МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1981

УДК 533.6.011

К ВЫВОДУ УРАВНЕНИЙ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА

В. С. ГАЛКИН

(Москва)

Построен общий алгоритм модифицированного метода Чепмена — Энскога решения системы уравнений Больцмана для бинарной смеси одноатомных газов с сильно различающимися массами молекул ($\varepsilon \equiv \sqrt{m/M} \ll 1$). В отличие от опубликованных работ алгоритм основан на более тщательном рассмотрении разложений интегралов столкновений частиц разных сортов по ε и предположений, при которых реализуется двухтемпературная газодинамика.

В последние годы появился ряд статей (например, [1–4]), посвященных выводу уравнений двухтемпературной газодинамики из системы кинетических уравнений Больцмана при помощи методов Максвелла — Грэда [1], Гильберта [3] и т. д. Использование различных методов и некоторые критические замечания [1] о методе Чепмена — Энскога объясняются отчасти тем, что в работах [5, 6], где для указанной цели применен модифицированный метод Чепмена — Энскога, недостаточно полно изложены исходные предположения, способ построения решения и его результаты. В частности, оценки величины интеграла столкновений тяжелых частиц с легкими основаны на разумных, но качественных соображениях. Кроме того, рассмотрение ограничено приближением, аналогичным приближению Навье — Стокса. Данная работа посвящена устранению этих недостатков. Предполагается, что внешние силы отсутствуют, однако вся аргументация справедлива и для частично ионизованной плазмы в достаточно слабом электрическом поле; в противном случае функция распределения электронов может сильно отличаться от максвелловской [4, 7].

1. Рассмотрим следующий класс течений бинарной смеси газов с резко различающимися массами частиц. Характерные значения отношений концентраций N/n, температур T_M/T_m и сечений столкновений молекул по порядку величины равны единице. Средние скорости компонентов смеси много меньше средней тепловой скорости легких молекул c_m, средняя скорость тяжелого компонента $V = c_M O(1)$. Поэтому для характерных значений собственных скоростей тяжелых и легких молекул $\mathbf{C} = \boldsymbol{\xi}_M - \mathbf{V}$, $\mathbf{c} = \boldsymbol{\xi}_m - \mathbf{V}$ имеют место следующие оценки:

$$(1.1)\qquad C = cO(\varepsilon), \quad W = O(1), \; w = O(1)$$

$$W_i = C_i/c_M, \quad c_M = (2kT_M/M)^{1/2}; \quad w_i = c_i/c_m, \quad c_m = (2kT_m/m)^{1/2}$$

Здесь учтен тот факт, что с относительной погрешностью $\delta \leqslant \varepsilon$ безразлично, от какой средней скорости отсчитывать собственные скорости легких молекул. Решение упрощается, если их отсчитывать от скорости V, с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с единицей равной среднемассовой скорости $\mathbf{U}$. Это следует из определений

$$\mathbf{V} \equiv \frac{1}{N} \int F \boldsymbol{\xi}_M \, d\boldsymbol{\xi}_M = \mathbf{U} - \frac{n\varepsilon^2 \mathbf{v}}{N + n\varepsilon^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{n} \int f \mathbf{c} \, d\mathbf{c}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — разность скоростей легкого и тяжелого компонентов.

Систему уравнений Больцмана для функций распределения $F=F(\mathbf{C},\mathbf{x},t)$, $f=f(\mathbf{c},\mathbf{x},t)$ тяжелых и легких молекул запишем соответственно в виде

$$DF=J(FF)+J(Ff),\quad Df=J(ff)+J(fF)$$
$$DF\equiv\frac{DF}{Dt}+C_i\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{DV_i}{Dt}\frac{\partial F}{\partial C_i}-\frac{\partial V_i}{\partial x_j}C_j\frac{\partial F}{\partial C_i} \tag{1.2}$$

Оператор Df получается из DF заменой F, $\mathbf{C}$ на f, $\mathbf{c}$, через J обозначены интегралы столкновений, $D/Dt=\partial/\partial t+V_i\partial/\partial x_i$, $i=1, 2, 3$.

