

МЕТОД СРЕДНЕМАССОВЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАВИХРЕННОМ ПОТОКЕ

Б. А. ЗЕМЛЯНСКИЙ, Г. А. ШМАНЕНКОВА

(Москва)

При обтекании тонких затупленных тел потоком газа с гиперзвуковой скоростью головной скачок уплотнения индуцирует в пристеночной части возмущенной области течения (в высокоэнтропийном слое) большие градиенты энтропии и завихренность [1]. Пограничный слой на теле развивается в существенно неоднородном невязком потоке, в результате чего необходимо учитывать отличие значений параметров газа на внешней границе пограничного слоя от их значений на поверхности тела в невязком потоке. Это вихревое взаимодействие сопровождается обычно ростом напряжения трения и теплового потока на стенке [2, 3]. Можно ожидать, что в трехмерных течениях, где растекание газа на наветренных участках тела приводит к утоньшению высокоэнтропийного слоя, роль вихревого взаимодействия особенно значительна. Первые исследования в этом направлении относились к линиям растекания трехмерного пограничного слоя [4-6].

Предложенный ниже метод расчета теплообмена обобщает подход, реализованный в [5] для линий растекания, и позволяет учесть этот эффект на всей поверхности затупленного тела при его пространственном обтекании как при ламинарном, так и при переходном или турбулентном режиме течения в пограничном слое.

1. В трехмерном пограничном слое влияние вторичных течений на теплообмен во многих важных случаях невелико и им можно пренебречь (холодная стенка, наветренные, наиболее теплонапряженные участки тел) [7]. В этом случае для потенциального внешнего потока пограничный слой вдоль каждой невязкой линии тока на теле развивается независимо и подобен осесимметричному на некотором «эффективном» теле вращения, радиус поперечного сечения которого определяется расхождением невязких линий тока на поверхности исходного тела, т. е. изменением расстояния $h_c \Delta \xi$ между соседними линиями тока $\xi = \text{const}$ (фиг. 1, а). При этом ортогональные к телу поверхности $\xi = \text{const}$ являются поверхностями тока невязкого потока. Это позволяет использовать в трехмерных задачах методы расчета теплообмена, развитые для осесимметричных течений, в частности метод эффективной длины [8].

Завихренность невязкого потока в высокоэнтропийном слое препятствует использованию таких подходов. Дело в том, что пристеночные низконапорные струйки газа отклоняются под действием бокового градиента давления больше внешних высоконапорных. Следовательно, проекции вектора скорости V на поверхность тела образуют пучок прямых (фиг. 1, б) для частиц газа невязкого потока, расположенных на нормали к телу и находящихся на расстоянии от этого тела порядка толщины пограничного слоя. При этом $\xi = \text{const}$ уже не являются поверхностями тока, а эффективное растекание невязкого потока на толщине пограничного слоя отличается от растекания невязких линий тока на теле.

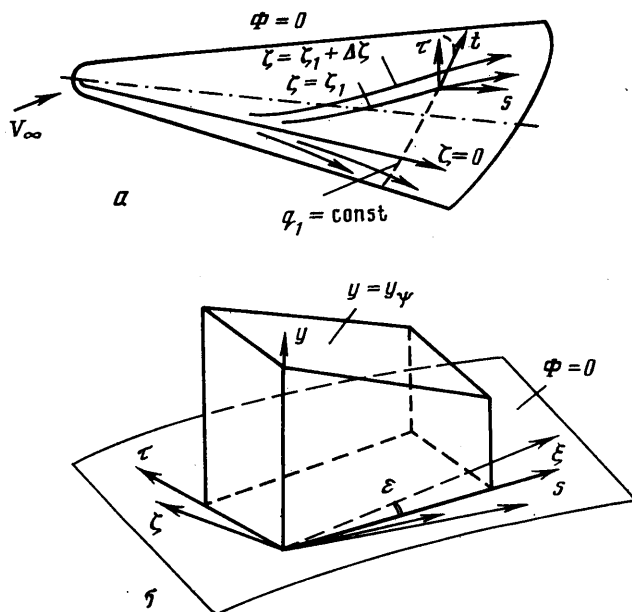
Рассмотрим баланс массы в невязком потоке (параметры с индексом °) для элементарного объема, ограниченного сверху поверхностью тока $y = y_+$ (фиг. 1, б). При этом ортогональная сетка s, τ на теле (коэффициенты Ламе $h_s = 1, h_\tau = h(s, \tau)$) выбирается так, что направление $s (\tau = \text{const})$

