquad (\Omega_c-\omega)^2=\left(\frac{\alpha^2+\pi^2}{2}\right)^2(q^2-S^2)$$

$$q=\frac{3}{\sqrt{8}}\eta r,\quad S=r\left(1-\frac{\eta}{2}\right)-1,\quad r=\frac{G}{[(\alpha^2+\pi^2)^3/\alpha^2P]}$$

Здесь r — есть отношение числа Грассгофа G к его пороговому значению в стационарной ситуации (отсутствуют приливные силы).

Как видно из (2.15), параметрический резонанс обсуждаемого вида (колебания с частотой, равной частоте модуляции) существует при условии положительности правой части (2.15). Это условие можно выразить в виде ограничения на величину r:

$$(2.16)\qquad \frac{1}{1+0{,}56\eta}<r<\frac{1}{1-1{,}57\eta}$$

Выражения для величин $\omega_A{}^2$ и E^2 при $P\ll1$ представляются в виде

$$(2.17)\qquad \omega_A{}^2=\omega^2\frac{3\sqrt{2}}{1+M/M'}\frac{q^2-S^2}{qS}$$

$$E^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}(f+1)^2\left(1+\frac{M}{M'}\right)\frac{q}{S}$$

Здесь использовано соотношение $B=\omega^2/(1+M/M')$, следующее из (1.2) и общеизвестного выражения для кеплеровской частоты, а также введен параметр асинхронности $f=(\Omega_c-\omega)/\omega$, определяемый из (2.15) по формуле $f=(\alpha^2+\pi^2)(q^2-S^2)^{1/2}/(2\omega)$. Из (2.17) следует, что режим автоколебаний реализуется ($\omega_A{}^2>0$, $E^2>0$), если наряду с (2.16) выполняется условие $S>0$, приводящее к неравенству

$$r>1/(1-0{,}5\eta)$$

которое не противоречит (2.16).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1973.
3. *Бурдэ Г. И.* О конечно-амплитудной конвекции, возникающей в модулированном поле тяжести.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, № 6.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.

Пермь

Поступила в редакцию
16.VII.1979