Из (1.2) следуют уравнения

$$\frac{DN}{Dt}+N\nabla\mathbf{V}=0,\qquad \frac{Dn}{Dt}+n\nabla\mathbf{V}+\nabla(n\mathbf{v})=0 \tag{1.3}$$

$$R\frac{DV_i}{Dt}+\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}=\Phi_i[Ff],\quad \Phi_i=M\int C_iJ(Ff)\,d\mathbf{C} \tag{1.4}$$

В силу закона сохранения импульса и уравнения Больцмана для f имеем

$$\Phi_i=-m\int c_iJ(fF)\,d\mathbf{c}=-m\int c_iDf\,d\mathbf{c}$$

После интегрирования с учетом (1.3), (1.4) получим

$$\Phi_i=\left(1+\frac{\rho}{R}\right)^{-1}\left[-\frac{\partial p}{\partial x_i}-\frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}-\rho\left(\frac{Dv_i}{Dt}+v_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)+\right.$$
$$\left.+v_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_j)+\frac{\rho}{R}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}\right)\right] \tag{1.5}$$

Как и выше, величины, относящиеся к тяжелому и легкому компонентам, будем обозначать соответственно большими и малыми символами, а также посредством индексов M, m снизу: P, p — давления; P_{ij}, p_{ij} — бездивергентные напряжения; Q_i, q_i — тепловые потоки. По определению

$$(R;P;P_{ij};Q_i)=M\int\left(1;\frac{1}{3}C^2;\langle C_iC_j\rangle;\frac{1}{2}C_iC^2\right)F\,d\mathbf{C}$$

$$(\rho;p;p_{ij};q_i)=m\int\left(1;\frac{1}{3}c^2;\langle c_ic_j\rangle;\frac{1}{2}c_ic^2\right)f\,d\mathbf{c}$$

$$P=NkT_M,\quad p=nkT_m,\quad R=MN,\quad \rho=mn,\quad \langle A_{ij}\rangle=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})-$$
$$-\frac{1}{3}\delta_{ij}A_{kk}$$

2. Рассмотрим результаты разложения интегралов столкновений частиц разных сортов $J(fF)$, $J(Ff)$ в ряд по ε, используя оценки (1.1). В работе [7] проведено разложение интеграла столкновений легких частиц с тяжелыми вплоть до членов порядка ε^2: $J(fF)=J_0+\varepsilon J_1+\varepsilon^2J_2+O(\varepsilon^3)$. Интеграл Лоренца

$$J_0=N\int[f(\mathbf{c}_0)-f(\mathbf{c})]cb\,db\,d\omega,\quad \mathbf{c}_0=\mathbf{c}-2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k},\quad |\mathbf{c}_0|=|\mathbf{c}| \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — единичный вектор вдоль линии центров [7].

В формулу для J_1 в качестве коэффициентов входят интегралы, равные нулю при используемом в настоящей работе определении собственных скоростей

$$\int FC_i\,d\mathbf{C}=0 \tag{2.2}$$

Следовательно, $J_1=0$.

Выражение для J_2 приведем для частного случая, когда $f(\mathbf{c})$ — изотропная функция

$$J_2=c^{-2}\frac{\partial}{\partial c}(c^3B),\qquad B=\sigma^{(1)}(c)\left(f+\frac{kT_M}{mc}\frac{\partial f}{\partial c}\right)$$

(2.3)

$$\sigma^{(1)}(c)=2\pi N\int(1-\cos\chi)cb\,db,\qquad \cos\chi=(\mathbf{c}_0\cdot\mathbf{c})/c^2$$

Рассмотрим теперь интеграл $J(Ff)$. Результаты разложения подынтегральной функции даны в [7]. При интегрировании ее используем ортогональность интеграла Лоренца (2.1) к единице

$$\int[\Psi(\mathbf{c}_0)-\Psi(\mathbf{c})]cb\,db\,d\omega\,d\mathbf{c}=0;\quad \Psi(\mathbf{c})=f(\mathbf{c}),\quad \frac{\partial f}{\partial c_i},\ldots$$

перейдем от интегрирования по $\mathbf{c}$ к интегрированию по $\mathbf{c}_0$ и затем переобозначим переменные интегрирования. После довольно громоздких выкладок получим $J(Ff)=I_1(Ff)+I_2(Ff)+O(\varepsilon^3)$, где $I_k\sim\varepsilon^k$, причем

$$I_1=-\frac{\partial F(\mathbf{C})}{\partial C_i}\int f(\mathbf{c})k_i(\mathbf{c}\cdot\mathbf{k})d\Gamma,\quad d\Gamma=2\varepsilon^2cb\,db\,d\omega\,d\mathbf{c} \tag{2.4}$$

$$I_2=\varepsilon^2\frac{\partial^2F(\mathbf{C})}{\partial C_i\,\partial C_j}\int f(\mathbf{c})\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{k})^2k_ik_j\,d\Gamma- \tag{2.5}$$

$$-\frac{\partial F(\mathbf{C})}{\partial C_i}C_j\int\frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_j}k_i(\mathbf{c}\cdot\mathbf{k})d\Gamma-F(\mathbf{C})\int\frac{\partial f(\mathbf{c})}{\partial c_i}k_i(\mathbf{c}\cdot\mathbf{k})d\Gamma$$

Отметим, что $I_1=0$, если $f(\mathbf{c})$ — изотропная функция. Изложенные выше результаты получаются и при использовании формализма работы [8].

