

УДК 536.25

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ХРАНЕНИИ ЖИДКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ В ПОДЗЕМНЫХ ЕМКОСТЯХ

КАЗАРЯН В. А., МЫЗНИКОВА Б. И., НЕПОМНЯЩИЙ А. А.,
ТАРУНИН Е. Л., ЧЕРТКОВА Е. А.

При проектировании комплексов подземного хранения жидких углеводородов и расчете технологических параметров подземных хранилищ, образованных выщелачиванием в массиве каменной соли, необходимо знание процессов гидродинамики и теплообмена за счет естественной конвекции. Работа посвящена изучению численным методом начальной стадии конвективного теплообмена в вертикальной цилиндрической полости, полностью заполненной жидким углеводородом. Предполагается, что в начальный момент времени температура покоящейся жидкости однородна. Конвективное течение развивается как за счет начальной разности температур жидкости и массива, так и за счет геотермического градиента температуры в массиве. Задача рассматривается как сопряженная: при определении конвективного процесса в жидкости решается одновременно задача теплопроводности в окружающем массиве. Числа Грасгофа, характеризующие интенсивность реального процесса, весьма велики: $G \approx 10^{12} - 10^{15}$. Решение задачи методом сеток получалось для умеренных значений числа Грасгофа $G \approx 10^7 - 10^{11}$. Полученные в результате серии расчетов асимптотические зависимости для интегральных характеристик нестационарного процесса экстраполировались на область реальных значений числа Грасгофа.

1. Постановка задачи. Система уравнений тепловой конвекции в приближении Буссинеска в переменных вихрь — функция тока имеет в безразмерных координатах следующий вид [1—2]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{W}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \\ + DW + \frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r^2} - G \frac{\partial T}{\partial r}$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{r} D\psi + W = 0, \quad D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{P} \left(DT + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Здесь $W(r, z, t)$ — вихрь скорости, $\psi(r, z, t)$ — функция тока, $T(r, z, t)$ — температура. В качестве единиц измерения расстояния, скорости, времени и температуры выбраны соответственно R — радиус цилиндра, ν/R (ν — коэффициент кинематической вязкости), R^2/ν и θ — разность температур жидкости и массива в начальный момент времени в верхней части цилиндра. Связь функций W и ψ с компонентами скорости v_r и v_z дается соотношениями

$$(1.4) \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ W = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = -\frac{1}{r} D\psi$$

В уравнения (1.1) – (1.3) входят два безразмерных параметра – числа Грасгофа и Прандтля [1]

$$G = \frac{g\beta\theta R^3}{\nu^2}, \quad P = \frac{\nu}{\chi_f}$$

Начальные условия соответствуют покоящейся жидкости с однородной температурой

$$(1.5) \quad T^\circ = \pm 1, \quad \psi^\circ = W^\circ = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < z < l$$

Граничные условия и условия симметрии на оси z

$$(1.6) \quad \begin{aligned} r=1, \quad \psi=0, \quad \partial\psi/\partial r=0 \\ z=0, \quad z=l, \quad \psi=0, \quad \partial\psi/\partial z=0 \\ r=0, \quad \psi=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) = 0 \end{aligned}$$

На границе раздела жидкости и массива выполняются требования непрерывности температуры и тепловых потоков

$$T|_{\Gamma-0} = T|_{\Gamma+0}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma-0} = \frac{\kappa_f}{\kappa_M} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma+0}$$

Здесь κ_f , κ_M – коэффициенты теплопроводности жидкости и массива.

Безразмерная температура на внешней границе ($r=1+d$, $z=-d$, $z=l+d$) задается с учетом геотермического градиента в виде

$$(1.7) \quad T_0(z) = A (G/G_*)^{1/3} (l-z)$$

где G_* – число Грасгофа, соответствующее реальным размерам полости; G – число Грасгофа, для которого выполняется расчет; A – коэффициент, который для $R=30$ м, например, равен примерно $A \approx 0,18$. Начальные условия для температуры в твердом массиве вычисляются по (1.7). При использовании зависимости (1.7) расчеты с $G \neq G_*$ «подобны», так как соответствуют лишь изменению геометрических размеров полости, образованной в твердом массиве с одинаковым размерным геотермическим градиентом.

