

УДК 533.6.011.8

## ПОДОБИЕ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА ОКОЛО ТУПЫХ ТЕЛ

ЛАРИН И. Н., РЫКОВ В. А.

Законы подобия гиперзвуковых потоков одноатомных газов ранее получены из асимптотического анализа уравнений при  $S \rightarrow \infty$  и подтверждены экспериментальными и расчетными данными [1]. Для двухатомных газов критерии подобия выдвигались не из анализа уравнений, а из общих соображений аналогии с одноатомным газом, и применялись при сравнении экспериментальных и расчетных результатов в [1-3]. В настоящей работе критерии подобия выводятся на основе модельных кинетических уравнений для двухатомного газа, устанавливаются пределы их применимости. Проведенные численные расчеты подтверждают точные и приближенные законы подобия и позволяют провести сопоставление с экспериментальными результатами. Исследуется влияние законов вязкости на зависимость коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса  $Re_0$ , определенного по вязкости в точке торможения.

1. Состояние двухатомного газа описывается функцией распределения частиц  $f_0(x_j, \xi_j)$  и функцией распределения вращательной энергии  $f_1(x_j, \xi_j)$ , которые удовлетворяют системе безразмерных кинетических уравнений [4]

$$(1.1) \quad \xi_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \nu_r (f_k^r - f_k) + \nu_t (f_k^t - f_k), \quad k = \{0; 1\}$$

$$f_0^t = f_M(T_t) [1 - q_j^t a_j(T_t)], \quad f_1^t = T_r \left[ f_0^t + 2(1 - \delta) f_M(T_t) \frac{q_j^t c_j}{n T_t^2} \right]$$

$$f_0^r = f_M(T) [1 - \omega_0 q_j^r a_j(T)], \quad f_1^r = T \left[ f_0^r + 2\omega_1 (1 - \delta) f_M(T) \frac{q_j^r c_j}{n T^2} \right]$$

$$a_j(T) = \frac{4}{15} \frac{c_j}{n T^2} \left( \frac{5}{2} - \frac{c^2}{T} \right), \quad \frac{5}{2} T = \frac{3}{2} T_t + T_r$$

$$\nu_r = \frac{4}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{Kn} \frac{p_t}{\mu(T_t)} \frac{1}{Z}, \quad \nu_t = \frac{4}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{Kn} \frac{p_t}{\mu(T_t)} \left( 1 - \frac{1}{Z} \right)$$

$$\mu(T_t) = T_t^{3/2} \psi(B) / \psi(B T_t), \quad B = T_\infty / T_*, \quad T_* = \varepsilon / k$$

$$\psi(t) = 0,767 + 0,233 t^{-1/2} \exp[-1,17(t-1)]$$

Кроме общепринятых обозначений макропараметров здесь использованы:  $T_t$  и  $T_r$  — температуры поступательных и вращательных степеней свободы;  $q^t$  и  $q^r$  — потоки тепла поступательных и вращательных степеней свободы;  $\nu_t$  и  $\nu_r$  — частоты упругих и неупругих столкновений;  $Z^{-1}$  — доля неупругих столкновений;  $\varepsilon$  — глубина потенциальной ямы. Выражение для  $\mu(T_t)$  строилось из условия аппроксимации табличных значений вязкости, соответствующей потенциалу Леннарда — Джонса. Входящие в уравнения константы для азота имеют значения:  $\omega_0 = 0,2354$ ;  $\omega_1 = 0,3049$ .

$\delta^{-1}=1,55$ ;  $T_*=91,5$ . Обработка результатов работы [5] позволила построить приближенное выражение для  $Z$ :

$$Z(T_i, T_r) = \frac{3}{4} \pi \frac{\psi(BT_i)}{(BT_i)^{1/6}} \frac{9BT_i}{BT_i+8} \frac{T_r}{T_i} \left[ a + b \left( \frac{T_r}{T_i} \right) + c \left( \frac{T_r}{T_i} \right)^2 \right]$$

Для азота  $a=0,4504$ ;  $b=0,6878$ ;  $c=0,0556$ . Это выражение основано на классическом описании вращательных степеней свободы. В работе [6] отмечается, что при  $T_i < T_* \sim 100$  К необходимо применять квантовомеханический подход и пользоваться иным выражением для  $Z$ . В задачах гиперзвукового обтекания тупых тел газом с температурой адиабатического торможения порядка комнатной в набегающем потоке могут возникнуть области, где  $T_i < T_*$  и замечание работы [6] имеет место. Тем не менее и в этих случаях вычисления проводились всюду с выражением  $Z$ , отвечающим классическому описанию вращательных степеней свободы. Полученные при этом результаты для сопротивления тела хорошо согласуются с экспериментом. Это связано с тем, что в основной зоне возмущения потока перед телом условие применимости классического описания выполняется, а остальная область является несущественной в отношении ее влияния на сопротивление тела.

