На фиг. 2, *б* приведены значения $\varphi_p \mathrm{Sh}^{-1}$ при $R=10^4$ (кривые *1*, *2* – $g_w=0.2$, кривая *3* – $g_w=0.4$). Штриховой линией показаны те же величины, рассчитанные без учета пограничного слоя [1]. Представленные на фиг. 2, *б* данные позволяют сделать вывод о том, что вдув в пограничный слой улучшает демпфирование колебаний тела (величина φ_p увеличивается). При достаточно большом значении I_0 опережение по фазе превышает аналогичную величину, полученную в [1] без учета пограничного слоя.

Таким образом, расчет течения на клине с учетом слабого взаимодействия пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком показал, что утолщение клина за счет пограничного слоя снижает его демпфирующие характеристики при малых амплитудах и частотах колебаний. По мере увеличения интенсивности вдува в пограничный слой, меняющейся пропорционально тепловому потоку, демпфирование колебаний клина повышается. Начиная с некоторого значения параметра вдува, зависящего в общем случае от чисел M_∞, R, g_w и свойств вдуваемого газа, динамическая устойчивость клина становится выше, чем это следует из газодинамического расчета.

Поступила 4 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянский Ю. П.* О некоторых особенностях нестационарного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 4.
2. *Демьянов Ю. А.* Формирование пограничного слоя на пластине с движущимся скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, № 3.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.

УДК 533.6.011.72

О ДВИЖЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ ГАЗЕ

В. Т. КИРЕЕВ

(Москва)

В работе [1] предложен метод приближенного расчета движения фронтов ударных волн, дающий результаты, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментом при рассмотрении различных нестационарных задач о взаимодействии ударных волн между собой и с твердыми поверхностями. Однако этот метод вызывает принципиальные трудности при рассмотрении распространения ударных волн в движущейся среде [1, 2].

В данной работе выполнено обобщение этого метода для случая неодномерно движущегося перед фронтом ударной волны газа без каких-либо ограничений относительно характера движения и изменения его параметров.

В методе Уизема [1] чисто геометрические соотношения между скоростью распространения любого фронта, площадью его поверхности и ориентацией нормали к нему замыкаются связью между площадью поверхности фронта ударной волны и скоростью его движения, взятой из рассмотрения одномерного течения газа.

В данной работе уравнения, описывающие неодномерное движение фронта ударной волны, получены на основе предположения о том, что вдоль фронта ударной волны выполняются соотношения, справедливые на характеристической поверхности. Полученные уравнения при движении ударной волны по неподвижному газу с постоянными параметрами в точности переходят в уравнения Уизема [1].

Пусть фронт ударной волны движется по газу с известными параметрами, которые могут изменяться как во времени, так и в пространстве.

Движение ударной волны будет определено, если будут известны в каждой точке пространства скорость перемещения фронта по нормали к нему N и ориентация этой нормали $\mathbf{n}$.

В плоском и осесимметричном случаях ориентацию в пространстве внешней нормали $\mathbf{n}$ будем определять углом ее наклона к положительному направлению оси абсцисс x (углом θ).

Если уравнение, описывающее перемещение фронта, задано в виде, разрешенном относительно времени прихода фронта в точку с координатами x, y: $t_*=f(x, y)$

$$N=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{-1/2}=a_1 M+u_1\cos\theta+v_1\sin\theta \tag{1}$$

$$\cos\theta=N\frac{\partial f}{\partial x},\qquad \sin\theta=N\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

Здесь $a_1=a_1(t, x, y)$, $u_1=u_1(t, x, y)$ $v_1=v_1(t, x, y)$ – известные перед фронтом ударной волны скорость звука и составляющие скорости газа по осям x и y – соответственно, M — число Маха ударной волны.

Из (2) следует

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\theta}{N}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\theta}{N}\right) \tag{3}$$

Подставляя сюда (1), получим

$$-\sin\theta\frac{\partial M}{\partial x}+M(\cos\theta+U)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial M}{\partial y}+M(\sin\theta+V)\frac{\partial\theta}{\partial y}=B \tag{4}$$

$$B=\frac{\sin\theta}{a_1}\left[M\frac{\partial a_1}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial u_1}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]+ \tag{5}$$

$$+\frac{\cos\theta}{a_1}\left[M\frac{\partial a_1}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial u_1}{\partial y}+\sin\theta\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]\left(U=\frac{u_1}{a_1M},\ V=\frac{v_1}{a_1M}\right)$$

Если это дифференциальное уравнение, содержащее две искомые функции M и θ, дополнить еще одним уравнением относительно M и θ, то получится замкнутая система для определения этих величин в произвольной точке плоскости x, y.

Получим такое уравнение, предполагая, что параметры за фронтом ударной волны связаны между собой соотношением, выполняющимся на характеристической поверхности. С помощью аналогичного предположения для одномерных движений получена известная зависимость [1] между интенсивностью ударной волны и площадью ее фронта.

