

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ЧИСЛА ПРАНДТЛЯ В АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С ОТСОСОМ

М. А. ГОЛЬДШТИК, С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ, А. М. ЛИФШИЦ

(Новосибирск)

В рамках моногармонической модели решается задача о теплообмене в турбулентном асимптотическом пограничном слое с отсосом. Такое течение является одномерным в среднем, чем и обусловлен выбор его в качестве объекта исследования. Теоретически определенные средние и пульсационные характеристики течения, в частности турбулентное число Прандтля, находятся в согласии с экспериментальными результатами для пограничного слоя.

1. О турбулентном числе Прандтля. При изучении теплообмена в турбулентном течении определение турбулентного числа Прандтля является ключевым моментом, так как после этого тепловые характеристики находятся по динамическим. Казалось бы, при известном поле скорости решение уравнения теплопроводности, которое в такой ситуации становится линейным, не представляет труда. Однако полуэмпирические теории Прандтля, Тэйлора и т. п. не позволяют определять пульсационные характеристики, которые необходимы для решения тепловой задачи в общем виде. Появление корреляционных моментов пульсационных скоростей и температуры в уравнении типа Рейнольдса для средней температуры делает его неопределенным. Задача замыкается путем введения некоторой гипотезы относительно связи этих моментов с параметрами осредненного течения, например гипотезы Буссинеска и его теплового аналога

$$\frac{\tau}{\rho} = \langle v_x v_y \rangle = \nu_t \frac{dU}{dy}, \quad q_t = \langle \theta v_y \rangle = a_t \frac{dT}{dy}$$

где v_x , v_y , θ — пульсации скорости и температуры, U и T — средние продольная скорость и температура, ν_t , a_t — турбулентные вязкость и теплопроводность. Турбулентное число Прандтля вводится как

$$\text{Pr}_t = \frac{\nu_t}{a_t} = \frac{\langle v_x v_y \rangle}{\langle \theta v_y \rangle} \frac{T'}{U'}$$

Вместо эмпирического параметра Pr_t иногда вводят эквивалентную постоянную — коэффициент пропорциональности в формуле для длины пути теплового смешения. Чаще всего предполагается наличие подобия между температурным и динамическим полями, что соответствует значению $\text{Pr}_t = 1$. Однако, как показывает анализ экспериментальных данных, это может выполняться лишь приближенно в небольших областях некоторых простейших течений, например во внешней области турбулентного пограничного слоя при безградиентном обтекании пластины. В плоском случае свободной турбулентности удовлетворительные результаты дает гипотеза Тейлора о равенстве длины пути смешения для температуры и завихренности, но попытка распространить такое предположение на

трехмерный случай не приводит к успеху [1, 2]. Как свидетельствует эксперимент, Rg , вообще не является константой, тем более универсальной. Даже в геометрически подобных потоках его значение зависит от величины молекулярного числа Прандтля, а в течениях, имеющих разную конфигурацию, может различаться на 100% и более, в то время как неправильный выбор Rg , приводит к существенным погрешностям при расчете теплопередачи [3].

В работе П. И. Гешева¹ путем введения одной эмпирической константы — корреляционного масштаба времени — определен закон изменения Rg вблизи стенки.

Существующие к настоящему моменту теории и методики расчетов не в состоянии дать какие-либо обоснованные рекомендации для количественного определения величины Rg , так как в принципе не позволяют находить пульсационные характеристики турбулентного движения. Поэтому представляется полезным дать теоретическую оценку турбулентного числа Прандтля хотя бы с помощью приближенного модельного подхода. Использование в данном случае некоторого вариационного принципа, типа принципа максимальной устойчивости, применение которого позволило теоретически определить константу Кармана (см., например, [4, 5]), не представляется возможным, так как в предположении о пассивности температуры последняя никак не может влиять на устойчивость рассматриваемого течения.

