

УДК 532.526.2.013.2

**О ВЛИЯНИИ ВДУВА НА ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСТАЦИОНАРНОГО  
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА КОЛЕБЛЮЩЕМСЯ КЛИНЕ  
В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ**

Е. С. КОРНИЕНКО, В. Н. ШМАНЕНКОВ

(Москва)

Исследуется влияние вдува на характеристики нестационарного пограничного слоя. Для этого решены уравнения ламинарного пограничного слоя на бесконечном клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью и совершающем малые колебания около вершины. Показано, что с увеличением вдува демпфирование колебаний клина улучшается.

Уравнения относительного движения газа в пограничном слое на поверхности клина, совершающего малые колебания около вершины с конечной частотой, в связанной прямоугольной системе координат, начинающейся с носка клина, имеют вид

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho \frac{\partial J}{\partial t} &= \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

$$J = h + \frac{u^2}{2}, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}, \quad Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Здесь  $u, v$  — компоненты вектора скорости вдоль осей  $x, y$ ,  $x$  — координата вдоль поверхности клина,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $h$  — энтальпия,  $\mu$  — вязкость,  $\lambda$  — теплопроводность,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $Pr$  — число Прандтля.

В качестве внешних граничных условий используется точное решение уравнений Эйлера на колеблющемся клине с присоединенной ударной волной. При низких частотах колебаний клина такое решение получено в работе [1]. Используется модель разрушения теплозащитного покрытия, в соответствии с которой температура поверхности постоянна, а интенсивность вдува  $\rho_w v_w$  пропорциональна конвективному тепловому потоку.

Граничными условиями будут

$$(2) \quad y=0: \quad u=0, \quad \rho v = I \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w, \quad h = h_w$$

$$y \rightarrow \infty: \quad u \rightarrow u_\delta(x, t), \quad h \rightarrow h_\delta(x, t)$$

Индекс  $w$  относится к параметрам на поверхности клина,  $\delta$  — на границе пограничного слоя. Колебания угла наклона поверхности клина к набегающему потоку задаются гармоническими

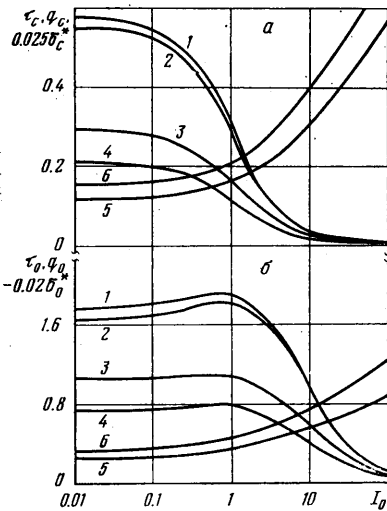
$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \sin \omega t, \quad |\varepsilon| \ll 1$$

Применяя преобразование Дородницына

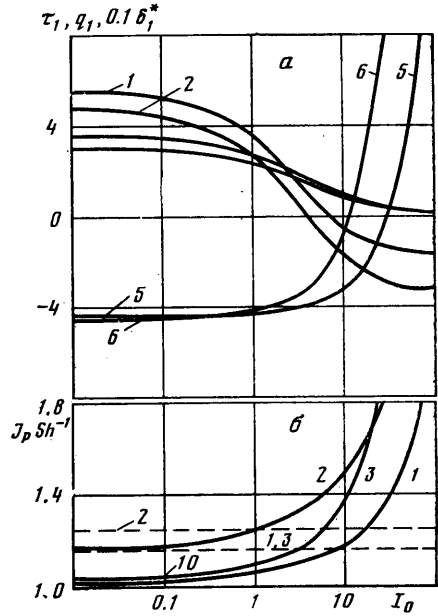
$$t = t, \quad x = x, \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_{\delta e}} dy, \quad v^\circ = \frac{\rho v}{\rho_{\delta e}} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

систему (1) приводим к виду, позволяющему ввести функцию тока  $\psi$  (см., например, [2])

$$\psi(t, x, \eta) = - \int_0^x v^\circ dx$$



Фиг. 1



Фиг. 2

В данной постановке задача допускает разделение по переменным  $t, x, z$ , где  $z = \eta \sqrt{R}/x$ ,  $R = \rho_{\delta c} u_{\delta c} x / \mu_{\delta c}$  — число Рейнольдса, рассчитанное по параметрам на границе пограничного слоя при стационарном обтекании клина (индекс  $c$  относится к стационарным параметрам).