Система уравнений, описывающая двумерное нестационарное движение газа, имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{v}{y}\right)=0$$

$$\rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial P}{\partial x}=0;\qquad \rho\frac{dv}{dt}+\frac{\partial P}{\partial y}=0 \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}(P\rho^{-\gamma})=0;\qquad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

Здесь P – давление, ρ – плотность, γ – отношение удельных теплоемкостей, $i=0$ для плоского и $i=1$ для осесимметричного движения.

Из системы (6) можно получить соотношения, выполняющиеся на характеристической поверхности, распространяющейся в том же направлении, что и фронт ударной волны (в направлении увеличения координат x и y). Это соотношение с учетом (1) и (2) запишем как

$$a(u+a\cos\theta)\frac{\partial P}{\partial x}+(v+a\sin\theta)\frac{\partial P}{\partial y}+\gamma P\left[(a+u\cos\theta)\frac{\partial u}{\partial x}+\right. \tag{7}$$

$$\left.+\frac{\partial u}{\partial y}v\cos\theta+u\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}+(a+v\sin\theta)\frac{\partial v}{\partial y}+ia\frac{v}{y}\right]=0$$

На ударной волне выполняются условия

$$u=u_1+\frac{2a_1}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\cos\theta,\qquad \rho=\rho_1\frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}$$

$$v=v_1+\frac{2a_1}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\sin\theta,\qquad a=\left(\gamma\frac{P}{\rho}\right)^{1/2} \tag{8}$$

$$P=P_1\left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}M^2-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right]$$

где параметры перед фронтом ударной волны, помеченные индексом 1, являются, как и в (4), (5), известными функциями $t=f(x, y)$, x, y (параметры за фронтом индекса не имеют).

Подставляя (8) в (7), получим уравнение относительно M и θ, представляющее вместе с (4) замкнутую систему уравнений

$$g(\cos\theta+kU)\frac{\partial M}{\partial x}-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+g(\sin\theta+kV)\frac{\partial M}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}+ \tag{9}$$
$$+\frac{i}{y}\sin\theta=C(U,V,a_1,P_1M,\theta)$$

$$g=\frac{M}{M^2-1}\left(1+\frac{2}{\gamma+1}\frac{1-\mu^2}{\mu}\right)\left(1+2\mu+\frac{1}{M^2}\right),\qquad k=\frac{Ml}{g} \tag{10}$$
$$\mu^2=\frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2-(\gamma-1)},\qquad l=\frac{(\gamma+1)M^2}{(M^2-1)[2\gamma M^2-(\gamma-1)]}\left(2+\frac{M^2+1}{M^2}\mu\right)$$

$$C=-\frac{\gamma+1}{2a_1}\frac{M}{M^2-1}\left\{i\frac{v_1}{y}+\frac{u+a\cos\theta}{\gamma P_1}\frac{\partial P_1}{\partial x}+\frac{a+u\cos\theta}{a}\frac{\partial u_1}{\partial x}+\right.$$
$$+\frac{u\sin\theta}{a}\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\frac{u+a\cos\theta}{a}\frac{\partial a_1}{\partial x}+\frac{v+a\sin\theta}{\gamma P_1}\frac{\partial P_1}{\partial y}+$$
$$+\frac{v\cos\theta}{a}\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{a+v\sin\theta}{a}\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\frac{v+a\sin\theta}{a}\frac{\partial a_1}{\partial y}+ \tag{11}$$
$$+\frac{a+u\cos\theta+v\sin\theta}{a_1M+u_1\cos\theta+v_1\sin\theta}\left[\frac{1}{\gamma P_1}\frac{\partial P_1}{\partial t}+\frac{\cos\theta}{a}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sin\theta}{a}\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\frac{1}{a}\frac{\partial a_1}{\partial t}\right]\right\}$$

Теперь рассмотрим в (9) физический смысл параметра $g(M)$, для чего предположим, что в неподвижном однородном газе ($U=V=B=C=0$) распространяется вдоль оси y одномерная цилиндрическая ($i=1$) ударная волна.

При этом величина $1/y$, входящая в уравнение (9), будет

$$\frac{1}{y}=-\frac{1}{A}\frac{dA}{dy}\qquad\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right) \tag{12}$$

где $A=2\pi y$ – площадь фронта ударной волны.

В этом случае из (9) и (12) имеем

$$g(M)=-\frac{1}{A}\frac{dA}{dM} \tag{13}$$

Таким образом, $g(M)$ описывает известную [1] связь между интенсивностью ударной волны и площадью ее фронта для одномерных движений.

Учитывая (13), для неподвижной и однородной среды ($U=V=B=C=0$) из системы уравнений (4), (9) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\theta}{M}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\theta}{M}\right)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^i\cos\theta}{A}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^i\sin\theta}{A}\right)=0 \tag{14}$$

уравнения, использованные Уиземом и замкнутые в его методе ([1]) зависимостью (13).