Запишем (2.4) в другом виде. Пусть

$$\Phi_i^{(I)}=M\int C_iI_1d\mathbf{C}=R\int fk_i(\mathbf{c}\cdot\mathbf{k})d\Gamma \tag{2.6}$$

Следовательно

$$I_1=-R^{-1}\Phi_i^{(I)}\,\partial F/\partial C_i \tag{2.7}$$

Следствием этого соотношения является важный результат, не подчеркнутый в [5,6]. Используя (1.4), преобразуем третье слагаемое из DF (см. (1.2))

$$-\frac{DV_i}{Dt}\frac{\partial F}{\partial C_i}=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}+\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}\right)\frac{\partial F}{\partial C_i}-\frac{1}{R}\Phi_i^{(I)}\frac{\partial F}{\partial C_i}-\ldots$$

Последнее слагаемое сокращается с I_1 в силу (2.7).

Если $f(\mathbf{c})=f^{(0)}(c^2)$ — максвелловская функция, то можно показать, используя известные приемы интегрирования [9], что

$$I_2=\beta\frac{\partial}{\partial C_i}\left(C_iF+\frac{kT_m}{M}\frac{\partial F}{\partial C_i}\right),\quad \beta=\frac{m^2}{3kT_mR}\int\sigma^{(1)}f^{(0)}c^2\,d\mathbf{c} \tag{2.8}$$

Здесь $\sigma^{(1)}$ дается формулой (2.3).

С учетом полученных результатов преобразуем кинетические уравнения (1.2). Рассматриваемый класс течений можно характеризовать одним числом Кнудсена $K=(N_0b_{FF}{}^2d)^{-1}$, где N_0, $b_{FF}{}^2$ — характерные значения концентраций и сечений столкновений тяжелых частиц, d — минимальный характерный размер. Введем безразмерные величины звездочкой сверху:

$x_i^*=x_i/d$, $(V_i^*, C_i^*)=(V_i, C_i)(kT_0/M)^{-1/2}$, $c_i^*=c_i(kT_0/m)^{-1/2}$ и т. д., T_0 — характерная температура. Уравнения Больцмана (1.2) примут вид

$$K\left(\frac{DF^*}{Dt^*}+C_i^*\frac{\partial F^*}{\partial x_i^*}-\frac{dV_i^*}{dt^*}\frac{\partial F^*}{\partial C_i^*}-\frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*}C_j^*\frac{\partial F^*}{\partial C_i^*}\right)-\varepsilon\Sigma^*(Ff)=J^*(FF) \tag{2.9}$$

$$K\left(\varepsilon\frac{Df^*}{Dt^*}+c_i^*\frac{\partial f^*}{\partial x_i^*}-\varepsilon^2\frac{DV_i^*}{Dt^*}\frac{\partial f^*}{\partial c_i^*}-\varepsilon\frac{\partial V_i^*}{\partial x_j^*}c_j^*\frac{\partial f^*}{\partial c_i^*}\right)-\varepsilon^2\sigma^*(fF)=J^*(ff)-J_0^*(f) \tag{2.10}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\frac{dV_i}{dt}\equiv\frac{DV_i}{Dt}-\frac{1}{R}\Phi_i^{(I)},\quad \Sigma(Ff)\equiv J(Ff)-I_1,\quad \sigma(fF)=J(fF)-J_0 \tag{2.11}$$

3. Перейдем к построению решения методом Чепмена — Энскога при $K\to0$, $\varepsilon\to0$. Этот метод можно трактовать как метод последовательных приближений для вычисления переносных свойств, когда не производится детальный анализ порядков слагаемых левых частей кинетических уравнений, что позволяет получать общие результаты ценой учета внепорядковых слагаемых в различных приближениях метода. Соответствующие переразложения производятся на уровне газодинамических уравнений, что является более простой процедурой. В этом его преимущество по сравнению с методом Гильберта. Известным примером является пограничный слой: метод Чепмена — Энскога дает уравнения Навье — Стокса, которые затем упрощаются до уравнений Прандтля. В данном случае это преимущество проявляется в том, что общий алгоритм решения строится сразу же, без предварительного анализа порядков $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$ и т. д. При этом получается формальное разложение в ряд по K и ε. Далее устанавливается связь между K и ε и показывается, что однопараметрическое разложение дает те же результаты.