В сформулированной задаче типичные значения отношения высоты цилиндра к радиусу $l=H/R=5-25/3$, число Прандтля изменяется в пределах $P=7,2-8,4$, число Грасгофа $\leq 6 \cdot 10^{15}$, величина геотермического градиента [3] $\gamma \approx 0,03$ град/м, отношение коэффициентов теплопроводности жидкости и массива $\Gamma = \kappa_f/\kappa_M \approx 0,035$, отношение коэффициентов вязкости жидкости и температуропроводности массива $P_M = \nu/\chi_M = 0,34-0,40$, знак начальной разности температур $\theta = T^\circ - T_0(l)$.

Значения параметров, при которых решалась задача, представлены в таблице. Параметр d , определяющий «внешнюю» границу, полагался в расчетах равным 1.

Вариант	l	T_f	T_M	P	P_M	κ_f/κ_M	G_*
I	5	10°	15°	8,4	0,399	0,0354	$3,6 \cdot 10^{15}$
II	5	35°	30°	7,24	0,338	0,0351	$5,6 \cdot 10^{15}$
III	25/3	10°	15°	8,4	0,399	0,0354	$2,9 \cdot 10^{13}$
IV	25/3	35°	30°	7,24	0,338	0,0351	$4,5 \cdot 10^{13}$

2. Метод решения. Решение уравнений для вихря и температуры проводилось по неявной схеме продольно-поперечной прогонки методом дробных шагов [4, 5]. Для лучшего разрешения пограничных слоев использовано преобразование координат, сгущающее сетку по радиусу вблизи $r=1$. Новая переменная r_N имеет вид

$$(2.1) \quad r_N = \begin{cases} [\exp(cr) - 1] / [\exp(c) - 1], & r \leq 1 \\ 1 + c \exp(c) \ln r / [\exp(c) - 1], & r > 1 \end{cases}$$

с параметром сгущения c .

Уравнения для вихря и температуры в новых переменных аппроксимировались по схеме [5], которая для одномерного уравнения переноса с диффузией (уравнения Бюргерса) может быть записана в обозначениях [5] в виде

$$(2.2) \quad W_t + u \hat{W}_{\bar{x}} = (1 + \mu) \nu W_{\bar{x}\bar{x}} - \mu \eta \nu W_{\bar{x}\bar{x}}$$

$$(2.3) \quad \mu = \text{Re}_h^2 / (1 + |\text{Re}_h|), \quad \text{Re}_h = uh / 2\nu$$

При больших значениях сеточного (локального) числа Рейнольдса $\text{Re}_h > 1$ схема [5] дает эффект счетной вязкости [6], характерный для односторонней (направленной) аппроксимации. Для уменьшения этого эффекта в отличие от [5] аппроксимация была дополнена еще одним слагаемым с параметром $\eta = 0,1$.

При $\eta = 0$ схемы эквивалентны. Добавленный член, согласно [6], должен при $\eta = 1$ уменьшить эффект счетной вязкости, сохранив выполнимость условий монотонности для метода скалярной прогонки. Однако уже первые расчеты показали, что при разрывных начальных условиях для температуры, характерных для решаемой задачи, нарушается монотонный характер поля температуры — значения температуры выходили за пределы допустимых величин; дальнейшие расчеты выполнялись при $\eta = 0$.

Вычисление функции тока на каждом временном слое осуществлялось с помощью итерационного метода последовательной верхней релаксации с шахматным порядком обхода внутренних сеточных узлов области по варианту Янга — Франкела [7].

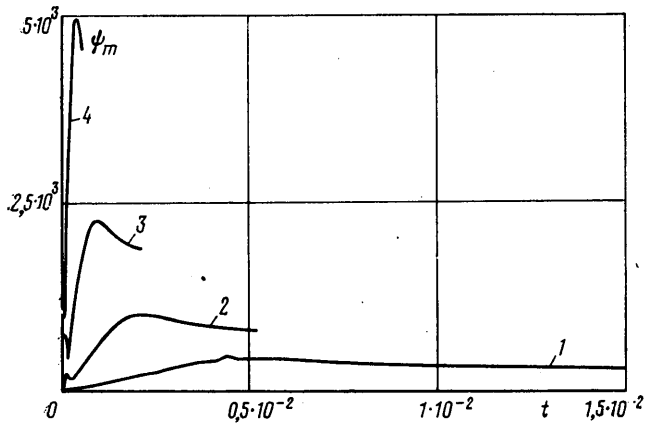
Значения вихря скорости на твердой границе находились по формуле Тома с использованием процедуры релаксации [8]; чаще всего параметр релаксации полагался равным единице.

