

УДК 533.6.011.55

**НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ТОНКОМ ВЯЗКОМ УДАРНОМ
СЛОЕ ОКОЛО ТРЕХМЕРНОЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ
ПРИ ЗАДАННОМ УСКОРЕНИИ И ТОРМОЖЕНИИ ТЕЛА**

МАРКОВ А. А.

Нестационарные эффекты с учетом вязкости рассматривались в приближении пограничного слоя в ряде работ (см. [1–2]), где в большей степени рассматривались пограничные слои в несжимаемой жидкости. Импульсному старту и нестационарному изменению скорости эллиптических цилиндров в несжимаемой жидкости посвящены работы [3, 4]. Нестационарный пограничный слой в сжимаемом газе исследовался в работах [5, 6], в которых имеется обширная библиография. Нестационарный ударный слой рассмотрен в [7, 8] без учета вязких эффектов.

В настоящей работе рассматривается задача о нестационарном вязком ударном слое около критической точки. Анализ уравнений Навье – Стокса проводится при $\gamma \rightarrow 1$, $Re_0 \rightarrow \infty$, $M_\infty \rightarrow \infty$, $df/dt = \alpha^n - mF(t/\alpha^m)$. Число Рейнольдса Re_0 определено ниже (1.3) (здесь df/dt – скорость тела относительно инерциальной системы отсчета, движущейся с исходной стационарной скоростью $-V_\infty'$, $\alpha^2 = (\gamma - 1) / (\gamma + 1)$).

Проанализированы различные режимы обтекания в случае $\alpha \ll 1$, $\epsilon \ll 1$, $n \geq \max(2m, m+1)$, $m \geq 0$, где $\epsilon^2 = 1 / Re_0$. Приведены уравнения, обобщающие асимптотический анализ на случай вязкого нестационарного течения газа в тонком трехмерном ударном слое. Формулируется задача о тонком нестационарном вязком ударном слое около критической точки тела двоякой кривизны. Приводятся примеры численного решения при различных значениях отношения главных кривизн тела, температуры стенки, параметров исходного стационарного обтекания и режимов ускорения и торможения.

1. Проведем асимптотический анализ уравнений нестационарного ударного слоя на примере течения газа около точки торможения при осесимметричном течении. Обобщение на трехмерный ударный слой рассмотрим в п. 3.

Запишем уравнения Навье – Стокса в сферических координатах r, θ, ψ . Предположим, что течение осесимметрично и θ – угол между осью r и осью симметрии, тогда параметры потока не зависят от ψ и решение уравнений Навье – Стокса в окрестности точки торможения с координатами $r=1, \theta=0$ можно искать в виде разложений по θ [9]. Так, тангенциальная u , радиальная v составляющие скорости, плотность ρ , энтальпия h , давление p и коэффициент вязкости μ представляются в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u &= u_0(t, r) \sin \theta + u_2(t, r) \sin^3 \theta + \dots \\ v &= v_0(t, r) \cos \theta + v_2(t, r) \cos \theta \sin \theta + \dots \\ \rho &= \rho_0(t, r) + \rho_2(t, r) \sin^2 \theta + \dots, \quad p = p_0(t, r) + p_2(t, r) \sin^2 \theta + \dots \\ h &= h_0(t, r) + h_2(t, r) \sin^2 \theta + \dots \\ \mu &= \mu_0(t, r) + \mu_2(t, r) \sin^2 \theta + \dots \end{aligned}$$

Подставляя разложение (1.1) в нестационарное уравнение Навье – Стокса, получим для величин $u_0, v_0, h_0, \mu_0, p_0, p_2$ обобщение уравнений, использованных в работе [9] на нестационарный случай (нулевые индексы опускаем):

$$(1.2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial r} + 2\rho \frac{(u+v)}{r} = 0$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 4\varepsilon^2/3 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right) \partial r + F(u, v, \mu)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial r} = \frac{\rho u(u+v)}{r}; \quad \mu = h^0$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2p^2}{r} + \frac{\rho u(u+v)}{r} = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) + G$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} + \rho v \frac{\partial h}{\partial r} - v \frac{\partial p}{\partial r} = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \text{Pr}^{-1} \frac{\partial h}{\partial r} \right) \right) + H$$

$$F(u, v, \mu) = \frac{2\mu}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\mu}{2r} \frac{\partial u}{\partial r} - \left(\frac{7\mu}{2r} + \frac{\partial \mu}{\partial r} \right) \frac{u+v}{r}$$

$$p = \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2} \rho h$$

$$G(u, v, \mu) = -\frac{8\mu}{3r^2} (u+v) + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\mu}{3r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{(u+v)}{r}$$

$$H(u, v, h, \mu) = 2\mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \frac{4(u+v)^2}{r^2} \mu - \frac{2}{3} \frac{\mu}{r^2} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\ \left. + 2u+2v \right)^2 + \frac{2\mu}{\text{Pr} r} \frac{\partial h}{\partial r}$$

Переменные в (1.1), (1.2) обезразмерены по формулам

$$(1.3) \quad \rho' = \rho_\infty' \rho, \quad \mu' = \mu_\infty' \mu, \quad p' = \rho_\infty' V_\infty'^2 p, \quad h' = h V_\infty'^2 \\ u' = V_\infty' u, \quad v' = V_\infty' v \\ \mu_0' = \mu' (h_0') = \mu_\infty' h_0'^0, \quad h_0' = h_\infty' + V_\infty'^2/2, \quad T' = T_0' T, \\ c_p T_0' = h_0' \\ \text{Re}_0 = \rho_\infty' V_\infty' r_0' / \mu_0', \quad r' = r_0' r$$

Здесь штрих относится к размерным величинам.