в каждой точке этого тела лежит внутри пучка проекций на его поверхность вектора скорости V для точек нормали $0 \leq y \leq y_\psi$. Имеем (ρ — плотность газа, u_s, u_τ — компоненты скорости по осям s, τ)

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{y_\psi} \rho^\circ u_s^\circ h dy + \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{y_\psi} \rho^\circ u_\tau^\circ dy = 0$$

Угол $\varepsilon(y_\psi)$ между координатной линией $\tau = \text{const}$ и невязкой линией тока на теле $\zeta = \text{const}$ выбираем в каждой точке так, чтобы

$$(1.2) \quad \int_0^{y_\psi} \rho^\circ u_\tau^\circ dy = 0$$



Фиг. 1

На основании (1.1) введем эффективную функцию тока ψ для пристеночной зоны ($y < y_\psi$) невязкого трехмерного потока, такую, что

$$(1.3) \quad d\psi = \rho^\circ u_s^\circ h dy$$

Поверхность $\tau = \text{const}$ становится в среднем поверхностью тока для невязкого течения при $y < y_\psi$, а условию (1.2) можно придать вид

$$(1.4) \quad \int_0^{y_\psi} \frac{u_\tau^\circ}{u_s^\circ} d\psi = 0$$

Для заданной поверхности тока y_ψ этим определяется выбор удобной координатной сетки на теле s, τ . Координатные орты e_s, e_τ находим из соотношений

$$(1.5) \quad e_s = e_z \cos \varepsilon - e_\tau \sin \varepsilon, \quad e_\tau = e_z \sin \varepsilon + e_s \cos \varepsilon$$

Здесь e_i — единичный вектор вдоль невязких линий тока на теле, $e_i = e_n \times e_i$ — единичный вектор в ортогональном к ним направлении на теле, e_n — единичный вектор нормали к поверхности тела. Заметим, что

$$u_i^\circ = Ve_i = Ve_i \sin \varepsilon + Ve_i \left(\frac{V}{V} - e_i \right) \cos \varepsilon, \quad u_s^\circ = Ve_s$$

Из (1.4) следует, что при малых ψ угол ε обычно достаточно мал ввиду небольшого отличия векторов V/V и e_i в пристеночной области (на поверхности они совпадают).

2. В дальнейшем выбор координатной сетки s, τ локально будем проводить по расходу ψ_s , поглощаемому пограничным слоем в данной точке. Запишем интегральные уравнения импульса и энергии для пограничного слоя вдоль эффективных линий тока на теле $\tau = \text{const}$, газ предполагается совершенным или равновесно-диссоциирующим. Вторичными течениями в пограничном слое пренебрегаем, т. е. пограничный слой вдоль линии $\tau = \text{const}$ такой же, как на осесимметричном теле с радиусом поперечного сечения $h(s)$. При этом учитываем перенос импульса и энергии через среднемассовые поверхности тока $\tau = \text{const}$ в невязком неоднородном потоке, обусловленный локальным массообменом через эти поверхности. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\psi_0} (u_s^\circ - u_s) d\psi - \int_0^s \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{h} \int_0^{\psi_0} \frac{u_\tau^\circ}{u_s^\circ} u_s^\circ d\psi \right) ds = \\ & = \int_0^s \left(\tau_w + \delta^* \frac{\partial p}{\partial s} \right) h ds \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\int_0^{\psi_0} (H^\circ - H) d\psi - \int_0^s \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{h} \int_0^{\psi_0} \frac{u_\tau^\circ}{u_s^\circ} H^\circ d\psi \right) ds = \int_0^s q_w h ds$$