При $K\to0$, $\varepsilon\to0$ из (2.9), (2.10) в нулевом приближении получаем

$$J(f^{(0)}f^{(0)})+N\int[f^{(0)}(\mathbf{c}_0)-f^{(0)}(\mathbf{c})]cb\,db\,d\omega=0,\quad J(F^{(0)}F^{(0)})=0 \tag{3.1}$$

В силу произвольности N слагаемые первого из уравнений (3.1) равны нулю по отдельности. В результате решениями уравнений (3.1) будут максвелловские функции с разными температурами

$$f^{(0)}=n(\pi c_m^2)^{-3/2}e^{-w^2},\quad F^{(0)}=N(\pi c_M^2)^{-3/2}e^{-W^2} \tag{3.2}$$

Здесь использованы обозначения из (1.1).

Подчеркнем важность сделанных выше предположений для реализации решений (3.2). Если сечение $b_{ff}^2\ll b_{fF}^2$ или $N\gg n$, то из первого уравнения (3.1) следует уравнение $J_0=0$, решением которого является изотропная (вообще говоря, немаксвелловская) функция. Если $n\gg N$ так, чтобы $J(FF)\sim\Sigma(Ff)$, то $f^{(0)}$, $F^{(0)}$ будут выражаться через одну температуру. Заметим также, что $J(FF)\sim I_1(Ff)$. Однако, как отмечалось выше, I_1 сокращается с таким же слагаемым оператора DF, следствием чего является второе уравнение (3.1).

Нулевое приближение (3.2) определяет набор макроскопических величин, описывающих рассматриваемые течения газа как сплошной среды. Кроме n, N, $\mathbf{V}$ таковыми являются температуры T_M, T_m, уравнения для которых имеют вид

$$\frac{3}{2}kN\frac{DT_M}{Dt}+(P\delta_{ij}+P_{ij})\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial Q_i}{\partial x_i}=E[Ff] \tag{3.3}$$

$$\frac{3}{2}kn\frac{DT_m}{Dt}+(p\delta_{ij}+p_{ij})\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial q_i}{\partial x_i}-\frac{3}{2}kT_m\frac{\partial}{\partial x_i}(nv_i)+ \tag{3.4}$$

$$+\rho v_i \frac{DV_i}{Dt} = -E[Ff] \equiv -\frac{M}{2}\int C^2 J(Ff)\,d\mathrm{C}$$

Если F, f — максвелловские (3.2), то с помощью (2.8) в главном приближении по ε находим

$$E[F^{(0)}f^{(0)}]=16\varepsilon^2 knN(T_m-T_M)\Omega_{12}^{(1)}\ (1;\ \varepsilon=0) \tag{3.5}$$

Здесь $\Omega \sim c_m b_{FF}^2$ — эффективное сечение рассеяния [9].

Из соотношений (3.3), (3.5) следует, что относительная разность температур $(T_M-T_m)/T_M=O(1)$, если $kNDT_M/Dt=O(E)$, или

$$n\varepsilon^2\Omega_{12}^{(1)}(1) \sim V/d \Rightarrow \varepsilon=O(K) \tag{3.6}$$

Соотношение (3.6) является условием «двухтемпературности» течения, устанавливающим связь между ε и K.

Перейдем к вычислению более высоких приближений метода Чепмена — Энскога. Используя соотношения (1.3), (1.4), (2.2), (3.3), $\Phi[F^{(0)}f^{(0)}]=0$, $E(I_1)=0$, известным [9] способом получим следующий алгоритм решения уравнения (2.9):

$$C_i\frac{\partial F^{(m)}}{\partial x_i}-\frac{\partial V_i}{\partial x_j}C_j\frac{\partial F^{(m)}}{\partial C_i}+\sum_{r=0}^{m}\left\{\frac{D_rF^{(m-r)}}{Dt}-\frac{d_rV_i}{dt}\frac{\partial F^{(m-r)}}{\partial C_i}-\right. \tag{3.7}$$

$$\left.-\Sigma(F^{(r)}f^{(m-r)})\right\}-\sum_{r=1}^{m\geqslant 1}J(F^{(r)}F^{(m-r+1)})=J(F^{(0)}F^{(m+1)}+F^{(m+1)}F^{(0)})$$

$$D_0N/Dt=-N\nabla\mathbf{V},\quad d_0\mathbf{V}/dt=-R^{-1}\nabla P,\quad D_{m\geqslant 1}N/Dt=0$$