Предположим, что в начальный момент времени тело обтекается сверхзвуковым потоком V_∞' , ρ_∞' , h_∞' , а при $t > 0$ перемещается вдоль оси симметрии по закону

$$(1.4) \quad r = 1 + f(t), \quad f(0) = 0, \quad f(t) = \alpha^n \psi(t/\alpha^m)$$

На поверхности тела ставятся условия [9]

$$(1.5) \quad r = 1 + f(t): \quad v - \frac{df}{dt} = 0, \quad u = \varepsilon_0 \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}} \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$h = h_w + \varepsilon_1 \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}} \frac{\partial h}{\partial r}$$

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{\pi \gamma T_\infty'}{2 T_0'}} \frac{(2 - \sigma_0)}{\sigma_0} \frac{M_\infty}{\text{Re}_0}, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\pi \gamma T_\infty'}{2 T_0'}} \frac{(2 - \sigma_1) 2\gamma}{\sigma_1 (\gamma + 1)} \frac{M_\infty}{\text{Pr Re}_0}$$

Здесь σ_1 — коэффициент тепловой аккомодации; σ_0 — коэффициент отражения.

Граничные условия (1.5) учитывают эффекты скольжения и скачки температуры. Из формулы $T_0'/T_\infty' = 1 + (\gamma - 1)M_\infty^2/2$ находим

$$(1.6) \quad \varepsilon_0 = O(\varepsilon^2/\alpha), \quad \varepsilon_1 = O(\varepsilon^2/\alpha)$$

В набегающем потоке ставятся условия

$$(1.7) \quad r \rightarrow \infty, \quad u=1, \quad v=-1, \quad \rho=1, \quad h=\delta/2, \quad p_2=0, \\ \delta^{-1} = (\gamma - 1)M_\infty^2/2$$

В начальный момент времени предполагаются заданными распределения $\rho^\circ(r)$, $u^\circ(r)$, $v^\circ(r)$, $h^\circ(r)$, $p^\circ(r)$, $p_2^\circ(r)$, соответствующие стационарному обтеканию.

2. В зависимости от соотношения между малыми параметрами α , ε , δ (α , ε входят в уравнения (1.2) и условия на теле (1.5), параметр δ входит в условия набегающего потока (1.7)), входящими в нестационарную задачу (1.2), (1.5), (1.7), ударный слой является либо полностью вязким, либо содержит невязкую часть, отделенную от набегающего потока тонкой ударной волной, и вязкий подслой около тела. Влияние параметров α , ε , δ на асимптотическую трехслойную структуру головной ударной волны изучено в [10], где получены также соотношения за ударной волной, учитывающие вязкие эффекты. Можно, однако, получить аналогичные соотношения, используя законы сохранения в интегральной форме и учитывая правильный порядок величин в зоне ударной волны. Такой подход применен, например, в [11]. Более подробно вывод замыкающих соотношений за ударной волной для трехмерного нестационарного ударного слоя обсуждается в [12], где содержатся также ссылки на другие работы.

Рассмотрим представляющие физический интерес режимы течения в нестационарном ударном слое. Отдельные режимы для стационарного ударного слоя рассматривались в [11, 13].

$$\text{Режим } \varepsilon^2/\alpha^2 = M = O(1)$$

Вводим преобразование координат $y_1 = (r - f - 1)\alpha^{-2}$, $t_1 = t$. Величины в ударном слое ищем в виде следующих разложений по параметру α :

$$(2.1) \quad u = u_0(y_1, t_1) + o(1), \quad v - df/dt = \alpha^2(v_0(y_1, t_1) + o(1)) \\ \rho = \alpha^{-2}(\rho_0(y_1, t_1) + o(1)), \quad h = h_0(y_1, t_1) + o(1) \\ p = p_0(y_1, t_1) + o(1), \quad p_2 = p_{20}(y_1, t_1) + o(1)$$

Здесь $df/dt = \alpha^{-n-m} d\psi/d\tau$, $\tau = t/\alpha^m$, $d\psi/d\tau = O(1)$, $df/dt = O(\alpha^{n-m})$.

Величина поправок к главным членам, указанным в разложениях, определяется погрешностями при подстановке разложений (2.1) в уравнения (1.2).

Приведем уравнения для главных членов разложений и обозначим через R соответствующую уравнению относительную погрешность (индекс ноль опустим)

$$(2.2) \quad \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} (\rho v) + 2\rho u \right) = 0, \quad R = O(\alpha^2 + \alpha^{n-m}) \\ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p}{\partial y_1} + \alpha^{n-2m} \rho \frac{d^2 \psi}{d\tau^2} \right) = 0, \quad R = O(\alpha^2 + \alpha^2 M + \alpha^{n-m}) \\ \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial y_1} - \rho u^2 \right) = 0, \quad R = O(\alpha^2 + \alpha^{n-m}) \\ \frac{1}{\alpha^2} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t_1} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y_1} + \rho u^2 - M \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) \right) = 0$$

$$R = O(\alpha^2 + \alpha^2 M + \alpha^{n-m})$$

$$\frac{1}{\alpha^2} \left(\rho \frac{\partial h}{\partial t_1} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y_1} - M \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y_1} \right) \right) = 0$$

$$R = O(\alpha^2 + \alpha^2 M + \alpha^{n-m})$$

$$p = 2\rho h, \quad R = O(\alpha^2)$$

Интересно отметить, что при $n-2m=0$ изменение давления поперек ударного слоя зависит от ускорения тела $d^2f/dt^2 = \alpha^{n-2m} d^2\psi/d\tau^2 = O(\alpha^{n-2m})$. Масштаб переменной y_1 определяется толщиной $O(\alpha^2)$ ударного слоя, на внешней границе которого ставятся модифицированные соотношения Ренкина — Гюгионо (см. [10–12]). В нестационарном случае эти соотношения приводятся ниже.