Здесь H — полная энтальпия, τ_w, q_w — напряжение трения и тепловой поток на стенке, δ^* — толщина вытеснения. Для потенциального изоэнергетического потока ($u_s^\circ = \text{const}, H^\circ = \text{const}$) в силу (1.4) входящие сюда двойные интегралы равны нулю, а для слабо изменяющихся профилей u_s°, H° они малы (к этому классу принадлежит течение в высокоэнтропийном слое, причем здесь $H^\circ = H_\infty = \text{const}$). Пренебрегая ими, получаем, что вдоль эффективных линий тока на теле $\tau = \text{const}$ в рамках интегральных законов сохранения неоднородный невязкий трехмерный поток можно, как и в плоских или осесимметричных течениях, локально заменить однородным потоком со среднемассовыми параметрами (индекс 0)

$$(2.2) \quad V_0 = \frac{1}{\psi_0} \int_0^{\psi_0} u_s^\circ d\psi, \quad H_0 = \frac{1}{\psi_0} \int_0^{\psi_0} H^\circ d\psi$$

При этом для расчета теплообмена и трения можно использовать соотношения, полученные для потенциальных внешних течений, в которых в качестве параметров на внешней границе пограничного слоя берутся среднемассовые параметры [3].

Расход газа через пограничный слой ψ_s и тепловой поток на стенке q_w определяем с помощью метода эффективной длины [3], который дает соот-

ветственно для ламинарного (l) и турбулентного (t) режимов

$$\psi_{\delta l} = f_{\delta l} \xi_l^{0.5}, \quad \psi_{\delta t} = f_{\delta t} \xi_t^{0.8} \quad (f_{\delta l} = 3.3, \quad f_{\delta t} = 0.33)$$

$$(2.3) \quad \xi_j = \int_0^s L_j ds, \quad L_l = \rho_* \mu_* V_0 h^2, \quad L_t = \rho_* V_0 \mu_*^{0.25} h^{1.25} \left(\frac{H_{aj} - i_w}{H_\infty - i_w} \right)^{1.25}$$

$$\rho_* = \rho(p, i_*), \quad \mu_* = \mu(p, i_*), \quad i_* = \frac{1}{2}(i_0 + i_w) + 0.22(H_{aj} - i_0)$$

$$H_{aj} = i_0 + \frac{1}{2} \text{Pr}^{m_l} V_0^2 \quad \left(m_l = \frac{1}{2}, \quad m_t = \frac{1}{3} \right)$$

$$(2.4) \quad q_{wl} = 0.332 \text{Pr}^{-1/2} l_*^{0.5} (\rho_0 V_0)^{0.5} \left(\frac{\mu_0}{x_l} \right)^{0.5} (H_{aj} - i_w)$$

$$q_{wt} = 0.0296 \text{Pr}^{-0.6} K_* (\rho_0 V_0)^{0.8} \left(\frac{\mu_0}{x_t} \right)^{0.2} (H_{aj} - i_w)$$

$$l_* = \frac{\rho_* \mu_*}{\rho_0 \mu_0}, \quad K_* = \left(\frac{\rho_*}{\rho_0} \right)^{0.8} \left(\frac{\mu_*}{\mu_0} \right)^{0.2}, \quad x_j = \xi_j / L_j$$

Здесь Pr — число Прандтля, p — давление, ρ — плотность, μ — вязкость, i — энтальпия, x_j — эффективная длина, индекс w относится к условиям на стенке, индекс 0 относится к среднемассовым параметрам, которые при $H^\circ = H_\infty = \text{const}$, как в рассматриваемой задаче, практически удобнее вводить не по соотношениям (2.2), а следующим образом (оба способа по существу приводят к одинаковым результатам):

$$(2.5) \quad i_0 = \frac{1}{\psi_0} \int_0^{\psi_0} i^\circ d\psi, \quad V_0 = \sqrt{2(H_\infty - i_0)}$$

Возможность перехода пограничного слоя от ламинарного режима к турбулентному учитывается в рамках модели перемещающейся турбулентности. При этом

$$(2.6) \quad q_w = (1 - \Gamma) q_{wl} + \Gamma q_{wt}$$

Здесь Γ — коэффициент перемежаемости, который можно определить на основе работы [9].

