Опуская промежуточные выкладки, запишем эту систему уравнений

$$\frac{dM}{d\varphi}\cos\alpha+[M\sin\alpha-V_1]\frac{d\alpha}{d\varphi}-M\sin\alpha=B_1$$

(15)

$$\frac{2}{\gamma+1}[V_1-m_1M\sin\alpha]n_1\frac{dM}{d\varphi}-\frac{2}{\gamma+1}\frac{a}{a_1}\frac{M^2-1}{M}\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\varphi}=C_1$$

$$B_1=\left[\frac{dV_1}{d\varphi}\operatorname{ctg}\varphi-V_1\right]\sin^2\varphi+\left[U_1\operatorname{tg}\varphi-\frac{dU_1}{d\varphi}\right]\cos^2\varphi-\frac{M}{a_1}\cos\alpha\frac{da_1}{d\varphi}$$

$$C_1=\frac{1}{\gamma P_1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\sin\alpha-V_1+\frac{a}{a_1}\sin\alpha\right)\frac{a}{a_1}\frac{dP_1}{d\varphi}-$$

$$-\frac{a}{a_1}\left(\frac{dV_1}{d\varphi}-\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{Ma_1}\frac{da_1}{d\varphi}\right)-\left(V_1-\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\sin\alpha\right)\times$$

$$\times\left(\frac{dU_1}{d\varphi}\cos\alpha-\frac{dV_1}{d\varphi}\sin\alpha+\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{Ma_1}\frac{da_1}{d\varphi}-V_1\cos\alpha-U_1\sin\alpha\right)-$$

$$-\frac{a}{a_1}[iU_1+(i-1)V_1\operatorname{ctg}\varphi]-\frac{2}{\gamma+1}\frac{a}{a_1}\frac{M^2-1}{M}[i\cos\alpha-(i-1)\operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha]$$

$$m_1=\frac{1}{n_1}\left[\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2+1}{M^2}n_1+2\frac{\rho_1}{\rho}+\frac{a}{a_1}\frac{M^2+1}{M^3}\right]$$

$$n_1=2M\frac{P_1}{P}\frac{a}{a_1}+\frac{M^2+1}{M^2};\quad U_1=\frac{v_{r1}}{a_1},\quad V_1=\frac{v_{\varphi1}}{a_1}$$

В этих соотношениях α – угол между нормалью к фронту ударной волны и радиус-вектором r в полярной системе координат r, φ; $v_{r1}=v_{r1}(\varphi)$ и $v_{\varphi1}=v_{\varphi1}(\varphi)$ – составляющие скорости газа по осям r и φ соответственно. Все другие обозначения те же, что и выше. Укажем также, что формула (1) в данном случае примет вид

$$R=\frac{r_*}{t}=\frac{a_1M}{\cos\alpha}+v_{r1}-v_{\varphi1}\operatorname{tg}\alpha \tag{16}$$

После определения M и α из (15) величина радиус-вектора фронта ударной волны находится из (16).

Очевидно, что изложенным выше путем можно получить систему уравнений, описывающую движение фронта ударной волны и в трехмерном случае.

Автор благодарен М. Д. Герасимову за внимание и помощь в работе.

Поступила 4 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Whitham G.* A note on shock dynamics relative to a moving frame. J. Fluid Mech., 1968, vol. 31, No. 3.

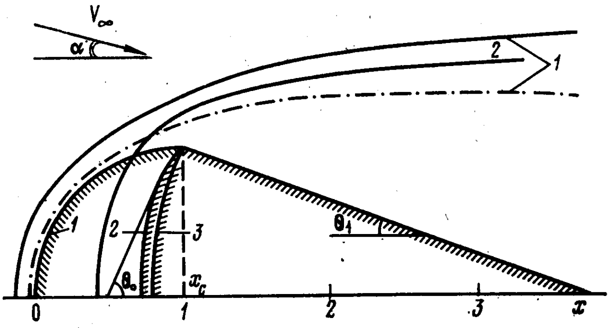
УДК 533.69.048.2.011.5:532.582.3

О РАСЧЕТЕ ДАВЛЕНИЯ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЕГМЕНТАЛЬНО-КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

А. В. АНТОНЕЦ, В. П. МАРИНИН

(Москва)