Для рассматриваемого режима весь ударный слой описывается вязкими нестационарными уравнениями. На теле при этом ставятся в первом приближении следующие условия (см. (1.5), (1.6)):

$$y_1 = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad h = h_w$$

(Эффекты скольжения проявляются в следующем приближении.)

Промежуточные режимы $\varepsilon^2 = N\alpha^{2+s}$, $N > 0$, $0 < s \leq 3$. Для семейства режимов $\varepsilon^2 = O(\alpha^{2+s})$ s — заданный параметр, ударный слой толщины $O(\alpha^2)$ делится на невязкую часть и вязкий подслой около тела толщины $O(\alpha^{2+0,5(s-1)})$, где $l \geq 0$ — параметр, который определится ниже при сращивании внутреннего и внешнего решений. На внешней границе ударного слоя ставятся соотношения Ренкина — Гюгионо. Невязкая часть ударного слоя описывается в первом приближении уравнениями

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho v}{\partial y_1} + 2\rho u &= 0, & \frac{\partial p}{\partial y_1} + \rho \frac{d^2 f}{dt^2} &= 0 \\ \frac{\partial p_2}{\partial y_1} &= \rho u^2, & p &= 2\rho h \\ \frac{\partial u}{\partial t_1} + v \frac{\partial u}{\partial y_1} + u^2 &= 0, & \frac{\partial h}{\partial t_1} + v \frac{\partial h}{\partial y_1} &= 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим асимптотику решения системы (2.3) при $y_1 \rightarrow 0$. Ищем решение в виде разложений при $y_1 \rightarrow 0$:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} u &= y_1 u_1(t_1) + \dots, & v &= y_1^2 v_1(t_1) + \dots \\ p &= p_0(t_1) + y_1 p_1(t_1) + \dots, & h &= h_0(t_1) + \dots \\ \rho &= \rho_0(t_1) + \dots, & p_2 &= p_{2,0}(t_1) + \dots \end{aligned}$$

Подстановка разложений (2.4) в уравнения (2.3) и приравнивание членов одинакового порядка при $y_1 \rightarrow 0$ приводит к соотношениям

$$(2.5) \quad \frac{d\rho_0}{dt_1} = 0, \quad u_1 = -v_1, \quad p_1 + \rho_0 \frac{d^2 f}{dt^2} = 0, \quad \frac{du_1}{dt_1} = 0, \quad \frac{dh_0}{dt_1} = 0$$

Отсюда следует $\rho_0 = \text{const}$, $u_1 = \text{const}$, $h_0 = \text{const}$, $p_1(t_1) = -\rho_0 d^2 f / dt^2$.

В вязком подслое положим

$$y_2 = (r - f(t) - 1) / \alpha^{2+0,5(s-1)}, \quad t_2 = \alpha^l t$$

Для искомых функций строим асимптотические разложения

$$(2.6) \quad u = \alpha^l u_0(y_2, t_2) + \dots, \quad v - df/dt = \alpha^{2+0,5(s+l)} v_0(y_2, t_2) + \dots \\ \rho = \alpha^{-2} \rho_0(y_2, t_2) + \dots, \quad h = h_0 + \dots, \quad p = p_0 + \dots, \quad p_2 = p_{2,0} + \dots$$

Уравнения для главных членов разложений (2.6) в вязком подслое имеют вид (нулевой индекс опускаем)

$$(2.7) \quad \alpha^{l-2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial y_2} (\rho v) + 2\rho u \right) = 0, \quad \alpha^{0,5(l-s)} \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = \rho u^2 \\ \alpha^{0,5(s-l)} \left(\frac{\partial p}{\partial y_2} + \alpha^{n-2m} \rho \frac{d^2 \psi}{dt^2} \right) = 0 \\ \alpha^{l-2} \left(\rho \frac{\partial h}{\partial t_2} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y_2} - N \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y_2} \right) \right) = 0 \\ \alpha^{2l-2} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t_2} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y_2} + \rho u^2 + \alpha^{2-2l} 2p_2 - N \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y_2} \right) \right) = 0$$

Здесь $N = \varepsilon^2 / \alpha^{2+s}$. В уравнениях (2.7) предполагается справедливость ограничений

$$(2.8) \quad s-l \geq 0; \quad 0 \leq l \leq 1$$

которая будет установлена ниже при сращивании внутреннего и внешнего решений.

Для сращивания введем промежуточную переменную $\xi = y_1 / \alpha^k$, тогда $y_2 = \xi \alpha^{k-0,5(s-l)}$, потребуем $0 < k < 0,5(s-l)$. Пусть $G(y_1, t_1)$ и $F(y_2, t_2)$ — любая из функций внешнего и внутреннего решений соответственно. Согласно принципу сопряжения (см. [14]), потребуем $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha^k \xi, t_1) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\xi \alpha^{k-0,5(s-l)}, \alpha^l t_1)$, величины ξ, t_1 фиксированы. Согласно асимптотике решения в невязкой части при $y_1 \rightarrow 0$ (2.4), имеем

$$(2.9) \quad u = O(y_1) = O(\xi \alpha^k) = O(\alpha^k); \quad v = O(\alpha^{2k}); \quad \rho = O(1) \\ h = O(1), \quad p = O(1), \quad p_2 = O(1)$$

причем величины $\partial u / \partial t_1, \partial v / \partial t_1, \partial \rho / \partial t_1, \partial h / \partial t_1$ стремятся к нулю при $y_1 \rightarrow 0$.