Таким образом, остается определить только радиус поперечного сечения эквивалентного осесимметричного тела $h(s)$ для каждой эффективной линии тока $\tau = \text{const}$, не зависящий от свойств пограничного слоя.

3. Получим уравнение для определения $h(s)$. Пусть в произвольной ортогональной системе координат, используемой при проведении расчетов невязкого обтекания тела, q_1, q_2, q_3 уравнение поверхности тела имеет вид $\Phi(q_1, q_2, q_3) = 0$. Эффективные линии тока $q_3 = q_3(q_1, q_2)$ есть интегральные кривые системы (h_i — коэффициенты Ламэ, e_{si} — компоненты вектора e_s (1.5))

$$(3.1) \quad \frac{h_1 dq_1}{e_{s1}} = \frac{h_2 dq_2}{e_{s2}} = \frac{h_3 dq_3}{e_{s3}} = ds$$

Для часто используемых цилиндрической x, φ, r и сферической θ, φ, r систем координат имеем соответственно $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1; h_1 = r, h_2 = r \sin \theta, h_3 = 1$.

Единичная нормаль к телу e_n имеет компоненты

$$(3.2) \quad e_{n1} = \frac{\Phi_{q_1}}{\lambda h_1}, \quad e_{n2} = \frac{\Phi_{q_2}}{\lambda h_2}, \quad e_{n3} = \frac{\Phi_{q_3}}{\lambda h_3}; \quad \Phi_{q_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}$$

$$\lambda = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\Phi_{q_i}}{h_i} \right)^2}$$

Следуя [10], рассмотрим и определим на поверхности тела величины $F = (\partial q_2 / \partial \tau)_{q_1}$, $G = (\partial q_2 / \partial q_1)_{\tau}$. Из (3.1) следует $G = h_1 e_{s2} / h_2 e_{s1}$.

Для определения F введем на поверхности тела $\Phi = 0$ единичный вектор t , лежащий в плоскости $q_1 = \text{const}$. На поверхности $\Phi = 0$ (в векторном виде $r = r(q_1, q_2, q_3)$) имеем

$$d\Phi = \sum_i \Phi_{q_i} dq_i = 0, \quad dr = \sum_i h_i dq_i e_i$$

где e_i — единичные координатные вектора.

Отсюда при $q_1 = \text{const}$ имеем $dq_3 = -dq_2 \Phi_{q_2} / \Phi_{q_3}$ и для компонент t_i вектора $t = dr / |dr|$ с учетом (3.2) находим

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{\lambda_0}, \quad t_3 = -\frac{e_{n2}}{\lambda_0 e_{n3}}, \quad \lambda_0 = \sqrt{1 + \frac{e_{n2}^2}{e_{n3}^2}}$$

Из геометрических соображений получаем

$$\frac{h \Delta \tau}{\cos \nu} = \Delta l = \lambda_0 h_2 \Delta q_2 \quad \cos \nu = t e_t = \frac{e_{s1}}{\lambda_0 e_{n3}}$$

$$\Delta l = \sqrt{h_2 \Delta q_2^2 + h_3 \Delta q_3^2}$$

Таким образом, находим $F = \frac{h}{h_2} \frac{e_{n3}}{e_{s1}}$.

Из равенства $(\partial F / \partial q_1)_{\tau} = (\partial G / \partial \tau)_{q_1}$ получаем аналогично [10] уравнение для определения h

$$(3.3) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \right)_{q_1} + a \left(\frac{\partial f}{\partial q_2} \right)_{q_1} = g, \quad f = \ln F, \quad a = G, \quad g = \left(\frac{\partial a}{\partial q_2} \right)_{q_1}$$

Этому уравнению придадим характеристический вид (характеристикой является эффективная линия тока)

$$(3.4) \quad \frac{df}{ds} = \frac{g e_{s1}}{h_1} \quad \left(\frac{h_1}{e_{s1}} \frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial q_1} + a \frac{\partial}{\partial q_2} \right)$$