Каждая из искомым функций  $\psi, \rho, h$  и т. д. может быть при этом с точностью до размерного коэффициента представлена в виде

$$(3) \quad F(t, x, z) = F_c(z) + \varepsilon \sum_{k=0,1,2,\dots} F_k(z) \text{Sh}^k m_k(t) + O(\varepsilon^2)$$

Здесь  $\text{Sh} = x\omega/u_{\delta c}$  — число Струхалия,  $m_k = \sin \omega t$  при четных значениях  $k$ ,  $m_k = \cos \omega t$  при нечетных  $k$ . Подставляя (3) в (1) и (2), пренебрегая членами порядка  $\varepsilon^2$  и суммируя члены с одинаковыми степенями числа Струхалия, получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} N_c f_c''' + \frac{1}{2} f_c f_c'' + N_c' f_c'' &= 0 \\ N_c \Phi_c'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f_c \Phi_c' + N_c' \Phi_c' - (1 - \text{Pr})(N_c f_c f_c'')' &= 0 \\ (N_c f_k'' + N_k f_k''')' + \frac{1}{2} (f_c f_k'' + f_c'' f_k) &= (-1)^{k-1} f_{k-1}' + k(f_c' f_k' - f_c'' f_k + P_k) \\ (N_c \Phi_k' + N_k \Phi_c')' + \frac{1}{2} \text{Pr} (f_c \Phi_k' + \Phi_c' f_k) - (1 - \text{Pr}) [N_c (f_c' f_k')' + N_k f_c' f_c'']' &= \\ = \text{Pr} [(-1)^{k-1} (\Phi_{k-1} - P_{k-1}) + k(f_c' \Phi_k - \Phi_c' f_k)] & \\ z=0: \quad f_c' = 0, \quad f_c + \frac{2I_0}{\text{Pr}} \Phi_c' = 0, \quad \Phi_c = \frac{h_w}{u_{\delta c}^2} & \end{aligned}$$

$$f_k' = 0, \quad (2k+1)f_k + \frac{2I_0}{Pr} \Phi_k' = 0, \quad \Phi_k = 0$$

$$z \rightarrow \infty: \quad f_c' \rightarrow 1, \quad \Phi_c \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_{\delta c}^2}$$

$$f_k' \rightarrow \frac{u_{\delta k}}{u_{\delta c}}, \quad \Phi_k \rightarrow \frac{h_{\delta k}}{u_{\delta c}^2} - \frac{u_{\delta k}}{u_{\delta c}}$$

$$N = \frac{\rho\mu}{\rho_{\delta c}\mu_{\delta c}}, \quad f(z) = \psi \sqrt{\frac{\rho_{\delta c}}{u_{\delta c}\mu_{\delta c}x}}, \quad \Phi(z) = \frac{J}{u_{\delta c}^2}$$

$$I_0 = u_{\delta c}^2 I, \quad P = \frac{P}{\rho_c u_{\delta c}^2}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $z$ , при  $k=0$ ,  $f_{k-1} = f'_{k-1} = \Phi_{k-1} = P_{k-1} = 0$ . При низких частотах колебаний клина ( $Sh \ll 1$ ), ограничившись двумя первыми членами ряда (3), получим

$$(5) \quad F = F_c + \varepsilon F_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \text{arctg} \frac{Sh F_1}{F_0}$$