Результаты исследований невязкого обтекания обратных конусов с сегментальным затуплением впервые в отечественной литературе были опубликованы в [1–4]. В данной работе получено численное решение этой задачи по усовершенствованным алгоритмам [5, 6], хорошо апробированным ранее в задачах внешнего обтекания поверхностей с положительными углами наклона к набегающему потоку. Показано влияние на изучаемые распределения давления числа Маха $2\leqslant M_\infty\leqslant\infty$, равновесных и неравновесных физико-химических превращений в воздухе ($H=60$ *км*; $V_\infty=7.4$ *км/сек*, $R_0=1$ *м*) и угла атаки $0\leqslant\alpha\leqslant40°$. Проведенное сравнение результа-



Фиг. 1

тов расчетов и дренажных экспериментов при $M_\infty=6$, $\alpha=0\div25°$ подтверждает расширенную область применимости разработанных численных методов. Предложена также простая корреляция зависимости от числа Маха $1.5\leqslant M_\infty\leqslant\infty$ формы ударной волны около сферы в потоке совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma=1.4$.

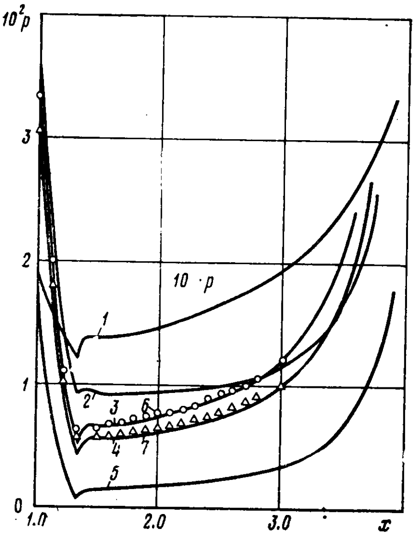
1. Развитие метода последовательного счета. Известно, что значительные градиенты газодинамических функций, вызванные разрывами наклонов или кривизны в точках стыковки лобового сегмента с боковой поверхностью, определяют повышенные требования к обеспечению вычислительной устойчивости расчетных методов. Несмотря на возникающие трудности, представляется целесообразной дальнейшая универсализация программ для ЭВМ [5, 6], которые позволяют рассчитывать параметры невязких течений в сверхзвуковой области между поверхностью тела и головной ударной волной с учетом равновесных и неравновесных физико-химических процессов, протекающих в воздухе при высоких температурах. Реализованные в этих программах алгоритмы основаны на «сеточно-интегральной» модификации маршевого метода сеток [7]. Систематизированную информацию о других численных методах можно найти, например, в реферативном обзоре [8]. Улучшение надежности и устойчивости конструируемых алгоритмов, вообще говоря, гарантируется проведением аппроксимаций производных вдоль естественных направлений и прямым учетом точных интегральных свойств течений газа. Ряд методических ограничений [7], не связанных с условиями корректности физической постановки задачи, снимается усовершенствованием так называемой «обратной» прогонки. Согласно развиваемой здесь схеме последовательного счета, из «обратной» прогонки берется только давление. Модифицированная формула для его расчета записывается в виде

$$P_m=P_m^{\text{ł}}+\tau[g_{m+1}-(\mu^{m+1}, X_{m+1})]$$

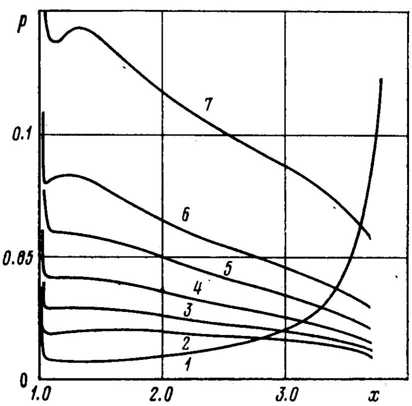
где $P_m^{\text{ł}}=Q_0+(Q, X_{m+1})$ – обычная формула «обратной» прогонки в сторону уменьшения индекса m; $(\mu^{m+1}, X_{m+1})=g_{m+1}$ – известное прогоночное соотношение, не зависящее от погрешностей в вычисленных компонентах вектора искомых функций (проекции скорости и давление) в верхнем узле $X_{m+1}=\{u, v, w, p\}_{m+1}$. Устойчивость вычислений (ослабление зависимости расчетной формулы от значений величин в верхнем узле) обеспечивается подбором параметра τ из условия минимизации суммы квадратов коэффициентов перед компонентами вектора X_{m+1}.