Расчеты выполнялись на сетке 16×32 для всей области, сетка 10×20 приходилась на внутреннюю область; параметр сгущения в (2.1) полагался равным $c = 1$. Шаг по времени определялся из соображений устойчивости и аппроксимации по формуле

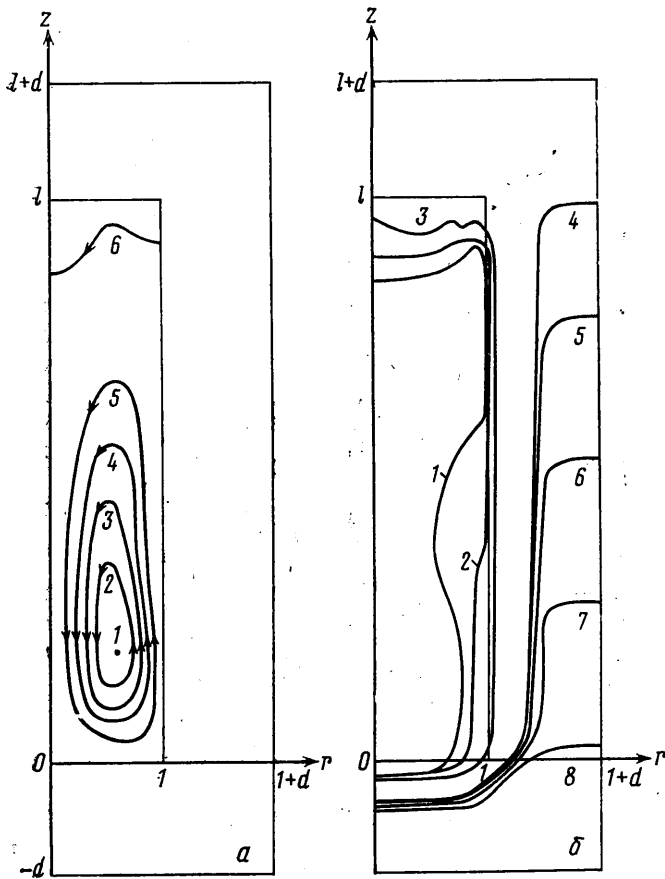
$$(2.4) \quad \Delta t = \min (\sqrt{\Delta r / G}, \Delta r / v_m, (\Delta r)^2 / 8)$$

в которой v_m — максимальное значение скорости.

3. Результаты. Физическая картина изучаемого конвективного течения в общих чертах такова. На начальном этапе на боковых вертикальных границах цилиндра возникают узкие температурные и гидродинамические пограничные слои. По мере развития пограничных слоев интенсивность конвекции увеличивается, достигает максимума и начинает убывать. В дальнейшем горизонтальные градиенты температуры уменьшаются и после стадии переходного режима в полости устанавливается некий «регулярный» режим конвекции, поддерживаемый геотермическим градиентом температуры в массиве. Выполненные расчеты позволяют проследить лишь за начальной стадией развития конвекции.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 представлены зависимости максимального значения функции тока ψ_m от времени при различных значениях числа Грасгофа для первого варианта параметров (линия 1 соответствует $G=3,6 \cdot 10^7$; 2 — $3,6 \cdot 10^8$; 3 — $3,6 \cdot 10^9$; 4 — $3,6 \cdot 10^{10}$). Для зависимости $\psi_m(t)$ характерна

точка $t = \tau_*$, в которой достигается максимум

$$\psi_* = \max_t \psi_m(t)$$

Обработка результатов, полученных при различных значениях числа Грасгофа, позволила получить зависимости

$$(3.1) \quad \psi_* = 1,3G^{0,34}, \quad \tau_* = 4,2G^{-0,38}$$

Аналогичные зависимости характерны и для других вариантов параметров таблицы.

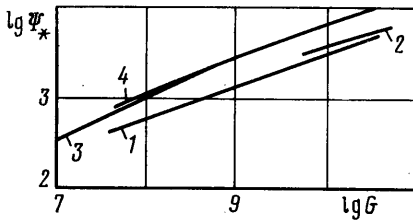
Линии тока (слева) и изотермы (справа) для момента времени, близкого к моменту максимальной интенсивности $t \approx 0,8\tau_*$ при $G = 3,6 \cdot 10^3$, представлены на фиг. 2. Линии тока проведены через интервал $\psi_m/5$. Изотермы построены через два интервала δT_m и δT_j , определенных по разности температур соответственно в твердом массиве и в жидкости. Изотермы с номером $j=1; 2; 3$, проходящие через жидкость, соответствуют температуре $T = \min T_j + j^2 \delta T_j$, а изотермы с номерами $j=4-8$ соответствуют температуре $T = (j-4)\delta T_m$. Видно, что значительные изменения в температурном поле массива произошли лишь на небольшом расстоянии от радиуса. В верхней части полости начинается формирование теплой «шапки».