Из формул (2.6), (2.9) заключаем, согласно принципу сопряжения, что $l = k, (s+l)/2 = 2k$, т.е. $l = s/3$, что согласуется с ограничением (2.8), так как $0 < s \leq 3$ для рассматриваемого семейства режимов. Кроме того, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha^k \xi, t_1) = \lim_{y_1 \rightarrow 0} G(y_1, t_1) = \lim_{y_2 \rightarrow \infty, t_2 \rightarrow 0} F(y_2, t_2)$ не зависит от t_1 , что согласуется с (2.5).

Таким образом, для семейства режимов $\varepsilon^2 = O(\alpha^{2+s}), 0 < s \leq 3$, вязкий подслой толщины $O(\alpha^{2+0,5(s-l)})$, $l = s/3$, имеет асимптотику (2.6) и сопрягается с невязкой частью ударного слоя.

Режим $\varepsilon^2 = O(\alpha^{s+r}), r > 0$. Для данного предельного перехода толщина вязкого подслоя имеет порядок $O(\varepsilon \sqrt{\alpha})$ (ср. [13]) и является малой величиной по сравнению с толщиной вязкого подслоя для режимов, рассмотренных выше.

В вязком подслое координаты деформируются по формулам

$$y_3 = (r - f(t) - 1) \varepsilon^{-1} \alpha^{-1/2}, \quad t_3 = \alpha t$$

а искомые функции ищутся в виде разложений

$$(2.10) \quad u = u_0(y_3, t_3) \alpha + \dots, \quad v - df/dt = \alpha \sqrt{\alpha \varepsilon} v_0(y_3, t_3) + \dots \\ \rho = \alpha^{-2} \rho_0(y_3, t_3) + \dots, \quad h = h_0 + \dots, \quad p = p_0 + \dots, \quad p_2 = p_{2,0} + \dots$$

Для главных членов разложений получается система уравнений (индекс ноль опущен):

$$(2.11) \quad \alpha^{-1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t_3} + \frac{\partial \rho v}{\partial y_3} + 2\rho u + 2\rho \frac{d\psi}{d\tau} \alpha^{n-m-1} \right) = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial p_2}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t_3} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y_3} - \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y_3} \right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_3} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y_3} + 2p_2 + \rho u^2 - \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y_3} \right) + \rho u \frac{d\psi}{d\tau} \alpha^{n-m-1} = 0$$

Слагаемые, содержащие $\alpha^{n-m-1} \alpha \psi / d\tau$ в системе (2.11), могут быть опущены, если $n-m-1 > 0$.

Проведем сопряжение внутреннего решения (2.10) с внешним невязким решением (2.1), удовлетворяющим уравнениям (2.2) при $M=0$. Введем переходную область толщины $O(\alpha^3)$ с локальными координатами $t_0 = \alpha t$, $y_0 = (r-1-f)/\alpha^3$, компоненты скорости v , u в которой имеют порядок α^4 , α соответственно, а ρ , p , h , p_2 — такого же порядка, как в (2.10). Решение в переходной области в первом приближении удовлетворяет системе уравнений (2.11), в которой следует положить $\mu=0$ и заменить t_3 , y_3 на t_0 , y_0 соответственно. Сращивание решения в переходной области с решениями во внутренней и внешних областях проводится аналогично изложенному выше с использованием промежуточных переменных $\xi = y_0/\alpha^r$ и $\xi = y_1$ соответственно.

Приведем, наконец, универсальные уравнения, которые содержат все члены, существенные для рассмотренных выше нестационарных режимов.

$$(2.12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^*}{\partial y} + 2\rho u = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} + \rho \frac{d^2 f}{dt^2} = 0$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial y} = \rho u^2; \quad p = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho h$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v^* \frac{\partial u}{\partial y} + \rho u^2 + 2p_2 - \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v^* \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = 0; \quad y = r - f(t) - 1,$$

$$v^* = v - \frac{df}{dt}$$

Из приведенного выше асимптотического анализа следует, что величиной кинетической энергии в первом приближении можно пренебречь в уравнении энергии; градиент давления p_2 является существенным в вязком слое.

3. Асимптотический анализ обобщается на случай трехмерного нестационарного тонкого ударного слоя в случае, когда тело меняет скорость по заданному закону.

Рассмотрим систему декартовых координат $X = (x^1, x^2, x^3)$, которая движется равномерно со скоростью $-V_\infty'$ первоначального движения тела при $t \leq 0$; введем криволинейные координаты $Q = (q^1, q^2, q^3)$, связанные с движущейся поверхностью тела, предполагая, что координатные линии q^3 ортогональны поверхности. Пусть $x_0^i(q^1, q^2, t)$ — закон движения тела в системе координат X ; $x^i = x^i(q^1, q^2, q^3, t)$ — формулы связи координат Q и X . Разность

$$x^i(q^1, q^2, q^3, t) - x_0^i(q^1, q^2, t) = x_0^i(q^1, q^2, q^3)$$

не зависит от t , так как тело не деформируется в процессе движения. Обозначим $v^i(q^1, q^2, q^3, t)$ декартовы компоненты скорости частицы газа в точке (q^1, q^2, q^3) ; $b^i = \partial x_b^i / \partial t$ — декартовы компоненты скорости тела в точке (q^1, q^2) ; $u^i = A_j^i v^j$, $\omega^i = A_j^i b^j$, A_j^i — матрица, обратная к $\partial x^i / \partial q^j$, тогда $u^i - \omega^i$ — контравариантные компоненты вектора скорости частицы газа в точке (q^1, q^2, q^3) по отношению к системе координат Q (см., например, [15]).