Энтальпия вычисляется через давление по степенной функции, связывающей значения параметров в двух точках на концах отрезка линии тока. Как положительный факт можно отметить совпадение этой функции с точной адиабатой в течениях совершенного газа. Для определения проекций скорости осуществляется комбинированное (с привлечением прогоночного соотношения и интеграла Бернулли) интегрирование уравнений движения вдоль отрезка линии тока, выпускаемой назад из текущего узла. Релаксационные уравнения для концентраций компонент смеси газов, если учитывается неравновесность физико-химических превращений, также интегрируются вдоль линий тока по неявной схеме. Решение получающихся нелинейных систем конечно-разностных уравнений находится методом Ньютона с локальной линеаризацией около значений концентраций из предыдущей итерации и использованием численного дифференцирования.

2. Результаты расчетов и экспериментов. Ради бóльшей компактности исследования проанализируем только распределения давления на обратном конусе с углом полураствора $\theta_1=-20°$. Варианты затупленных носков с одинаковым радиусом миделя R_m изображены на фиг. 1. Сферические носки 1, 3 характеризуются углами $\theta_0=0$ и 65° между осью симметрии и касательной к затуплению в точке его стыковки с образующей конуса. Вариант 2 отличается от варианта 3 проведенным скруглением угловой точки от $\theta_0=65°$ до $\theta_0=40°$. На этой фигуре для конфигураций *1* и *2* показаны также следы рассчитанных ударных волн на наветренной стороне тела при угле атаки $\alpha=20°$. Сплошные и штрихпунктирная линии отвечают, соответственно, режимам течения совершенного газа ($M_\infty=6$, $\gamma=1.4$) и равновесно-диссоциирующего воздуха (полет в атмосфере на высоте $H=60$ *км* со скоростью $V_\infty=7.4$ *км/сек*). Известно, что в цилиндрических координатах (x, φ, r), где x и r направлены вдоль и по нормали к вектору скорости $\mathbf{V}_\infty$, форма ударной волны около затуплений осесимметричной формы близка к осесимметричной. Для



Фиг. 2



Фиг. 3

аппроксимаций меридиональных контуров скачка можно предложить формулу

$$r=r_k\left[\frac{x+\varepsilon_0}{x_k+\varepsilon_0}\right]^\lambda, \quad \frac{dr}{dx}=\lambda\frac{r}{x+\varepsilon_0}, \quad -\varepsilon_0\leqslant x\leqslant x_k$$

При обтекании сферы совершенным газом с показателем адиабаты $\gamma=1.4$ зависимости отхода $\varepsilon_0[R_0]$ в критической точке сферы радиуса R_0, координаты $r_k[R_0]$ и показателя степени λ от числа Маха M_∞, например, достаточно точно аппроксимируются следующими выражениями:

$$\varepsilon_0\approx0.129+(0.15836+0.32864\cdot t)t^2;$$

$$r_k|_{x=x_k=0.4}\approx1.095+(0.3731+1.3019\cdot t)t^2, \quad \lambda\approx0.46+0.123\,t^2, \quad 0\leqslant t=1.5/M_\infty\leqslant1$$

Для тестовых сравнений с данными [9] были проведены расчеты обтекания обратного конуса, гладко сопрягаемого со сферическим затуплением ($\theta_0=\theta_1=-20°$). Типичные распределения давления $P[\rho_\infty V_\infty^2]$ по контуру тела от координаты $x[R_m=R_0]$, отсчитываемой от передней точки вдоль оси конуса, построены при нулевом угле атаки на фиг. 2. Стабильность расчетных результатов проверена при варьировании числа сеточных интервалов $G=10$, 20, 40 между поверхностью тела и ударной волной. Кривыми *1*, *3*, *4* показаны распределения для совершенного газа с параметрами: $\gamma=1.4$ и $M_\infty=2$, 10, ∞. Чтобы избежать нежелательного растяжения фиг. 2, на оси ординат для кривой *1* вместо давления отложена величина $10\cdot P$. Результаты [9], одноименные вариантам *3* и *4*, обозначены точками *6* и *7*. Удовлетворительное согласование сравниваемых распределений давления ухудшается в окрестности точки сопряжения $x_c=1.342$. Правильность прорисовки угловых точек при $x=x_c$ проверим вычислениями в них градиентов давления на теле по двум точным дифференциальным соотношениям. Первое выражает собой равенство производных по направлению касательной к разрывной характеристике [10] у двух сращиваемых решений около сферы $P_0(x, r)$ и конуса $P_1(x, r)$:

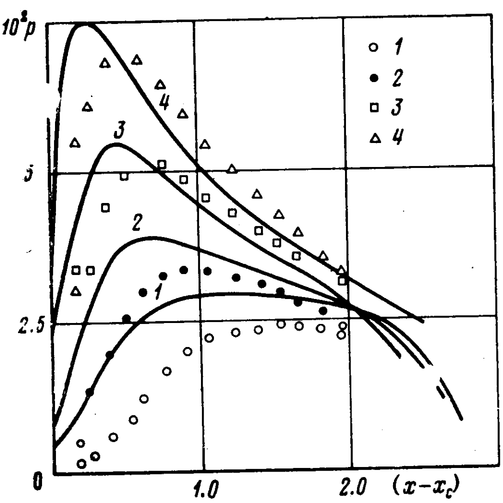
$$\frac{dP_1}{dx}=\frac{dP_0}{dx}+\frac{\rho_0V_0^2}{\cos\theta_0\sqrt{M_0^2-1}}$$

Здесь $\rho_0[\rho_\infty]$, $V_0[V_\infty]$, M_0 – плотность, скорость и число Маха потока на теле в точке $x=x_c$.

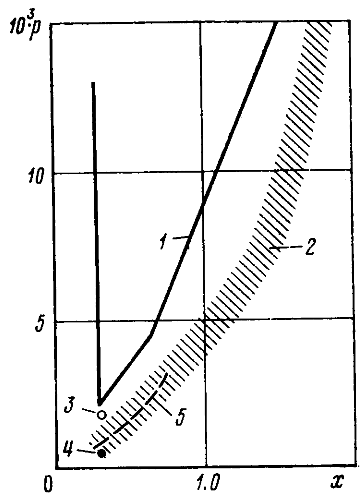
Второе вытекает из уравнений движения, записанных в координатах (s, n) – по касательной и нормали к контуру тела в точке сопряжения, и дает связь между производными dP/dx и $\partial V_n/\partial n$ в любом гладком решении (V_n – компонента скорости вдоль оси n; линейные размеры, как и выше, относятся к радиусу сферы R_0):

$$\frac{dP}{dx}=-\frac{\rho_0 V_0 (V_0 \operatorname{tg}\theta_0+\partial V_n/\partial n)}{\cos\theta_0 (M_0^2-1)}$$

Вычисляя dV_n/dn разностным отношением для табличного варианта 6 (фиг. 2), получим отсюда $\partial P_0/\partial x\approx-0.0236$, тогда из предыдущего соотношения следует $dP_1/dx\approx0.015$. Рассчитанные таким способом значения градиентов давления соот-



Фиг. 4



Фиг. 5

ветствуют прорисовке угловой точки на расчетной кривой *3*. Возможно, что шаг Δx таблиц [9] около точки сопряжения сферы с конусом недостаточно мал для точного вычисления градиента dP_1/dx по конечно-разностным отношениям.

Влияние равновесных и неравновесных физико-химических превращений в воздухе ($H=60$ *км*, $V_\infty=7.4$ *км/сек*, $R_0=1$ *м*) демонстрируют кривые 2 и 5. Видно, что зависимость от режимов течения в области малых давлений ($P\lesssim0.01$ $[\rho_\infty V_\infty^2]$) на обратных конусах сильнее, чем на телах с положительными местными углами атаки [6]. Так, в точке сопряжения давление для равновесного (кривая *2*) режима течения примерно в два раза больше, а для неравновесного (кривая *5*) – в семь раз меньше, чем в той же точке на кривой 4 для совершенного газа. Качественно эти результаты согласуются с выводами [11] о влиянии режимов течения (или замороженного показателя адиабаты) на давление в волне Прандтля – Майера. Средний градиент dP/dx на образующей обратного конуса, оставаясь малой положительной величиной ~0.001, уменьшается для последовательности вариантов 4, 5, 2.

Параметры течения рассчитываются маршевым методом вплоть до острия обратного конуса. Однако резкое возрастание положительных градиентов давления при $x\gtrsim3$ должно приводить на самом деле к перестроению течения с появлением отрыва потока.

Для не равных нулю углов атаки градиент давления на наветренной образующей конуса становится отрицательным. Иллюстрация этого факта дается на фиг. 3 для обратного конуса с полусферическим носком ($\theta_0=0$, $\theta_1=-20°$). Рассматривается обтекание совершенным газом с параметрами: $M_\infty=6$, $\gamma=1.4$; $\alpha=0$, 10, 15, 20, 25, 30 40° (кривые 1–7).