2. Закономерности обтекания тупых тел сверхзвуковым и гиперзвуковым потоками разреженного газа рассмотрим на задаче обтекания сферы одноатомным и двухатомным газами. Уравнение для одноатомного газа формально получается из первого уравнения системы (1.1) при  $Z^{-1}=0$ .

Численное решение строилось методом характеристик с шагом вдоль характеристики  $\Delta x=0,05 R$ . Как обычно, кинетические уравнения решались при помощи итераций. Граничные условия в набегающем потоке выставлялись на сфере с радиусом, равным трем радиусам обтекаемой сферы. Функция распределения частиц, отраженных от поверхности тела, задавалась в виде равновесного распределения с температурой, равной температуре сферы  $T_w$ . Для вычисления макропараметров использовались квадратурные формулы, специально приспособленные для расчетов при больших числах Маха [7].

Решение задачи зависит от четырех безразмерных параметров: числа Кнудсена  $Kn=\lambda_\infty/D$  ( $D$  — диаметр сферы), скорости набегающего потока  $S=U_\infty/(2kT_\infty/m)^{1/2}$ , температуры тела  $T_w$ , отнесенной к температуре набегающего потока  $T_\infty$ , и отношения  $B=T_\infty/T_*$ . Эти параметры одни и те же как для одноатомного, так и для двухатомного газов. Но строго утверждать, что коэффициенты сопротивления сферы при обтекании двухатомным и одноатомным газами будут совпадать при совпадении параметров  $Kn$ ,  $S$ ,  $B$  и  $T_w$  нельзя, так как разнятся кинетические уравнения, соответствующие этим случаям. Тем не менее можно ожидать приближенного совпадения коэффициентов сопротивления в одноатомном и двухатомном газах при совпадении всех безразмерных параметров. Наводящими соображениями здесь служат строгое совпадение коэффициентов сопротивления при  $Kn=\infty$  и довольно близкие их значения при  $Kn=0$ .

Расчеты коэффициента сопротивления сферы, выполненные для одноатомного и двухатомного газов при  $Kn \geq 0,3$ , позволили установить, что при совпадении параметров  $Kn$ ,  $S$ ,  $B$  и  $T_w$  в обоих случаях коэффициенты сопротивления  $C_D$  приблизительно равны [8]. Ниже приведены результаты для  $S=4$ ;  $B=2,4$ ;  $T_w=6$  (индексами 1 и 2 отмечены коэффициенты сопротивления для одноатомного и двухатомного газов соответственно):

$Kn$	3,6	1,2	0,6	0,3
$C_{D1}$	2,58	2,35	2,19	2,15
$C_{D2}$	2,60	2,40	2,24	2,19

Видно, что коэффициенты близки и  $C_{D1} < C_{D2}$ . Расчеты, проделанные при других значениях параметров  $Kn=0,3$ ;  $B=0,26$ ;  $T_w=28$  и  $S=9$ , дают

$C_{D1}=2,16$ ;  $C_{D2}=2,08$ , т. е. соотношение между коэффициентами сопротивления может быть иным,  $C_{D1} > C_{D2}$ .

3. При гиперзвуковых течениях газа около тупых тел происходит снижение количества параметров, от которых зависит решение задачи. Обезразмеривание уравнений в гиперзвуковом случае необходимо проводить, выбирая за характерное значение температуры не  $T_\infty$ , а температуру адиабатического торможения одноатомного газа  $T_0 = T_\infty(1 + 2/5 S^2)$ . При больших числах  $S$  граничные условия и уравнения принимают предельный вид и не зависят от параметра  $S$ . В этом случае независимыми параметрами являются: число Рейнольдса  $Re_0 = U_\infty \rho_\infty D / \mu(T_0)$ , определенное по температуре адиабатического торможения одноатомного газа  $T_0$ , температура тела  $\theta_w = T_w / T_0$  и  $B_0 = T_0 / T_*$  — отношение температуры торможения к критической. Они выражаются через прежние параметры по формулам

$$Re_0 = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \left(\frac{5}{2}\right)^{3/2} \frac{1}{Kn S^{3/2}} \frac{\psi(B_0)}{\psi(B)} \left(\frac{2/5 S^2}{1 + 2/5 S^2}\right)^{3/2}$$