Приведем уравнения нестационарного трехмерного тонкого ударного слоя, которые следуют из асимптотического анализа трехмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса. В случае, когда скорость тела при $t > 0$ меняется по закону, аналогичному (1.4):

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \omega^i(q^1, q^2, t, \alpha) &= \alpha^{n-m} \omega_*^i(q^1, q^2, t\alpha^{-m}); \\ \omega_*^i(q^1, q^2, \tau) &= O(1), \quad \alpha \rightarrow 0, \quad \tau = t\alpha^{-m} \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho \sqrt{g}}{\partial t} + \frac{\partial \rho (u^j - \omega^j) \sqrt{g}}{\partial q^j} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho (u^k - \omega^k) \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial q^i} \{ \sqrt{g} (\rho (u^i - \omega^i) (u^k - \omega^k) + p g^{ik}) \} + \\ + \frac{\partial}{\partial q^3} \left\{ \sqrt{g} (\rho (u^k - \omega^k) (u^3 - \omega^3) - \mu \text{Re}_0^{-1} \frac{\partial u^k}{\partial q^3}) \right\} + \\ + \sqrt{g} \Gamma_{i, k} \{ \rho (u^i - \omega^i) (u^k - \omega^k) + p g^{ik} \} + \sqrt{g} A_j^k \rho \frac{\partial^2 x_b^j}{\partial t^2} + \\ + 2 \sqrt{g} A_j^k \rho (u^j - \omega^j) \frac{\partial^2 x_b^j}{\partial t \partial q^k} &= 0, \quad k=1, 2 \\ \frac{\partial p}{\partial q^3} + A_j^3 \rho \frac{\partial^2 x_b^j}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{3i}}{\partial q^3} \rho (u^i - \omega^i) (u^3 - \omega^3) + \\ + 2 A_j^3 \rho \frac{\partial^2 x_b^j}{\partial t \partial q^i} (u^i - \omega^i) &= 0 \\ \frac{\partial \rho E \sqrt{g}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q^j} \{ \sqrt{g} (\rho E (u^j - \omega^j) + p u^j) \} - \\ - \text{Re}_0^{-1} \frac{\partial}{\partial q^3} \left\{ \frac{\mu \sqrt{g}}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial q^3} + \sqrt{g} g_{3i} u^i \frac{\partial u^i}{\partial q^3} \right\} &= 0 \\ E = h/\gamma + \frac{1}{2} g_{3i} u^i u^i; \quad \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} g_{im} &= \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial x^j}{\partial q^m}, \quad g^{ij} g_{mj} = \delta_m^i \\ \Gamma_{mn}^i &= \frac{1}{2} g^{ij} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial q^n} + \frac{\partial g_{ni}}{\partial q^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial q^j} \right) \\ g &= \det \| g_{ij} \| \end{aligned}$$

(по повторяющимся индексам суммирование по j от 1 до 3, по k, l, s от 1 до 2).

4. Рассмотрим течение газа в нестационарном ударном слое около критической точки тела двойкой кривизны. Введем в окрестности точки торможения систему координат, связанную с линиями кривизны тела. Пусть $q^1 = \xi$, $q^2 = \eta$ — координаты вдоль линий кривизны, $u = u^1 \sqrt{g_{11}}$, $w = u^2 \sqrt{g_{22}}$, $v = u^3 \sqrt{g_{33}}$ — физические составляющие скорости частиц газа. Предположим, что $q^3 = \zeta$ — расстояние по нормали к поверхности тела в критической точке и изменение скорости тела при $l > 0$ происходит вдоль оси ζ , так что $\omega^1 = \omega^2 = 0$; $\omega^3 \sqrt{g_{33}} = df/dt$. В окрестности точки торможения используем следующие разложения по координатам ξ , η :

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sqrt{g_{11}} &= 1 + K_1 \zeta + \dots, & \sqrt{g_{22}} &= 1 + K_2 \zeta + \dots, & g_{33} &= 1 \\ \rho &= \rho_0(t, \zeta) + \dots, & u &= \xi(u_0(t, \zeta) + \dots), & w &= \eta(w_0(t, \zeta) + \dots) \\ v &= v_0(t, \zeta) + \dots, & h &= h_0(t, \zeta) + \dots \\ p &= p_0(t, \zeta) + \frac{1}{2} \xi^2 (p_1(t, \zeta) + \dots) + \frac{1}{2} \eta^2 (p_2(t, \zeta) + \dots) \end{aligned}$$

Многоточием в (4.1) обозначены величины, которые стремятся к нулю при $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$; K_1 , K_2 — главные кривизны тела в критической точке. Без ограничения общности далее полагаем $K_1 = 1$, $K_2 = K$.