Однако, если даже известны не только средняя, но и точные пульсационные скорости, уравнение теплопроводности, несмотря на линейность, трудно решить для пульсаций температуры из-за их нерегулярности. Поэтому приходится, как и в динамической задаче, прибегать к приближенным проекционным методам [6]. Наиболее простая ситуация возникает при достижении асимптотического режима на проницаемой пластине с равномерно распределенным отсосом. В этом случае трение и тепловой поток на стенке не зависят от механизмов переноса в пограничном слое, а их связи с продольной компонентой скорости и температурой линейны

$$\begin{aligned} \tau_w &= -\rho V U_\infty, & q_w &= -c_p V (T_w - T_\infty), & \tau &= \tau_w \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) \\ q &= q_w \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \end{aligned}$$

Здесь V — скорость отсасывания.

Таким образом, в данном случае аналогия Рейнольдса $St = \frac{1}{2} C_x = \frac{\alpha}{c_p U_\infty} = V/U_\infty$ выполняется при любых значениях физического и турбулентного чисел Прандтля. Это позволяет рассматривать ту или иную модель турбулентных переносов независимо от вычисления осредненных потоков импульса и энергии. Здесь приводятся результаты решения тепловой задачи на фоне развитого закритического (автоколебательного) режима течения в асимптотическом пограничном слое с отсосом на основе моногармонического приближения [6], когда компоненты мгновенной скорости $\{u_x, u_y\}$ и соответственно температуры η аппроксимируются по однородным переменным одной гармоникой вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_x(x, y, t) &= U(y) + I\sqrt{\alpha/2R} [u(y) e^{i\omega} + u^* e^{-i\omega}] \\ u_y(x, y, t) &= -V + I\sqrt{\alpha/2R} [v(y) e^{i\omega} + v^* e^{-i\omega}] \\ \eta(x, y, t) &= T(y) + I\sqrt{\alpha/2R} [\theta(y) e^{i\omega} + \theta^* e^{-i\omega}] \\ \omega &= \alpha(x - Ct) \end{aligned}$$

¹ Гешев П. И. Коэффициенты турбулентного обмена в пристенной турбулентности. Канд. дис. Новосибирск, 1974.

где α — волновое число, C — фазовая скорость волны, I — ее амплитуда. Эти параметры определяются из условия максимальной устойчивости автоколебательного режима при данном числе Рейнольдса R .

В моногармоническом приближении учитывается лишь взаимное влияние возмущенного и среднего движения и в уравнениях не учитываются члены, описывающие взаимодействие пульсаций, т. е. каскадный процесс перетока пульсационной энергии по спектру исключается из рассмотрения [6]. В рамках такого приближения относительно правильно описываются крупномасштабные возмущения, ответственные за генерацию турбулентной энергии, сток которой в этом случае осуществляется на тех же масштабах, и поэтому достаточно правильное описание диссипации энергии достигается лишь в пристенной области, где велики поперечные градиенты средней и пульсационных скоростей.

В ядре течения в силу указанных причин дело обстоит хуже. Однако требуется найти лишь отношение некоторых величин, поэтому можно надеяться, что в нем погрешности приближения скомпенсируются, что и подтверждается приведенными ниже результатами.

Выбор в качестве объекта исследования асимптотического пограничного слоя с отсосом обусловлен независимостью средних величин от продольной координаты, чего нет в обычном пограничном слое.

2. Особенности асимптотического пограничного слоя с отсосом. Асимптотический пограничный слой — установившееся, одномерное в среднем течении над пластиной с равномерным отсосом, которое формируется на некотором расстоянии от ее передней кромки. Это течение обладает рядом интересных особенностей и во многом отличается от обычных течений в пограничном слое без отсоса. В частности, при заданных скоростях набегающего потока U_∞ и отсасывания V величина трения на стенке одинакова для ламинарного и турбулентного режимов. В самом деле, уравнение Рейнольдса в этом случае имеет вид