Отсюда находим форму эквивалентного осесимметричного тела для рассматриваемой линии $\tau = \text{const}$, где длина s отсчитывается вдоль нее от критической точки

$$h = \text{const} h_2 \frac{e_{s1}}{e_{n3}} \exp \int_0^s g \frac{e_{s1}}{h_1} ds$$

Заметим, что дифференциальное соотношение для ξ_j имеет вид, аналогичный (3.4), а именно

$$(3.5) \quad \frac{d\xi_j}{ds} = L_j$$

4. Таким образом, порядок расчета теплообмена на теле по предлагаемому методу состоит в следующем. Прежде всего численным расчетом определяется поле газодинамических параметров невязкого обтекания тела в узлах координатной сетки

q_1, q_2, q_3 . В узлах q_1, q_2 на теле $\Phi(q_1, q_2, q_3)=0$ восстанавливаем нормаль e_n (3.2) к поверхности и определяем интерполяцией параметры газа на этой нормали в пристеночной зоне.

Тогда, если в узловых точках на теле известны h и ξ_j , дальнейший расчет заключается в определении расхода ψ в невязком потоке на нормали согласно (1.3), расхода через пограничный слой ψ_0 согласно (2.3), среднemasовых параметров (2.5) и, наконец, в расчете q_w по соотношениям (2.4). Что касается расчета $h(s)$ и $\xi_j(s)$, то вид уравнений (3.4), (3.5) позволяет решать их на поверхности тела с помощью единого алгоритма. Используем для этого неявную разностную схему последовательного счета по q_1 [11].

В первом приближении на слое q_1^{n+1} значения среднemasовых параметров i_0, V_0 , расхода ψ_0 и эффективного радиуса h берутся с предыдущего слоя q_1^n . Чтобы осуществить эту схему расчета, на слое q_1^{n+1} необходимо знать параметры в точках на линиях растекания, где $a=0$, но $g>0$. Расчет ведется от линий растекания к линиям стекания, где также $a=0$, но $g<0$. В частности, для линии растекания, находящейся в плоскости симметрии тела ($q_2=0$), имеем с учетом (3.3), (1.5)

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} = \frac{\partial a}{\partial q_2}, \quad a = \frac{h_1 e_{\xi_2}}{h_2 e_{\xi_1}} - \frac{h_1 \varepsilon}{h_2 e_{n_3}}$$

Здесь угол ε (на линии растекания $e_{n_2} \approx e_{\xi_2} - \varepsilon$) определяется при $q_2 \ll 1$ соотношением

$$\varepsilon = e_{\xi_2} - w_0 - e_{n_2} \Omega_0, \quad w_0 = \frac{1}{\psi_0} \int_{\psi_0}^{\psi_0} \frac{u_{q_2}}{u_s} d\psi, \quad \Omega_0 = \frac{1}{\psi_0} \int_{\psi_0}^{\psi_0} \frac{V_n}{u_s} d\psi$$

где u_{q_i} — компоненты скорости по осям q_i .

Отсюда получим

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{ds} = \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{ds} + \frac{\partial w_0}{\partial l} - \Omega_0 \frac{\partial e_{n_2}}{\partial l}, \quad dl \approx h_2 dq_2$$

Заметим, что если перейти к u_{q_2}' — поперечной к линии растекания скорости вдоль поверхности тела, то при $q_2 \ll 1$ с учетом $u_{q_2} - e_{n_3} V_n \approx u_{q_2}' - e_{n_1} e_{n_2} / e_{n_3}$ получаем для $h(s)$ вдоль линии растекания

$$(4.1) \quad \frac{1}{h} \frac{dh}{ds} = \frac{\partial w_0'}{\partial l} + \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{ds} - \frac{e_{n_1}}{e_{n_3}} \frac{\partial e_{n_2}}{\partial l}, \quad w_0' = \frac{1}{\psi_0} \int_{\psi_0}^{\psi_0} \frac{u_{q_2}'}{u_s} d\psi$$