Так, например, для напряжения трения  $\tau_w$ , теплового потока  $q_w$  и толщины вытеснения  $\delta^*$  имеем

$$\tau_w = \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{\rho_{\delta c} u_{\delta c}^2}{2\sqrt{R}} [\tau_c + \varepsilon \tau_0 \sin(\omega t + \varphi_\tau)]$$

$$\varphi_\tau = \text{arctg} \frac{Sh \tau_1}{\tau_0}$$

$$(6) \quad q_w = \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w = \frac{\rho_{\delta c} u_{\delta c}^3}{2\sqrt{R}} [q_c + \varepsilon q_0 \sin(\omega t + \varphi_q)]$$

$$\varphi_q = \text{arctg} \frac{Sh q_1}{q_0}$$

$$\delta^* = \frac{x \delta_c^*}{\sqrt{R}} + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{R}} \delta_0^* \sin(\omega t + \varphi_*), \quad \varphi_* = \text{arctg} \frac{Sh \delta_1^*}{\delta_0^*}$$

Для определения толщины вытеснения  $\delta^*(t, x)$  использовалось условие непротекания идеального потока через линию  $y = \delta^*(t, x)$

$$(7) \quad \frac{V(t, x, \delta^*)}{u_\delta} = \frac{\partial \delta^*}{\partial x} + \frac{1}{u_\delta} \frac{\partial \delta^*}{\partial t}$$

Здесь  $V$  — компонента вектора скорости идеального потока вдоль оси  $y$ . Интегрируя уравнение неразрывности сначала по  $y$  от 0 до  $\infty$ , а затем по  $x$ , с учетом условия (7) получаем следующее соотношение для определения  $\delta^*$

$$\begin{aligned} \delta^*(t, x) = & \int_0^\infty \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_\delta u_\delta} \right) dy + \\ & + \frac{1}{\rho_\delta u_\delta} \int_0^x \left\{ \rho_w v_w + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_\delta \int_0^\infty \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_\delta} \right) dy - \rho_\delta \delta^* \right] \right\} dx \end{aligned}$$

Окончательное выражение для  $\delta^*$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_c^* &= \lim_{z \rightarrow \infty} (Y_c - f_c), \quad Y_c = \int_0^z \frac{\rho_{\delta c}}{\rho_c} dz \\ \delta_0^* &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left( Y_0 - f_0 + Y_c \frac{\rho_{\delta 0}}{\rho_{\delta c}} + Y_c \frac{u_{\delta 0}}{u_{\delta c}} \right) \\ \delta_1^* &= \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ Y_1 - f_1 + \frac{1}{3} (Y_c + 2f_c) \left( \frac{\rho_{\delta 1}}{\rho_{\delta c}} + \frac{u_{\delta 1}}{u_{\delta c}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left( Y_0 + f_c \frac{\rho_{\delta 0}}{\rho_{\delta c}} - \delta_0^* \right) \right\}, \quad Y_1 = - \int_0^z \frac{\rho_1 \rho_{\delta c}}{\rho_c^2} dz \end{aligned}$$

Система (4) была решена методом пристрелки. В качестве контрольного был рассчитан вариант несжимаемого пограничного слоя без вдува с постоянной вязкостью. Сравнимые значения  $\tau_c$ ,  $\tau_0$  и  $\tau_1$  совпали с данными Мура, приведенными в монографии [3].