$$(2.1) \quad \nu U'' + VU' - \tau' = 0$$

Здесь τ — рейнольдсовы напряжения. Интегрируя (2.1) от стенки ($y=0$) до ∞ , имеем $U_w' = -U_\infty V/\nu$, независимо от присутствия τ , поскольку $\tau(0) = \tau(\infty) = 0$. Так как величина трения при турбулизации не меняется, должен уменьшаться расход, т. е. заполненность профиля средней скорости. Отношение $\delta = \nu/V$, являющееся толщиной вытеснения в ламинарном режиме [7], в данной задаче естественно выбрать в качестве характерной длины. В качестве масштаба скорости выбирается U_∞ . Построенное по этим характерным величинам число Рейнольдса $R = U_\infty \delta/\nu = U_\infty/V = A^{-1}$ — чисто кинематическая характеристика. Параметр A используется в литературе как показатель интенсивности отсоса. Универсальные переменные, принятые в теории пограничного слоя, с учетом выбранных масштабов выражаются в виде

$$v_* = \sqrt{U_\infty V} = R^{-1/2} = A^{1/2}; \quad U^+ = U^0/v_* = U\sqrt{R}; \quad y^+ = y^0\delta/\nu = y\sqrt{R}$$

(y^0 — размерная координата, $y = y^0/\delta$ — безразмерная, U^0 и $U = U^0/U_\infty$ — аналогично). Даже в ламинарном случае в этих переменных профили при разных отсосах не приводятся к одному. В этом смысле координаты y и U , обезразмеренные именно по выбранным масштабам δ и U_∞ , являются наиболее удобными. Для ламинарного течения $U = 1 - \exp(-y)$.

Асимптотический пограничный слой имеет жесткий характер потери устойчивости. Моногармонический анализ устойчивости асимптотического пограничного слоя к возмущениям конечной амплитуды дает для нелинейного критического числа Рейнольдса значение $R_* = 4838$, что более чем на порядок отличается как от критического числа Рейнольдса, вычисленного

по линейной теории $R_* = 5.65 \cdot 10^4$, так и от опытных оценок [8] (но уже в другую сторону). Как следствие этого, известные эксперименты по изучению турбулентных асимптотических пограничных слоев проводились при столь больших отсосах, при которых, по моногармонической теории, должна иметь место полная стабилизация ламинарного режима. Такое большое расхождение между теорией и экспериментом можно объяснить двумя причинами. Во-первых, течение Иглиша (переходное течение, существующее на начальном участке пластины до установления асимптотического пограничного слоя [9]) является более неустойчивым, чем асимптотическое [10], поэтому опыты, в которых для проверки устойчивости возмущения вносились на передней кромке пластины, характеризуют устойчивость скорее этого течения, чем асимптотического пограничного слоя. Во-вторых, для установления ламинарного асимптотического режима необходима такая длина начального участка, чтобы выполнялось условие $R_x > 4A^{-2}$ [7].

Очевидно, что для установления турбулентного асимптотического слоя эта величина может увеличиваться весьма значительно, особенно в случае, когда в потоке присутствуют возмущения, по параметрам близкие к нейтральным, так что темпы их эволюции сильно замедлены. В опытах величина R_x не превосходит 10^7 , т. е. просто не может быть уверенности в том, исследуется ли действительно асимптотический режим или некоторый промежуточный, со слабо затухающей турбулентностью. Для экспериментальной реализации турбулентного асимптотического пограничного слоя необходимы малотурбулентный профилированный вход и предвключенный участок с повышенным переменным отсосом, постепенно выходящим на заданный уровень.

3. Теплообмен в асимптотическом пограничном слое. Температурное поле $\eta(x, y, t)$ описывается уравнением

$$(3.1) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} + v \nabla \eta = \frac{1}{R \text{Pr}} \Delta \eta$$