Отметим, что по стандартной методике отрицательные изломы образующей проходят при последовательном счете со скруглением излома по параболе на малом интервале $\Delta x\sim0.01$ и с одновременным выделением областей гладкости решения перед и за изломом. Разрывы градиентов dP/dx в точке стыковки носка с образующей конуса на графиках фиг. 3 несколько сглажены из-за более грубого масштаба по оси ординат, чем на фиг. 2.

Сравнение расчетных и экспериментальных распределений давления проведено для обратного конуса с сегментальным носком ($\theta_0=65°$, $\theta_1=-20°$). Дренажный эксперимент проведен для условий обтекания конуса совершенным газом с параметрами: $M_\infty=6$; $\gamma=1.4$; $\alpha=0$, 10, 15, 20, 25° и числа Рейнольдса (по параметрам набегающего потока и радиусу миделя модели) $\mathrm{Re}_\infty \sim 5\cdot10^5-10^6$, стенка — теплоизолированная. Исследовалось обтекание модели с острой угловой точкой (вариант 3 на фиг. 1). Расчетные результаты получены для формы тела со скругленной угловой точкой (вариант 2 на фиг. 1). Необходимые для реализации последовательного счета начальные данные на стартовой «сверхзвуковой» плоскости около затупления рассчитывались методом установления [12]. Сравнение вычисленных (сплошные линии) и измеренных (точки) величин давления для углов атаки $\alpha=10$, 15, 20, 25° (варианты 1–4) показано на фиг. 4, а для нулевого угла атаки – на фиг. 5. При малых углах атаки $\alpha \leqslant 15°$ расчет заметно, но не нарушая совпадения общего вида кривых, завышает давление на всей образующей конуса. Согласование сравниваемых распределений давления улучшается с увеличением углов атаки. В среднем отличия остаются порядка +20% – –10%.

Чтобы уменьшить методические погрешности, проверялась внутренняя сходимость метода при увеличении числа точек конечно-разностной сетки. Результаты расчетов с 60, 70, 80 сеточными интервалами от тела до ударной волны уже не отличаются от сплошной кривой 1 на фиг. 5. Расслоение расчетных и экспериментальных данных 1 и 2 на фиг. 5 надо, по-видимому, объяснять различием угловых кромок у рассматриваемых моделей тел 2 и 3, изображенных на фиг. 1. Один из аргументов состоит в том, что с переходом от прямых к обратным конусам влияние малых возмущений начальных данных около угловой точки распространяется вниз по потоку по характеристикам второго семейства на все расширяющуюся часть пристеночного течения около конуса. Кроме того, в звуковой точке на скруглении излома угол наклона касательной к контуру тела удовлетворяет неравенству $\theta_*<\theta_0$, поэтому поток разворачивается на меньший угол $\Delta\theta=\theta_*-\theta_1$, чем в звуковой точке, в которой имеет место равенство $\theta_*=\theta_0$. Значения давлений, отвечающие этим двум разворотам в волне Прандтля – Майера, отмечены на фиг. 5 точками 3 и 4. Штриховой кривой *5* нанесено рассчитанное давление на примыкающей к скруглению части образующей обратного конуса с углом полураствора $\theta_k=-27°$, близким к вычисляемому из равенства разворотов вокруг скругленной и острой кромки $\theta_*-\theta_k=\theta_0-\theta_1=85°$.

Полученное совпадение распределений 2 и 5 подтверждает возможность правильного определения малых уровней давления на боковой поверхности сегментально-конических тел в рамках идеализации невязкого обтекания.

Поступила 15 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миносцев В. Б., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П.* Исследование картины сверхзвукового пространственного обтекания тела сегментальной формы. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 2.
2. *Кацкова О. Н., Чушкин П. И.* Влияние неравновесной диссоциации на сверхзвуковое пространственное обтекание обратных конусов. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.
3. *Землянский Б. А.* О гиперзвуковом обтекании сегментально-конических тел под большим углом атаки. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 3.
4. *Белоцерковский О. М., Головачев Ю. П., Грудницкий В. Г. и др.* Численное исследование современных задач газовой динамики. М., «Наука», 1974.
5. *Антонец А. В.* Расчет пространственного сверхзвукового обтекания затупленных тел с изломами образующей с учетом равновесного и замороженного состояния газа в ударном слое. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.
6. *Антонец А. В.* Гиперзвуковое обтекание затупленных тел неравновесным потоком воздуха. Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 2.
7. *Бабенко К. И., Воскресенский Г. П.* Численный метод расчета пространственного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
8. *Воскресенский Г. П., Чушкин П. И.* Численные методы решения задач сверхзвукового обтекания тел, т. 11, М., 1978 (ВИНИТИ, Итоги науки и техники).
9. *Дьяконов Ю. Н., Пчелкина Л. В. Сандомирская И. Д.* Сверхзвуковое обтекание затупленных тел. Изд-во МГУ, 1971.
10. *Миносцев В. Б.* О градиенте давления в точке излома или разрыва кривизны контура затупленных конусов и клиньев, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.