$$\theta_w = T_w (1 + 2/5 S^2)^{-1}, \quad B_0 = B (1 + 2/5 S^2)$$

Кинетические уравнения, граничные условия в набегающем потоке и на поверхности тела принимают вид

$$\frac{2\sqrt{10}}{Re_0} \xi_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{p_t}{\mu_t} \frac{1}{Z} (f_k^r - f_k) + \frac{p_t}{\mu_t} \left(1 - \frac{1}{Z}\right) (f_k^t - f_k), \quad k = \{0, 1\}$$

$$\mu_t = T_t^{3/2} \psi(B_0) / \psi(B_0 T_t)$$

$$f_0 = f_1 = \delta \left( \xi_x - \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \delta(\xi_y) \delta(\xi_z)$$

$$f_{0w} = n_w (\pi \theta_w)^{-3/2} \exp(-\xi^2 / \theta_w), \quad f_{1w} = \theta_w f_{0w}$$

$$n_w = -2 \left(\frac{\pi}{\theta_w}\right)^{1/2} \int_{(\xi, \mathbf{n}) < 0} (\xi, \mathbf{n}) f_0 d\xi$$

Параметр  $B_0$  входит в выражения  $\mu_t$  и  $Z$ . В области сжатия перед телом, где  $T_t \sim 1$ , функция  $\varphi = \psi(B_0) / \psi(B_0 T_t)$  с увеличением  $B_0$  стремится к 1. В натуральных условиях  $B_0 \gg 1$  и предельная форма закона вязкости будет  $\mu_t = T_t^{2/3}$ . В экспериментах по обтеканию тел в гиперзвуковых струях, истекающих из сопла, температура адиабатического торможения является комнатной, поэтому в области сжатия перед телом, где  $T_t \sim 1$ , величина  $\varphi \sim 1$ , а  $\mu_t \approx T_t^{2/3}$ . Отклонение  $\varphi$  от 1 может происходить лишь в области набегающего потока, где  $T_t \ll 1$  и  $B_0 T_t \sim B$ . Как будет показано ниже на результатах расчетов для одноатомного газа, сопротивление тела практически не зависит от параметра  $B_0$  и действительно можно принять  $\mu_t = T_t^{2/3}$ . Таким образом, для одноатомного газа существенными параметрами являются  $Re_0$  и  $\theta_w$ .

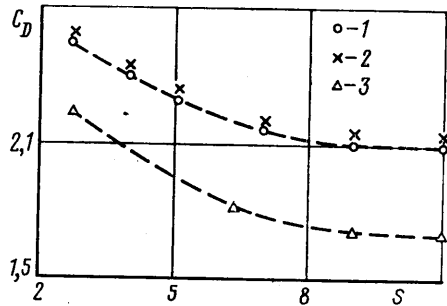
Благодаря тому что при умеренных и больших числах Кнудсена сопротивление тела практически не зависит от  $Z$ , то и в случае двухатомного газа можно сказать, что коэффициент сопротивления сферы при больших числах  $S$  также зависит только от  $Re_0$  и  $\theta_w$  и совпадает с коэффициентом сопротивления при обтекании одноатомным газом. Расчеты, выполненные при больших числах  $S$ , показали, что коэффициенты сопротивления сферы для одноатомных и двухатомных газов приближенно равны, если совпа-

дают  $Re_0$  и  $\theta_w$ . При этом важно, чтобы температура адиабатического торможения, которая используется при построении  $Re_0$  и  $\theta_w$ , бралась одной и той же для обоих газов. Несоблюдение этого условия, например в [2], приводит к тому, что коэффициенты сопротивления для одноатомного и двухатомного газов разнятся даже в свободномолекулярном режиме. Помимо параметра  $Re_0$  можно использовать число Рейнольдса  $Re_0^d$ , построенное по температуре адиабатического торможения двухатомного газа  $T_0^d = T_\infty (1 + 2S^2/7)$ . Этот параметр выражается через  $Re_0$  соотношением  $Re_0^d = Re_0 (T_0/T_0^d)^{2/3}$ .

Выход на предельный гиперзвуковой режим обтекания можно проследить по графику зависимости  $C_D$  от  $S$  при фиксированных  $Re_0$  и  $\theta_w$ .