Используя формулу Френе — Серре $dt/dl = -n/R$, где при $q_1 = \text{const}$ внешняя нормаль к телу $n = -t_3 e_2 + t_2 e_3$, найдем радиус кривизны R сечения тела поверхностью $q_1 = \text{const}$ на линии растекания $q_2 = 0$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{e_{n_3}} \frac{\partial e_{n_2}}{\partial l}$$

Таким образом, уравнение (4.1) эквивалентно уравнению

$$(4.2) \quad \frac{1}{h} \frac{dh}{ds} = \frac{\partial w_0'}{\partial l} + \frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{ds} - e_{n_1} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{h_2} \right)$$

Заметим, что $e_{n_3} = e_{s_1}$ при $q_2 = 0$. В частности, в цилиндрической системе координат x, φ, r имеем ($h_2 = r_T(x, \varphi)$)

$$\frac{1}{h} \frac{dh}{ds} = \frac{\partial w_0'}{\partial l} + \frac{1}{R} \frac{dr_T}{ds}$$

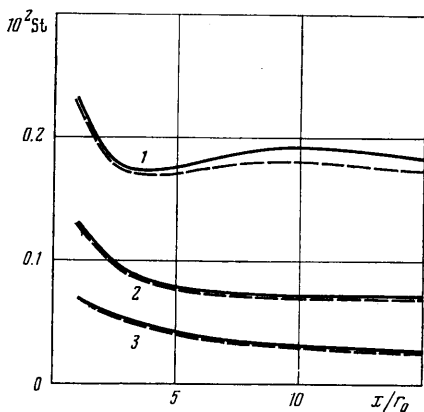
что для тел вращения ($R = r_T$) совпадает с уравнением, использованным в [5].

5. Рассмотрим теплообмен на тонком затупленном по сфере радиуса r_0 круглом конусе, обтекаемом без отрыва сверхзвуковым потоком газа под небольшим углом атаки $\alpha \sim \theta$ (θ — угол полураствора конуса). Ранее показано [2, 5], что при $\alpha = 0$, а также на линиях растекания при $\alpha > 0$ эффекты вихревого взаимодействия для реального воздуха существенно

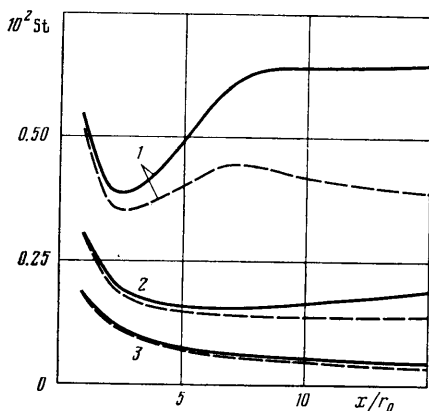
усиливаются с увеличением числа Маха полета M_∞ , что обусловлено ростом вихря на теле за счет увеличения плотности газа в ударном слое за скачком вследствие диссоциации. Прежде всего это относится к турбулентному режиму течения в пограничном слое. Поглощение завихренного невязкого потока пограничным слоем, с одной стороны, приводит к увеличению характерной плотности тока $\rho_* V_0$, т. е. теплового потока $q_{wj} \sim (\rho_* V_0)^{n_j}$, а с другой — к уменьшению эффективного растекания невязкого

потока; к росту эффективной длины x_j и к уменьшению $q_{wj} \sim x_j^{-(1-n_j)}$. Следствием противоположного действия этих факторов является то, что суммарное влияние вихревого взаимодействия значительно больше для турбулентного режима, где преобладает первый эффект. К тому же для турбулентного режима расход ψ_0 через пограничный слой, а с ним и отличие плотности тока $\rho_* V_0$ от ее значения на теле в невязком потоке, больше, чем для ламинарного режима.