11. *Лунев В. В.* Гиперзвуковая аэродинамика. М., «Машиностроение», 1975.
12. *Никулин А. Н.* Расчет неравновесного обтекания затупленных тел методом установления. Тр. XX Научн. конф. Моск. физ.-техн. ин-та, 1974. Сер. Аэрофиз. и прикл. матем., ч. 1. Долгопрудный, 1975.

УДК 533.6.011.55 : 541.124

НЕРАВНОВЕСНАЯ ИОНИЗАЦИЯ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ УГЛЕКИСЛЫМ ГАЗОМ

Ю. П. ГОЛОВАЧЕВ

(Ленинград)

Рассматривается неравновесная ионизация в ударном слое при обтекании сферически затупленных конусов углекислым газом со скоростью 4–7 *км/сек* при плотности набегающего потока $10^{-8}-10^{-5}$ *г/см*^{3}. Исследуется влияние примесей азота и натрия на концентрацию электронов.

1. В рассматриваемых условиях степень ионизации достаточно мала, так что можно пренебречь влиянием заряженных частиц на распределении газодинамических функций и концентраций нейтральных компонент. Эти данные заимствуются из [1], где они вычислены на основе уравнений Навье – Стокса с учетом неравновесных химических реакций и колебательной релаксации молекул CO_2. Предполагается квазинейтральность смеси во всем ударном слое, за исключением пристеночной области, где учитывается образование пространственного заряда. Диффузионные свойства всех ионов и всех нейтралов считаются одинаковыми. Амбиполярная диффузия описывается с помощью постоянного эффективного числа Шмидта. В рассматриваемых условиях ионизация происходит главным образом за счет энергии тяжелых частиц. При этом высокая эффективность обмена энергией между электронами и молекулами позволяет пренебречь различием температур электронов и тяжелых частиц [2]. Справедливость этого предположения подтверждается и экспериментальными данными [3].

Определение концентрации заряженных частиц при указанных предположениях сводится к решению системы уравнений неразрывности для ионов. В этих уравнениях учитывается только нормальная составляющая диффузионного потока, поскольку основное изменение концентраций компонент происходит поперек ударного слоя. В (s, n)-координатах, связанных с поверхностью тела, уравнение неразрывности для ионов i-го сорта записывается в виде

$$(1.1)\qquad -\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mu}{S}\frac{\partial c_i}{\partial n}\right)+\left[\rho v-\frac{\mu}{S}\left(\frac{\varkappa}{1+\varkappa n}+\frac{\cos\theta}{r+n\cos\theta}\right)\right]\frac{\partial c_i}{\partial n}+$$
$$+\frac{\rho u}{1+\varkappa n}\frac{\partial c_i}{\partial s}=\omega_i$$

где c_i – относительная массовая концентрация ионов; ρ, μ – плотность и коэффициент вязкости смеси; S – число Шмидта; u, v – составляющие вектора скорости в направлениях s, n; $\varkappa$ – кривизна образующей поверхности тела; θ – угол между образующей и направлением набегающего потока; r – расстояние от оси симметрии до поверхности тела; ω_i – массовая скорость образования ионов.

При известном положении отошедшей ударной волны и поле газодинамических функций в ударном слое уравнения (1.1) образуют систему параболического типа. Граничные условия формулируются следующим образом. На осевой линии используются условия симметрии, на ударной волне – модифицированные соотношения Ренкина – Гюгонио. Поверхность тела считается непроводящей, идеально каталитической для рекомбинации ионов и имеющей температуру T_w=1100° К. Для бесстолкновительного пристеночного слоя пространственного заряда граничные условия здесь записываются в виде [4, 5]

$$(1.2)\qquad \frac{\mu}{S}\frac{\partial c_i}{\partial n}-0.8\rho\sqrt{\frac{RT_w}{m_i}}\,c_i=0$$

где R – универсальная газовая постоянная, m – молекулярный вес. В условиях, когда средняя длина свободного пробега молекул у поверхности тела меньше дебаевского радиуса, нарушение квазинейтральности не учитывается. В этом случае используется приближенное граничное условие $c_i=0$.