Расчеты проводились на основе  $S$ -модельного уравнения при температуре поверхности сферы, равной ее равновесной температуре при свободномолекулярном обтекании. Равновесная температура при  $Kn \geq 0,3$  мало отличается от ее свободномолекулярного значения. Для параметра  $B$  брались два характерных значения: 2,98 и 0,26, что соответствует условиям натурального эксперимента и эксперимента в трубе, истекающей из сопла. На фиг. 1 нанесены данные расчетов  $C_D$  при  $Re_0^d = 3,5$ ;  $\theta_w = 1,17$ . Точками 1, 2 нанесены результаты при  $B = 2,98$  и 0,26 соответственно. Различие между значениями  $C_D$  при  $S = 7$  и 9 составляет 3%, а при  $S = 9$  и 11 — только 1%. Это показывает те характерные значения скорости набегающего потока  $S$ , при которых происходит гиперзвуковая стабилизация. Из фиг. 1 также видно, что параметр  $B_0$  не влияет на  $C_D$  не только при больших  $S$ , но и при умеренных, так что приближенно можно принять  $C_D = C_D(Re_0, \theta_w, S)$ . Коэффициент сопротивления  $C_D$  не зависит от  $B_0$  лишь при  $B_0 \gg 1$ . Но оказывается, что значение  $B_0$ , отвечающее температуре адиабатического торможения порядка комнатной, является уже достаточно большим.

На этой же фигуре представлены значения  $C_D$ , полученные для холодного тела при  $\theta_w = 0,25$ ;  $Re_0^d = 3,5$  и  $B = (0,26; 2,98)$  (точки 3).



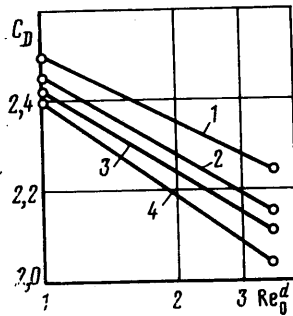
Фиг. 1

Результаты, полученные для значений  $B$ , отличающихся на порядок, оказались настолько близкими, что представлены одной кривой. Это показывает, что  $C_D$  не зависит от  $B_0$  как для горячего, так и холодного тела.

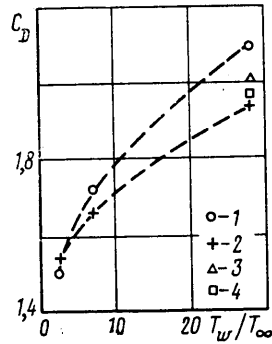
Независимость  $C_D$  от  $B_0$  означает, что кривую  $C_D$  от  $Re_0$ , построенную при помощи эксперимента при фиксированных  $\theta_w$  и  $S$ , можно использовать и для натуральных условий. При больших числах  $S$ , когда происходит гиперзвуковая стабилизация  $C_D = C_D(Re_0, \theta_w)$ . Если обтекание тела происходит в равновесных условиях, то равновесная температура  $\theta_w$  есть функция  $Re_0$ , и поэтому  $C_D$  будет функцией только  $Re_0$ , т. е.  $C_D = C_D(Re_0)$ .

4. Рассмотрим влияние закона вязкости на коэффициент сопротивления. При гиперзвуковых режимах обтекания иногда проводят сопоставление коэффициентов сопротивления, полученных для различных законов вязкости. При этом ожидают хорошего согласования между зависимостями  $C_D$  от параметра  $Re_0$ . Мотивируется это тем, что параметр  $Re_0$  включает характерное значение вязкости в точке торможения и поэтому закон вязкости не должен оказывать существенного влияния.

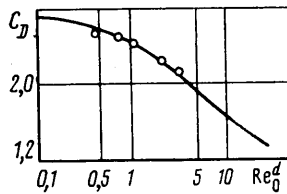
Для проверки этого положения были проведены численные расчеты обтекания сферы на основе  $S$ -модельного уравнения для степенного закона вязкости с показателями  $\omega = 0,5$  и 1 и для закона вязкости по модели Леннарда — Джонса. Результаты приведены на фиг. 2 для  $S = 9$ ,  $T_w = 28$  и  $Re_0^d = \{1; 3,5\}$ . Цифрами 1 и 4 отмечены результаты для степенного закона вязкости с показателем  $\omega = 1$  и 0,5 соответственно, а цифрами 2 и 3 — для закона Леннарда — Джонса с параметрами  $B = 0,26$  и 2,98. Различие между случаями  $\omega = 0,5$  и 1 составляет около 10%. Это объясняется тем,



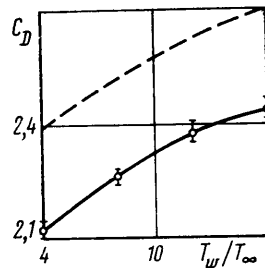
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

что предельная форма кинетического уравнения, получающаяся при  $S \rightarrow \infty$ , содержит в частоте столкновений выражение  $T_i^0$ . Хотя в зоне сжатия перед телом  $T_i \sim 1$ , но, вообще говоря,  $T_i$  в этой зоне меняется и величина  $\omega$ , как показывают результаты вычислений, оказывает влияние на коэффициент сопротивления в пределах 10%.