Используя разложения (4.1), уравнения нестационарного ударного (3.2) сводим к следующей системе:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^*}{\partial \zeta} + \rho(u+w) &= 0, & \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{d^2 f}{dt^2} \rho &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho u v^*) + p_1 + \rho(2u^2 + uw) &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho w v^*) + p_2 + \rho(2w^2 + uw) &= \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\rho H v^*) + H \rho(u+w) &= \\ = \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial h}{\partial \zeta} + \frac{4\mu}{3} v \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right] \\ \frac{\partial p_1}{\partial \zeta} = 2\rho u^2, & \frac{\partial p_2}{\partial \zeta} = 2K\rho w^2, & H = h + \frac{v^2}{2}, & p = \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho h, & v^* = v - \frac{df}{dt} \end{aligned}$$

В уравнение энергии включены члены, пропорциональные $\partial(v^2)/\partial \zeta$, $\text{Re}_0^{-1} \partial^2(v^2)/\partial \zeta^2$, малые согласно асимптотическому анализу. На теле в первом приближении ставятся условия

$$(4.3) \quad u=0, \quad w=0, \quad v=df/dt, \quad h=h_w \quad \text{при} \quad \zeta=0.$$

Условия на ударной волне $\zeta = \varphi(t)$ с учетом вязких эффектов можно записать в виде (ср. [7])

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \rho_*(v_*' - \dot{\varphi}) &= \rho_\infty(v_\infty' - \dot{\varphi}) = m \\ \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_* h_* + m(v_*' - \dot{\varphi}) &= p_\infty + m(v_\infty' - \dot{\varphi}) + \frac{4}{3} \text{Re}_0^{-1} \mu_* \left(\frac{\partial v'}{\partial \zeta} \right)_* \\ m \left(\frac{h_*}{\gamma} + \frac{v_*'^2}{2} \right) + p_* v_*' &= m \left(\frac{h_\infty}{\gamma} + \frac{v_\infty'^2}{2} \right) + p_\infty v_\infty' + \end{aligned}$$

$$+ \text{Pr}^{-1} \text{Re}_0^{-1} \left(\mu \frac{\partial h}{\partial \xi} \right)_s + \frac{4}{3} \text{Re}_0^{-1} \left(\mu v' \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right)_s,$$

$$m u_s' = m u_\infty' + \text{Re}_0^{-1} \left(\mu \frac{\partial u'}{\partial \xi} \right)_s; \quad m w_s' = m w_\infty' + \text{Re}_0^{-1} \left(\mu \frac{\partial w'}{\partial \xi} \right)_s.$$

Здесь штрих в (4.4) относится к компонентам скорости по нормали к фронту и по касательным к фронту волны вдоль сечений $\xi=0$ и $\eta=0$, величина $\dot{\phi}$ равна скорости фронта в точке торможения, индексы s и ∞ относятся к значениям величины за фронтом и перед фронтом соответственно. Для используемых безразмерных переменных (1.3) $\rho_\infty=1$, $\rho_\infty=\gamma^{-1} M_\infty^{-2}$, $h_\infty=(\gamma-1)^{-1} M_\infty^{-2}$.

Величины u_∞' , w_∞' зависят от геометрии фронта волны в окрестности точки торможения.

Пусть K_{1s} , K_{2s} — кривизны сечений ударной волны плоскостями $\xi=0$ и $\eta=0$, Δ — отход волны от точки торможения; $\kappa_i=K_{is}(1+K_i\Delta)$, $i=1; 2$.

Можно показать (подробнее см. [12]), что

$$u_\infty' = \kappa_1, \quad u_s' = u_s + (K_1 - \kappa_1) v_s,$$

$$w_\infty' = \kappa_2, \quad w_s' = w_s + (K_2 - \kappa_2) v_s.$$

Если предположить, что поверхности волны и тела эквидистантны в малой окрестности точки торможения, то $K_{is}^{-1} = K_i^{-1} + \Delta$, $i=1; 2$, тогда $\kappa_i = K_i$:

$$(4.5) \quad m u_s = K_1 m + \text{Re}_0^{-1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_s, \quad m w_s = K_2 m + \text{Re}_0^{-1} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_s,$$

$$p_{is} = 2K_i^2 [(v_s - \dot{\phi})^2 \rho_s - (1 + \dot{\phi})^2] - \frac{4}{3} \text{Re}_0^{-1} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial \xi} \right)_s K_i^2, \quad i=1; 2$$

5. Уравнения нестационарного ударного слоя (4.2) с условиями на фронте (4.5) и условиями (4.3) на теле решались численно с использованием итераций на каждом временном слое (см. [12]). Предварительно проводился расчет стационарного режима обтекания, результаты которого использовались в качестве начальных условий для расчета нестационарных эффектов ускорения и торможения тела при $t > 0$. Метод расчета приводил к достаточно быстрой сходимости итераций на каждом временном слое. Точность метода контролировалась сопоставлениями с известными результатами других авторов для стационарного ударного слоя [12].

Расчеты проводились при условиях Ренкина — Гюгонио на ударной волне с использованием предположения об эквидистантности.

Рассмотрим некоторые примеры расчета нестационарного ударного слоя около критической точки тела двойкой кривизны. Обсуждаемые ниже результаты получены при следующих значениях параметров: $K=0,25$, $\text{Pr}=0,71$, $\text{Re}_0=500$, $h_w=0,2$ при $\gamma=1,2$ и $1,4$; $M_\infty=10, 30$. Функция df/dt задавалась в виде

$$df/dt = \alpha^n F(t/\alpha^m) \quad \text{при } 0 \leq t \leq t_1$$

$$df/dt = \alpha^n F(t_1/\alpha^m) \quad \text{при } t_1 \leq t \leq t_2$$

где $F(\tau) = \tau^s$, $\tau = t/\alpha^m$.