Отметим, что полученная выше система уравнений (4), (9) всегда гиперболического типа, если волна распространяется в пространстве ($N>0$). Поэтому для ее решения может быть применен метод характеристик или различные его модификации.

Тем же путем, каким для определения характера движения фронта ударной волны в плоскости x, y была получена система уравнений (4), (9), можно получить аналогичную систему уравнений для случая автомодельного движения, когда задача не имеет характерного размера и все параметры потока перед ударной волной зависят только от полярного угла φ.

Опуская промежуточные выкладки, запишем эту систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{dM}{d\varphi}\cos\alpha+[M\sin\alpha-V_1]\frac{d\alpha}{d\varphi}-M\sin\alpha=B_1\\
&\frac{2}{\gamma+1}[V_1-m_1M\sin\alpha]n_1\frac{dM}{d\varphi}-\frac{2}{\gamma+1}\frac{a}{a_1}\frac{M^2-1}{M}\cos\alpha\frac{d\alpha}{d\varphi}=C_1
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
B_1=\left[\frac{dV_1}{d\varphi}\operatorname{ctg}\varphi-V_1\right]\sin^2\varphi+\left[U_1\operatorname{tg}\varphi-\frac{dU_1}{d\varphi}\right]\cos^2\varphi-\frac{M}{a_1}\cos\alpha\frac{da_1}{d\varphi}
$$

$$
\begin{aligned}
C_1=&\frac{1}{\gamma P_1}\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\sin\alpha-V_1+\frac{a}{a_1}\sin\alpha\right)\frac{a}{a_1}\frac{dP_1}{d\varphi}-\\
&-\frac{a}{a_1}\left(\frac{dV_1}{d\varphi}-\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{Ma_1}\frac{da_1}{d\varphi}\right)-\left(V_1-\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{M}\sin\alpha\right)\times\\
&\times\left(\frac{dU_1}{d\varphi}\cos\alpha-\frac{dV_1}{d\varphi}\sin\alpha+\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2-1}{Ma_1}\frac{da_1}{d\varphi}-V_1\cos\alpha-U_1\sin\alpha\right)-\\
&-\frac{a}{a_1}[iU_1+(i-1)V_1\operatorname{ctg}\varphi]-\frac{2}{\gamma+1}\frac{a}{a_1}\frac{M^2-1}{M}[i\cos\alpha-(i-1)\operatorname{ctg}\varphi\sin\alpha]
\end{aligned}
$$

$$
m_1=\frac{1}{n_1}\left[\frac{2}{\gamma+1}\frac{M^2+1}{M^2}n_1+2\frac{\rho_1}{\rho}+\frac{a}{a_1}\frac{M^2+1}{M^3}\right]
$$

$$
n_1=2M\frac{P_1}{P}\frac{a}{a_1}+\frac{M^2+1}{M^2};\qquad U_1=\frac{v_{r1}}{a_1},\qquad V_1=\frac{v_{\varphi1}}{a_1}
$$

В этих соотношениях α – угол между нормалью к фронту ударной волны и радиус-вектором r в полярной системе координат r, φ; $v_{r1}=v_{r1}(\varphi)$ и $v_{\varphi1}=v_{\varphi1}(\varphi)$ – составляющие скорости газа по осям r и φ соответственно. Все другие обозначения те же, что и выше. Укажем также, что формула (1) в данном случае примет вид

$$
R=\frac{r_*}{t}=\frac{a_1M}{\cos\alpha}+v_{r1}-v_{\varphi1}\operatorname{tg}\alpha \tag{16}
$$

После определения M и α из (15) величина радиус-вектора фронта ударной волны находится из (16).

Очевидно, что изложенным выше путем можно получить систему уравнений, описывающую движение фронта ударной волны и в трехмерном случае.

Автор благодарен М. Д. Герасимову за внимание и помощь в работе.

Поступила 4 VII 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.
2. *Whitham G.* A note on shock dynamics relative to a moving frame. J. Fluid Mech., 1968, vol. 31, No. 3.

УДК 533.69.048.2.011.5:532.582.3

О РАСЧЕТЕ ДАВЛЕНИЯ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЕГМЕНТАЛЬНО-КОНИЧЕСКИХ ТЕЛ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

А. В. АНТОНЕЦ, В. П. МАРИНИН

(Москва)

Результаты исследований невязкого обтекания обратных конусов с сегментальным затуплением впервые в отечественной литературе были опубликованы в [1-4]. В данной работе получено численное решение этой задачи по усовершенствованным алгоритмам [5, 6], хорошо апробированным ранее в задачах внешнего обтекания поверхностей с положительными углами наклона к набегающему потоку. Показано влияние на изучаемые распределения давления числа Маха $2\leqslant M_\infty\leqslant\infty$, равновесных и неравновесных физико-химических превращений в воздухе ($H=60$ *км*; $V_\infty=7.4$ *км/сек*, $R_0=1$ *м*) и угла атаки $0\leqslant\alpha\leqslant40°$. Проведенное сравнение результа-