На фиг. 3 представлены зависимости  $C_D$  от температуры поверхности  $T_w$ , полученные для различных законов вязкости. Точками 1 и 2 нанесены данные, соответствующие степенному закону вязкости с  $\omega=1$  и 0,5. Из графика видно, что при больших числах Маха коэффициент сопротивления горячего тела при  $\omega=1$  больше, чем при  $\omega=0,5$ , а холодного — меньше. Расчеты, выполненные с законом вязкости Ленарда — Джонса, представлены точкой 3 для  $B=0,26$  и точкой 4 для  $B=2,98$ . Результаты располагаются между кривыми с  $\omega=1$  и 0,5. Расчеты, сделанные при других значениях  $T_w$ , показали, что такое расположение результатов имеет место всюду.

5. В этом разделе дадим сопоставление численных результатов с экспериментальными данными. Такое сопоставление необходимо для оценки надежности результатов расчета, а также подтверждения возможности использовать модельные кинетические уравнения при обтекании тупых тел гиперзвуковым потоком разреженного газа.

Для сравнения с экспериментами, в которых температура поверхности равна температуре адиабатического торможения двухатомного газа, расчеты выполнялись при тех же значениях параметров, что и в эксперименте  $S=6,34$ ;  $B=0,26$ ;  $T_w=12,5$ , что соответствует  $\theta_w=0,74$ . Величина  $B$  принимала также значение 2,4, отличное от экспериментального. На фиг. 4 представлена зависимость коэффициента сопротивления сферы  $C_D$  от числа Рейнольдса  $Re_0^d$ . Сплошной линией изображены экспериментальные данные работы [9], точками нанесены результаты настоящей работы. Зависимость  $C_D$  от  $Re_0^d$  по результатам экспериментальной работы [9] хорошо согласуется с результатами настоящей работы, полученными при  $B=\{0,26; 2,4\}$ . Влияние параметра  $\theta_w$  на сопротивление тела показано на фиг. 5. Точками отмечены результаты расчетов  $C_D$  на основе решения модельного кинетического уравнения для азота. Расчеты выполнены для  $\theta_w=\{0,25; 0,5; 0,75; 1\}$  при  $Re_0^d=0,78$ . Значения исходных безразмерных параметров были следующие:  $Kn=1,2$ ;  $B=0,26$ ,  $S=7$ ,  $T_w=\{4; 8; 12; 15\}$ . Вертикальные черточки показывают диапазон изменения результатов эксперимента [9]. Видно, что согласование расчетных и экспериментальных данных хорошее. На этой же фигуре пунктиром показано изменение  $C_D$  в свободно-молекулярном режиме.

Из сопоставления численных и экспериментальных результатов можно сделать вывод, что модельные кинетические уравнения с законом вязкости Леннарда — Джонса позволяют с приемлемой точностью рассчитывать сопротивление тупых тел в гиперзвуковых потоках разреженного газа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В. Н., Коган М. Н., Перепухов В. А. О подобии и изменении аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока. — Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
2. Гусев В. Н., Климова Т. В., Рябов В. В. Основные закономерности изменения аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока. — Уч. зап. ЦАГИ, 1976, т. 7, № 3.
3. Шахов Е. М. Обтекание пластины потоком разреженного газа. В кн.: Численные методы в динамике разреженных газов, вып. 1. М., ВЦ АН СССР, 1973.
4. Ларина И. Н., Рыков В. А. Метод исследования течений двухатомного газа. В кн.: Численные методы в динамике разреженных газов, вып. 3. М., ВЦ АН СССР, 1977.
5. Lordi J. A., Mates R. E. Rotational relaxation in non-polar diatomic gases. — Phys. Fluids, 1970, v. 1, No. 2.
6. Лебедь И. В., Рябов В. В. О проявлении квантовых эффектов при вращательной релаксации свободно расширяющегося газа. — ПМТФ, 1979, № 1.
7. Ларина И. Н. Исследование обтекания холодной сферы потоком разреженного газа при очень больших числах Маха. — В кн.: Численные методы в динамике разреженных газов, вып. 4. М., ВЦ АН СССР, 1979.
8. Ларина И. Н., Рыков В. А. Обтекание сферы двухатомным газом на основе кинетических уравнений. — Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 1.
9. Хаджимихалис К., Брандин К. Влияние температуры стенки на сопротивление сферы в гиперзвуковом потоке разреженного газа. Динамика разреженных газов. М.: Мир, 1976.

Москва

Поступила в редакцию  
22.VIII.1979