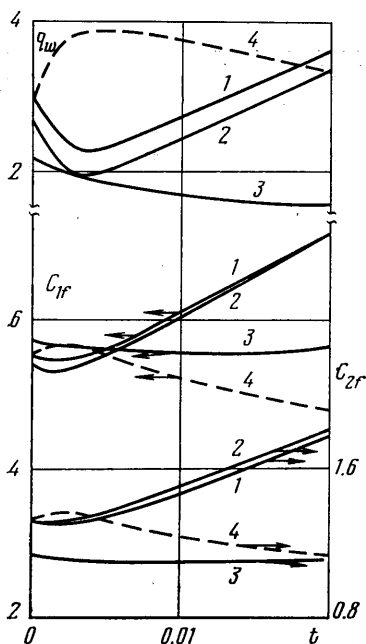
Для режима торможения принималось $df_T/dt = -df/dt$. Результаты расчетов, соответствующие ускорению и торможению, нанесены сплошными линиями и пунктиром соответственно.

Влияние параметров M_∞ , γ на зависимость от времени теплового потока $q_w(t)$ и коэффициентов трения $C_{1f}(t)$, $C_{2f}(t)$ показано на фиг. 1. Безразмерный тепловой поток и коэффициенты трения определялись по формулам

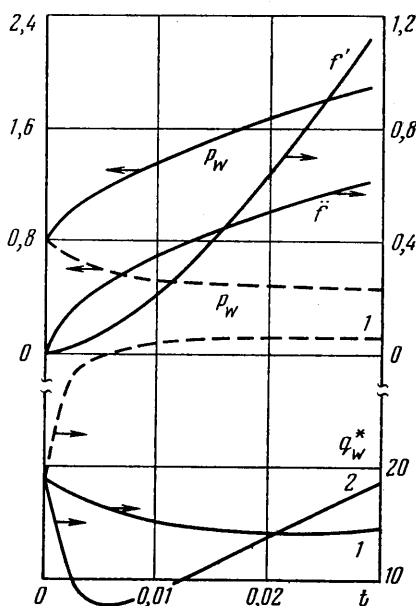
$$q_w = \frac{1}{\rho_\infty' V_\infty'^3} \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial \xi'} \right)_w$$

$$C_{1f} = \frac{1}{\rho_\infty' V_\infty'^2} \left(\mu' \frac{\partial u'}{\partial \xi'} \right)_w, \quad C_{2f} = \frac{1}{\rho_\infty' V_\infty'^2} \left(\mu' \frac{\partial w'}{\partial \xi'} \right)_w$$

Здесь штрих относится к размерным величинам.



Фиг. 1



Фиг. 2

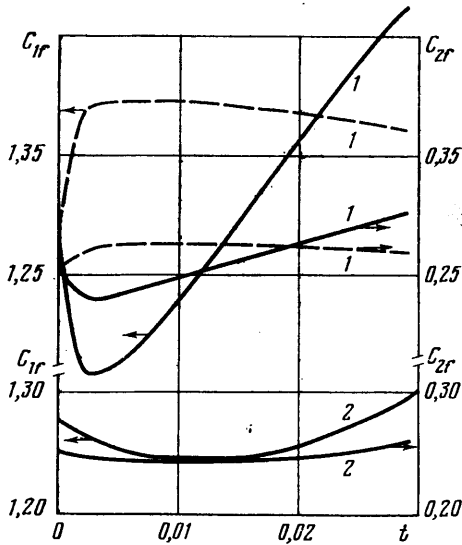
Данные на фиг. 1 соответствуют значениям $s=2, m=0, n=2, t_1=t_2, \alpha^2=(\gamma-1)/(\gamma+1)$. По вертикали отложены величины $10^2 q_w, 10^2 C_{1f}, 10^2 C_{2f}$. Варьируются числа M_∞, γ . Кривые 1, 2, 3 относятся к ускорению со значениями $M_\infty=10, \gamma=1,2; M_\infty=30, \gamma=1,2; M_\infty=10, \gamma=1,4$ соответственно, кривая 4 относится к торможению при $\gamma=1,2, M_\infty=10$.

Кривые 1, 2 указывают на близкий к линейному рост теплового потока и трения при заданном режиме ускорения тела, что согласуется с результатом [5, 6] для нестационарного пограничного слоя, где были рассмотрены другие режимы ускорения. Интересно отметить немонотонную зависимость от γ и M_∞ , иллюстрируемую кривой 3, фиг. 1, которая указывает на уменьшение величин $q_w(t), C_{1f}(t), C_{2f}(t)$ на рассмотренном этапе ускорения.

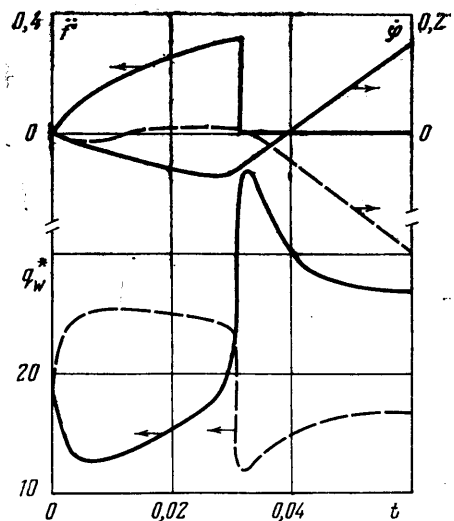
На фиг. 2, 3 показано влияние режима ускорения и торможения тела на трение и тепловой поток при фиксированных величинах M_∞, γ . Результаты относятся к случаю $M_\infty=10, \gamma=1,4, \alpha^2=0,2$. Кривые 1, 2 соответствуют значениям $s=1,5$ и 2 (5.1). Пунктирные кривые показывают зависимости $q_w(t), C_{1f}(t), C_{2f}(t)$ при замедленном движении ($s=1,5$). На фиг. 2 нанесены также зависимости от t давления p_w на теле, скорости $f'=10^2 df/dt$ и ускорения $f=d^2f/dt^2$ движения тела.