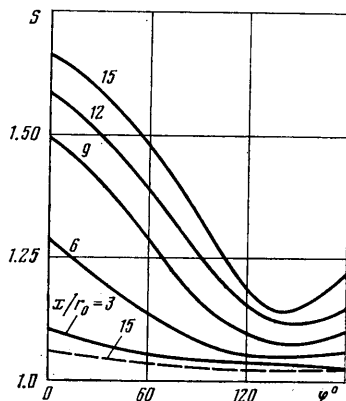
Эти выводы остаются справедливыми и при рассмотрении пространственного распределения тепловых потоков на теле. На фиг. 2–4 пока-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

заны результаты расчетов турбулентного теплообмена на конусе (при $\theta = \alpha = 10^\circ$) в потоке совершенного газа ($M_\infty = 6$, $\gamma = 1.4$, $Re_\infty = \rho_\infty V_\infty r_0 / \mu_\infty = 8.3 \cdot 10^5$, $t_w = 0.7$) и равновесно-диссоциирующего воздуха ($M_\infty \approx 25$, $\rho_\infty = 1.82 \cdot 10^{-3}$ кг·сек²·м⁻⁴, $Re_\infty = 8.8 \cdot 10^5$, $t_w = 0.1$). Здесь $t_w = i_w / H_\infty$ — энтальпийный фактор, индексом ∞ отмечены параметры невозмущенного потока. При расчетах используется цилиндрическая система координат x , φ , r , где x отсчитывается по оси от передней точки тела, φ — от линии растекания. Газодинамические параметры невязкого обтекания получены методом работы [12].

На фиг. 2 ($M_\infty = 6$) и фиг. 3 ($M_\infty \approx 25$) показаны распределения чисел Стантона $St = q_w / \rho_\infty V_\infty (H_\infty - i_w)$ вдоль образующих конуса $\varphi = 0, 90^\circ, 180^\circ$ (соответственно кривые 1–3), сплошными линиями показаны результаты

расчетов по изложенному методу, штриховыми — без учета поглощения завихренного потока, т. е. с использованием в качестве внешних для пограничного слоя параметров их значений в невязком потоке на поверхности тела. На фиг. 4 показано в нескольких сечениях $x/r_0 = \text{const}$ распределение отношения чисел Стантона $S = St/St^\circ$ по меридиональному углу. Значения St° получены без учета вихревого взаимодействия, штриховые кривые — $M_\infty = 6$, сплошные — $M_\infty \approx 25$. Как видно, эффект вихревого взаимодействия проявляется главным образом на наветренной стороне конуса на достаточно большом удалении от носового затупления, обычно за «ложкой» в распределении давления на теле, что соответствует $x/r_0 \geq 0.5(\theta + \alpha \cos \varphi)^{-1}$ [1].

Поступила 4 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
2. Мурзинов И. Н. Ламинарный пограничный слой на затупленных телах с учетом завихренности внешнего потока. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6.
3. Лунев В. В. Метод среднemasсовых величин для пограничного слоя во внешнем потоке с поперечной неоднородностью. Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1.
4. Авдудевский В. С. Влияние кривизны ударной волны на теплообмен при трехмерном обтекании тел сверхзвуковым потоком. В сб.: Исследование теплообмена в потоках жидкости и газа. М., «Машиностроение», 1965.
5. Землянский Б. А. О расчете теплообмена на линиях растекания трехмерного пограничного слоя в неоднородном внешнем потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
6. Бабинов П. Е., Башкин В. А. Расчет ламинарного пограничного слоя на телах большого удлинения с учетом поглощения энтропийного слоя. Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1909.
7. Авдудевский В. С. Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя. Изв. АН СССР. ОТН, Механ. и маш., 1962, № 2.
8. Авдудевский В. С., Галицкий Б. М., Глебов Г. А., Данилов Ю. И., Калинин Э. К., Кошкин В. Н., Кошмаров Ю. А., Михайлова М. М., Михайлова Т. В., Михеев Ю. С., Рыжов Ю. А., Солнцев В. П. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М., «Машиностроение», 1975.
9. Сафиуллин Р. А. Теплообмен в области перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 6.
10. Rakich I. V., Mateer G. G. Calculation of metric coefficients for streamline coordinates. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 11.
11. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М., «Наука», 1975.
12. Антонец А. В. Расчет пространственного сверхзвукового обтекания затупленных тел с изломами образующей с учетом равновесного и замороженного состояния газа в ударном слое. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.