Интересной особенностью течения является ранний отрыв пограничного слоя, приводящий к замкнутому вихрю в нижней части цилиндра. Центр вихря расположен на высоте $z = 0,2l$. История положения центра вихря такова. В начальный момент времени центр вихря расположен в середине области (по высоте), затем он оказывается внизу оттесненным от боковой поверхности. В дальнейшем центр вихря немного поднимается и колеблется около $z \approx 0,2l$. Обсуждаемая особенность конвективного течения показывает, в частности, что приближение теории пограничного слоя не может быть использовано в простой постановке без учета меняющегося со временем температурного ядра течения, которое, по-видимому, и приводит к отрыву пограничного слоя.

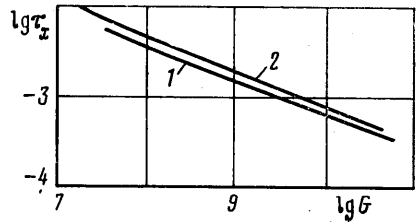
В том случае, когда начальная температура жидкости выше температуры окружающего массива, охлажденная жидкость опускается вдоль боковой поверхности цилиндра и поднимается в центре. После стадии формирования пограничного слоя образуется вихрь в верхней части полости. Поведение во времени интегральных характеристик течения во многом подобно первому варианту.

На фиг. 3, 4 в логарифмическом масштабе представлены зависимости ψ_* и τ_* от числа Грасгофа. На фиг. 3 номеру линии соответствует номер варианта значений параметров, приведенных в таблице; на фиг. 4 линия 1 соответствует вариантам I и II ($l=5$), а линия 2 — вариантам III, IV ($l=25/3$). Время развития конвективного течения почти не меняется при смене начальной разности температур, а интенсивность течения слегка возрастает за счет изменения теплофизических параметров жидкости, которые соответствуют более высокой температуре. Следует отметить, что наличие геотермического градиента и выбранное начало отсчета температуры приводят при $\vartheta > 0$ к меньшей начальной подъемной силе по сравнению со случаем $\vartheta < 0$. Однако это уменьшение подъемной силы при $G \sim 10^{11}$ меньше того положительного вклада, который обусловлен изменением теплофизических параметров жидкости. При $l=25/3$ обработка результатов, представленных на фиг. 3, 4, дает зависимости, аналогичные (3.1) с соответствующими коэффициентами 2,2 и 4,9.

Экстраполяция найденных зависимостей позволяет оценить размерное время «разгона» конвекции $t_* \sim 0,5-1$ час. Это время значительно меньше характерного времени теплового процесса в твердом массиве $t_m \sim R^2/\chi_m \sim 6 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^5$ час, а также времени, необходимого для заполнения емко-



Фиг. 3



Фиг. 4

сти нефтепродуктом. Полученная оценка не является заниженной, так как эффект счетной вязкости, проявляющийся при больших G , обычно увеличивает время разгона.

Для средней и максимальной скорости жидкости в момент $t = \tau_*$ получаются оценки $\langle v \rangle < 0,1$ и $v_m < 10$ см/с. Оценки скорости, по-видимому, занижены из-за эффекта счетной вязкости.

Полученные результаты практически снимают вопрос о выборе начального условия, так как время рассмотренного переходного режима на несколько порядков меньше времени заполнения емкости нефтепродуктом. В дальнейшем предполагается исследовать регулярный конвективный теплообмен, вызванный вертикальным геотермическим градиентом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.
2. Таруни Е. Л., Шихов В. М., Юрков Ю. С. Свободная конвекция в цилиндрическом сосуде при заданном тепловом потоке на верхней границе. — Уч. зап. Пермск. ун-та, 1975, № 327.
3. Стейси Ф. Физика Земли. М.: Мир, 1972.
4. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
6. Онянов В. А., Таруни Е. Л. Численные эксперименты по использованию различных разностных схем для задач свободной конвекции в замкнутой области. — Уч. зап. Пермск. ун-та, 1975, № 327.
7. Сидельников В. Н., Шутько А. В. К методу простой итерации для численного решения стационарного уравнения переноса с параметром малости при старших производных. Обнинск, 1976 (Физ.-энерг. ин-т. Препринт № 726).
8. Таруни Е. Л. О выборе аппроксимационной формулы для вихря скорости на твердой границе при решении задач динамики вязкой жидкости. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды, 1978, т. 9, № 7.

Пермь, Москва

Поступила в редакцию
10.IX.1979