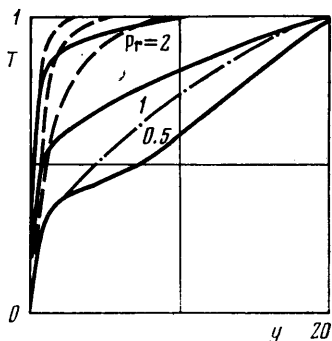
Температура и скорость, которая считается известной, представлены в виде (1.1). На стенке при $y=0$ ставятся условия отсутствия пульсаций, вдали от стенки — условие их затухания. Тогда, проектируя уравнение (3.1) на первую и нулевую гармоники, придем к задаче

$$\begin{aligned} \phi'' + \text{Pr} \phi' - [i\alpha R \text{Pr} (U - C) + \alpha^2] \phi - R \text{Pr} T' v &= 0 \\ T'' + \text{Pr} T' - \text{Pr} I^2 (\phi_r v_r + \phi_i v_i)' &= 0 \\ (3.2) \quad T = \phi = 0 \quad (y=0), \quad T = 1, \quad \phi' + p\phi = 0 \quad (y=y_k) \\ p = \frac{1}{2} \text{Pr} + \kappa + ib / (2\kappa), \quad \kappa = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ a = \alpha^2 + \frac{1}{4} \text{Pr}^2, \quad b = \alpha R \text{Pr} (1 - C) \end{aligned}$$

Индексы r и i означают действительную и мнимую части комплексной величины. Условия для пульсаций температуры на внешней границе при $y=y_k$ формально получаются после исключения константы интегрирования из решения первого уравнения системы (3.2) при $U=1$, $T'=0$.

Сравним уравнение для средней температуры с уравнением Рейнольдса (2.1), учитывая, что из (1.1) следует $\tau = I^2/R (u_r v_r + u_i v_i)$. В ламинарном

режиме $T=1-\exp(-Pr y)$. Если $Pr=1$, то для ламинарного режима поля T и U подобны. Для подобия средних скорости и температуры в турбулентном режиме требуется совпадение профилей пульсаций продольной скорости и температуры. Однако различаются как сами уравнения для этих величин (в уравнении для $u(y)$ присутствует дополнительный член,



Фиг. 1

описывающий пульсации давления), так и условия их затухания на внешней границе слоя, так что ожидать полного подобия не приходится.

Пусть динамические характеристики соответствуют максимально устойчивому режиму, когда $R=5.65 \cdot 10^4$ — критическое по линейной теории значение, при этом $\alpha=0.0078$, $C=0.43$ и интенсивность возмущений, определенная как интеграл пульсационной энергии, $J=0.008$.

Система (3.2) решалась численно разностной прогонкой на составной сетке с крупными и мелкими равномерными шагами во внешней и пристенной зонах соответственно. Ширина пристенного участка выбиралась в 3–2,5 раза больше, чем расстояние от стенки до критической точки y_c , где $U(y_c)=C$. Общая длина интервала интегрирования y_k должна быть достаточно большой, чтобы увеличение y_k не приводило к изменению результатов, т. е. не меньше толщины пограничного слоя. В точке стыковки записывались четырехточечные разностные аналоги производных, чтобы выдержать второй порядок точности разностной аппроксимации. Такая же сетка использовалась при решении динамической задачи, что позволило без потери точности, увеличения памяти и общего времени счета на ЭВМ проводить расчеты в широком диапазоне чисел Рейнольдса и волновых параметров α и C .

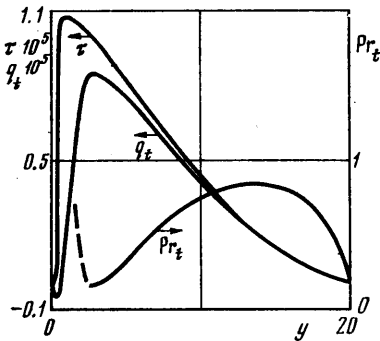
Полученные распределения средней температуры при различных числах Прандтля представлены на фиг. 1. Там же для сравнения пунктиром нанесены графики температуры ламинарных течений при тех же значениях Pr и штрихпунктиром — график средней скорости автоколебательного режима. Интегрируя уравнение для средней температуры от 0 до ∞ , получим на стенке $T_w' = Pr$. Это весьма наглядно иллюстрируют и фигуры: средние профили как температур, так и скорости в пристенной зоне совпадают с ламинарными при тех же условиях. Число Нуссельта, определяемое как безразмерная производная от средней температуры на стенке при выбранных масштабах, будет $Nu = T_w' = Pr$, а число Стэнтона $St = Nu / (Pr R) = R^{-1} = A$. Последнее не только согласуется с экспериментом, но и служит в опытах критерием того, что рассматриваемый режим действительно является асимптотическим [11].