Основными расчетными вариантами были следующие:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 15^\circ, \quad M_\infty = 10, 20, \quad g_w = 0.2, 0.4, \quad \gamma = 1.4, \quad \text{Pr} = 0.72, \\ g_w &= h_w / (h_{\delta c} + 0.5 \sqrt{\text{Pr}} u_{\delta c}^2) \end{aligned}$$

На фиг. 1, 2, а приведены расчетные значения величин  $\tau_c$ ,  $q_c$ ,  $\delta_c^*$  (фиг. 1, а  $\tau_c$  — кривые 1, 2,  $q_c$  — 3, 4,  $\delta_c^*$  — 5, 6),  $\tau_0$ ,  $q_0$ ,  $\delta_0^*$  (фиг. 1, б нумерация кривых идентичная) и  $\tau_1$ ,  $q_1$ ,  $\delta_1^*$  (фиг. 2, а) в виде функций от безразмерного параметра вдува  $I_0$  при  $M_\infty = 10$  и двух значениях энтальпийного фактора:  $g_w = 0.2$  (нечетные номера кривых) и  $g_w = 0.4$  (четные номера кривых).

Зависимости  $\tau_c(I_0)$ ,  $q_c(I_0)$  и  $\delta_c^*(I_0)$  для стационарного течения согласуются с общепринятыми. Основным интерес представляют данные о поведении функций с индексом 0 (амплитуды квазистационарных колебаний) и индексом 1 (амплитуды колебаний в фазе с угловой скоростью  $\dot{\theta}$ ). Величины  $\tau_0$ ,  $q_0$ ,  $\delta_0^*$  (фиг. 1, б) не меняют знака, следовательно, фазовые сдвиги  $\varphi_\tau$ ,  $\varphi_q$  и  $\varphi_{\delta^*}$  при низких числах Струхала не достигают  $\pi/2$ . Следует отметить, что, несмотря на немонотонный характер изменения величин  $\tau_0$ ,  $q_0$  (фиг. 1, б), соответствующие сдвиги фаз монотонно зависят от параметра  $I_0$ . Такие характеристики пограничного слоя, как напряжение трения на поверхности и толщина вытеснения, опережают по фазе колебания клина при низких значениях  $I_0$  (фазовые сдвиги  $\varphi_\tau > 0$ ,  $\varphi_{\delta^*} > 0$ ). Однако при сильном вдуве ( $I_0 = 10-100$ ) опережение сменяется отставанием. Обращает на себя внимание быстрый рост фазового сдвига  $\varphi_{\delta^*}$  при сильном вдуве.

Напряжение трения  $\tau_w$  оказывает непосредственное силовое воздействие на поверхность тела, однако на клине, колеблющемся около носка, оно не дает вклада в моменты сил.

Рассмотрим влияние толщины вытеснения пограничного слоя на демпфирующие характеристики колеблющегося в сверхзвуковом потоке клина. Для определения поправки к давлению, вызванной утолщением тела на величину  $\delta^*$ , воспользуемся методом местных клиньев. Из [4] имеем

$$\begin{aligned} P &= P_c + P_0(\theta_M - \theta_0) + P_1 \frac{x \dot{\theta}_M}{u_\delta} \\ (8) \quad \theta_M &= \theta + \frac{\partial \delta^*}{\partial x} = \theta_0 + \varepsilon \sin \omega t + \frac{\delta^*}{2x} \end{aligned}$$

Здесь  $P_c = 1/\gamma M_{\delta c}^2$ , при  $M_\infty = 10$   $P_0 = 0.1635$ ,  $P_1 = 0.1898$ , при  $M_\infty = 20$   $P_0 = 0.1255$ ,  $P_1 = 0.1563$ . Пренебрегая в (8) членами порядка  $\omega^2$  и  $1/R$ , получим

$$\begin{aligned} P &= P_c + \frac{\delta_c^* P_0}{2\sqrt{R}} + \varepsilon \left( 1 + \frac{\delta_0^*}{2\sqrt{R}} \right) P_0 \sin(\omega t + \varphi_p) \\ \varphi_p &= \text{arctg Sh} \left[ \frac{P_1}{P_0} \left( 1 - \frac{\delta_0^*}{2\sqrt{R}} \right) + \frac{\delta_1^*}{2\sqrt{R}} \right] \end{aligned}$$

На фиг. 2, б приведены значения  $\Phi_p \text{Sh}^{-1}$  при  $R=10^4$  (кривые 1, 2 —  $g_w=0.2$ , кривая 3 —  $g_w=0.4$ ). Штриховой линией показаны те же величины, рассчитанные без учета пограничного слоя [1]. Представленные на фиг. 2, б данные позволяют сделать вывод о том, что вдув в пограничный слой улучшает демпфирование колебаний тела (величина  $\Phi_p$  увеличивается). При достаточно большом значении  $I_0$  опережение по фазе превышает аналогичную величину, полученную в [1] без учета пограничного слоя.