На фиг. 4 прослеживаются нестационарные режимы, в которых ускорение тела \dot{f} меняется скачком до нуля в момент времени $t=t_1$ (5.1). Данные расчетов соответствуют значениям $\gamma=1,4, M_\infty=10, n=1, m=0, s=1,5, \alpha=0,2$, что соответствует изменению скорости тела на 20%. Показаны зависимости $f(t), \phi(t)$ и зависимость от времени величины $\sqrt{Re_0} q_w / h_\infty = q_w^*$. Отметим сильное влияние скачкообразного изменения ускорения тела в момент t_1 на тепловой поток. На интервале $t_1 \leq t \leq t_2$ равномерного движения с новой скоростью величина $q_w^*(t)$ выходит на новое стационарное значение. Коэффициенты трения $C_{1f}(t), C_{2f}(t)$ меняются со временем аналогично величине $q_w^*(t)$.

Во всех вариантах расчета нестационарных эффектов наблюдается немонотонная зависимость от времени теплового потока $q_w(t)$ (см. фиг. 1, 2, 4). Так, при ускоренном движении имеется переходный интервал времени, в течение которого $q_w(t)$ уменьшается по сравнению с величиной $q_w(0)$ и, достигнув минимума, начинает расти. Данный эффект обусловлен градиентом давления $\partial p / \partial \xi = \rho d^2 f / dt^2$ (см. (4.2)), который вызывает заметное изменение во времени давления в вязком подслое. Контрольный просчет режимов ускорения тела при $\partial p / \partial \xi = 0$ приводил к монотонному



Фиг. 3



Фиг. 4

росту $q_w(t)$. Интересно отметить аналогию в немонотонном изменении $q_w(t)$ с немонотонным изменением $q_w(x)$ при течении сжатия вязкого газа около вогнутого угла (x — продольная координата). Зависимость $q_w(x)$ получена экспериментально в [16] и теоретическими расчетами в [17]. Имеется аналогия в изменении $q_w(t)$ при скачкообразном уменьшении ускорения тела до нуля (см. фиг. 4) и изменением $q_w(x)$ при вязком обтекании выпуклого угла [17].

Автор благодарит Ю. Д. Шевелева за содержательное обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stuart J. T. Unsteady boundary layers. In: Recent Research on Unsteady Boundary Layers, v. 1. Quebec, 1972, Laval Univ. Press.
2. Riley N. Unsteady laminar boundary layers.—SIAM Rev., 1975, v. 17, No. 2.
3. Кравченко В. И., Шевелев Ю. Д., Щенников В. В. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости около цилиндра, мгновенно приведенного в движение. М., 1974 (Препринт Ин-та пробл. мех. АН СССР, № 37).
4. Кравченко В. И., Шевелев Ю. Д., Щенников В. В. Численное исследование нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в случае различных режимов разгона и торможения обтекаемого тела. М., 1977 (Препринт Ин-та пробл. мех. АН СССР, № 84).
5. Pop I., Katagiri M. Unsteady heat transfer on boundary layer growth at the forward stagnation point. Acta Mechanica, 1978, v. 29, No. 1—4.
6. Kumari M., Nath G. Unsteady laminar compressible boundary-layer flow at a three-dimensional stagnation point. J. Fluid Mech., 1978, v. 87, No. 4.
7. Белоцерковский О. М. и др. Численное исследование современных задач газовой динамики. ВЦ АН СССР. М.: «Наука», 1974.
8. Турчак Л. И. Сверхзвуковое нестационарное обтекание тел при быстром торможении.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1.
9. Джейн, Эйдигоги. Гиперзвуковой слившийся сжатый слой в окрестности критической точки.—Ракетная техника и космонавтика, 1974, т. 12, № 3.
10. Bush W. V. Hypersonic approximation for the shock structures.—J. Mecanique of a perfect gas with the sutherland viscosity law, 1962, v. 1, No. 3.
11. Магомедов К. М. Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.

12. Марков А. А. Асимптотический анализ уравнений Навье — Стокса для трехмерных течений в тонком ударном слое. М., 1979 (Препринт Ин-та пробл. мех. АН СССР, № 124).
13. Bush W. B. On the viscous hypersonic blunt body problem.— J. Fluid Mech., 1964, v. 20, No. 3.
14. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.
15. Лисейкин В. Д., Яненко Н. Н. Метод подвижных координат в газовой динамике.— В сб.: Численные методы механики сплошной среды, т. 7, № 2. Новосибирск, 1976.
16. Ferguson H., Schaefer J. W. Heat transfer and pressure distribution on cone-cylinder-flare configuration with boundary layer separation.— NASA, TN, 1962, D-1436.
17. Rizzetta D. P. Asymptotic solutions of the energy equation for viscous supersonic flow past corners.— J. Phys. Fluids, 1979, v. 22, No. 2.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1979