Графики распределения поперек слоя реинольдсовых напряжений τ , турбулентных потока тепла q_t и числа Прандтля Pr_t при $Pr=1$ представлены на фиг. 2. Нерегулярность Pr_t вблизи стенки обусловлена знакопеременностью q_t в этой области. Интересно, что положение точки смены знака q_t совпадает с началом логарифмического участка на профиле средней скорости, который приведен на фиг. 3. Здесь сплошной кривой показана осредненная скорость в турбулентном режиме, пунктиром — в ламинарном; штрихпунктиром нанесен турбулентный поток тепла. Если переход Pr_t в пристенной зоне через бесконечность не подтвердится экспериментально (данные по измерению для асимптотического пограничного слоя в настоящее время отсутствуют), то аппроксимацию тепловых пульсаций бегущей волной в этой области следует считать слишком упрощенной. Максимальное значение турбулентного числа Прандтля, а также его характер

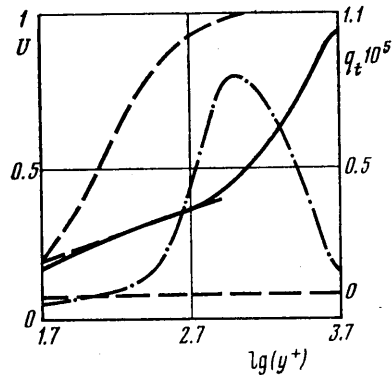
изменения во внешней части пограничного слоя хорошо согласуется с данными прямых измерений в пограничном слое на непроницаемой поверхности [3]. В области чисел Прандтля, мало отличных от единицы, имеется слабая зависимость турбулентного числа Прандтля от молекулярного, представление о чем дают данные, приведенные ниже:

| | | | |
|-----------------|------|------|------|
| Pr | 0.5 | 1 | 2 |
| Pr _t | 0.91 | 0.86 | 0.83 |

Здесь Pr_t — максимальные значения во внешней области слоя. Такой же характер зависимости Pr_t от Pr наблюдается экспериментально при



Фиг. 2



Фиг. 3

обтекании пластины слабо возмущенным потоком [3], что в рассматриваемом случае как раз соответствует условию затухания пульсаций вдали от стенки.

Во внутренней турбулентной зоне асимптотического пограничного слоя данная модель обнаруживает существенное неподобие переносов импульса и тепла, причем турбулентное число Прандтля в этой зоне снижается по мере приближения к стенке. Очевидно, что этот новый эффект следовало бы проверить экспериментально.

Поступила 20 IX 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С. С. Пристенная турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1973.
2. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
3. Жукаускас А. А., Шланчяускас А. А. Теплоотдача в турбулентном потоке жидкости. Вильнюс, «Минтис», 1973.
4. Гольдштик М. А. Принцип максимальной устойчивости осредненных турбулентных течений. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, вып. 5.
5. Гольдштик М. А., Кутателадзе С. С. Вычисление константы пристенной турбулентности. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 3.
6. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск, «Наука», 1977.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
8. Simpson R. I., Kays W. M., Moffat R. Y. The turbulent boundary layer on a porous plate: an Experimental study of the Dynamics with Injection and Suction. Rep. No. 8, HMT-2, Stanford, California, 1967, 173.
9. Iglisch R. Exact calculation of the laminar boundary layer in longitudinal flow over a flat plate with homogeneous suction. NACA Techn. Mem., 1949, No. 1205.
10. Ulrich A. Theoretical investigation of drag reduction in maintaining the laminar boundary layer by suction. NACA, Techn. mem., 1947, No. 1121.
11. Moffat R. J., Kays W. M. The turbulent boundary layer on a porous plate. Experimental heat transfer with uniform blowing and suction. Int. J. Heat and Mass Transfer, 1968, vol. 11, No. 10.