Таким образом, расчет течения на клине с учетом слабого взаимодействия пограничного слоя с внешним сверхзвуковым потоком показал, что утолщение клина за счет пограничного слоя снижает его демпфирующие характеристики при малых амплитудах и частотах колебаний. По мере увеличения интенсивности вдува в пограничный слой, меняющейся пропорционально тепловому потоку, демпфирование колебаний клина повышается. Начиная с некоторого значения параметра вдува, зависящего в общем случае от чисел  $M_\infty$ ,  $R$ ,  $g_w$  и свойств вдуваемого газа, динамическая устойчивость клина становится выше, чем это следует из газодинамического расчета.

Поступила 4 VII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полянский Ю. П. О некоторых особенностях нестационарного обтекания тел сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР. МЖТ, 1966, № 4.
2. Демьянов Ю. А. Формирование пограничного слоя на пластине с движущимся скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, № 3.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.

УДК 533.6.011.72

### О ДВИЖЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОМ ГАЗЕ

В. Т. КИРЕЕВ

(Москва)

В работе [1] предложен метод приближенного расчета движения фронтов ударных волн, дающий результаты, достаточно хорошо согласующиеся с экспериментом при рассмотрении различных нестационарных задач о взаимодействии ударных волн между собой и с твердыми поверхностями. Однако этот метод вызывает принципиальные трудности при рассмотрении распространения ударных волн в движущейся среде [1, 2].

В данной работе выполнено обобщение этого метода для случая неоднородно движущегося перед фронтом ударной волны газа без каких-либо ограничений относительно характера движения и изменения его параметров.

В методе Уизема [1] чисто геометрические соотношения между скоростью распространения любого фронта, площадью его поверхности и ориентацией нормали к нему замыкаются связью между площадью поверхности фронта ударной волны и скоростью его движения, взятой из рассмотрения одномерного течения газа.

В данной работе уравнения, описывающие неоднородное движение фронта ударной волны, получены на основе предположения о том, что вдоль фронта ударной волны выполняются соотношения, справедливые на характеристической поверхности. Полученные уравнения при движении ударной волны по неподвижному газу с постоянными параметрами в точности переходят в уравнения Уизема [1].

Пусть фронт ударной волны движется по газу с известными параметрами, которые могут изменяться как во времени, так и в пространстве.

Движение ударной волны будет определено, если будут известны в каждой точке пространства скорость перемещения фронта по нормали к нему  $N$  и ориентация этой нормали  $n$ .

В плоском и осесимметричном случаях ориентацию в пространстве внешней нормали  $n$  будем определять углом ее наклона к положительному направлению оси абсцисс  $x$  (углом  $\theta$ ).

Если уравнение, описывающее перемещение фронта, задано в виде, разрешенном относительно времени прихода фронта в точку с координатами  $x, y$ :  $t_* = f(x, y)$

$$(1) \quad N = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1/2} = a_1 M + u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta$$

$$(2) \quad \cos \theta = N \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \sin \theta = N \frac{\partial f}{\partial y}$$

Здесь  $a_1 = a_1(t, x, y)$ ,  $u_1 = u_1(t, x, y)$ ,  $v_1 = v_1(t, x, y)$  — известные перед фронтом ударной волны скорость звука и составляющие скорости газа по осям  $x$  и  $y$  — соответственно,  $M$  — число Маха ударной волны.