$$R\frac{d_{m\geqslant 1}V_i}{dt}=-\frac{\partial P_{ij}^{(m)}}{\partial x_j}+\sum_{r=0}^{m}\Phi_i^{(\mathrm{II})}[F^{(r)}f^{(m-r)}],$$

$$\Phi_i^{(\mathrm{II})}\equiv\int MC_i\,\Sigma(Ff)\,d\mathrm{C}=\Phi_i-\Phi_i^{(\mathrm{I})},$$

$$\frac{3}{2}Nk\frac{D_{m\geqslant 1}T_M}{Dt}=-P_{ij}^{(m)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\frac{\partial Q_i^{(m)}}{\partial x_i}+\sum_{r=0}^{m}E[F^{(r)}f^{(m-r)}]$$

$$R\frac{D_0V_i}{Dt}=-\frac{\partial(P+p)}{\partial x_i},\quad \frac{D_{m\geqslant 1}V_i}{Dt}=\frac{d_{m\geqslant 1}V_i}{dt}+\frac{1}{R}\sum_{r=0}^{m}\Delta_i[F^{(r)}f^{(m-r)}] \tag{3.8}$$

Уравнения (3.7) имеют те же свойства, что и в случае однокомпонентного (простого) газа [9], в частности три собственные функции. В силу последнего свойства по $F^{(0)}$ вычисляются N, V, T_M, соответствующие интегралы от $F^{(m)}$ при $m\geqslant 1$ равны нулю. Формулы (3.8) необходимы при разбиении оператора DF/Dt, так как в него через «скоростные» слагаемые функций $F^{(m)}$, $m\geqslant 1$, входит $D\mathbf{V}/Dt$. Чтобы выделить асимптотически главное значение Φ, введена величина $\Delta\equiv\Phi^{(\mathrm{I})}+\nabla p$. Действительно, из формулы (1.5) при $\varepsilon\ll 1$, $K\ll 1$ следует

$$\Phi\approx\Phi^{(\mathrm{I})}\approx-\nabla p \tag{3.9}$$

Если $\varepsilon=O(K)$, то для получения однопараметрического разложения нужно представить Σ, E и т. д. рядами по ε

$$(\Sigma;\Phi^{(\mathrm{II})};E)=\sum_{r=2}^{\infty}(I_r;\Phi_r^{(\mathrm{II})};E_r),\quad \Phi_r^{(\mathrm{II})}\equiv\Phi^{(\mathrm{II})}(I_r),\quad E_r\equiv E(I_r)$$

и произвести в левой части уравнений (3.7) замену

$$\sum_{r=0}^{m}(\Sigma;E;\Phi^{(\mathrm{II})})[F^{(r)}f^{(m-r)}]\to\sum_{r=0}^{p}(I_s;E_s;\Phi_s^{(\mathrm{II})})[F^{(r)}f^{(n)}]$$

$$p=m+2-s,\quad n=p-r,\quad s=2,3,\ldots,m+2$$

Вычислив $F^{(1)}$, получим выражения для напряжений и тепловых потоков [5]: $P_{ij}^{(1)}=-2\mu_M(T_M)\langle\partial V_i/\partial x_j\rangle$, $Q_i^{(1)}=-\lambda_M(T_M)\partial T_M/\partial x_i$. Коэффициенты вязкости μ_M и теплопроводности λ_M вычисляются по формулам для соответствующего простого газа. Подставляя эти выражения и соотношения (3.5), (3.9) в (1.4), (3.3), получаем макроскопические уравнения для тяжелого компонента в приближении, аналогичном приближению Навье – Стокса [5, 6, 10].

В следующем приближении интерес представляют, в основном барнеттовские напряжения, обусловленные производными от температуры и концентраций [11]. Для их вычисления следует применить обычную методику – интегрирование с весом левой части интегрального уравнения для $F^{(2)}$. Выделяя главные слагаемые по ε, можно показать, что

$$P_{ij}^{(2)}=\omega_3\left\langle\frac{\partial^2T_M}{\partial x_i\,\partial x_j}\right\rangle+\frac{\omega_4}{P}\left\langle\frac{\partial P}{\partial x_i}\frac{\partial T_M}{\partial x_j}\right\rangle+\frac{\omega_5}{T_M}\left\langle\frac{\partial T_M}{\partial x_i}\frac{\partial T_M}{\partial x_j}\right\rangle+\ldots \tag{3.10}$$

Здесь $\omega_n=\bar{\omega}_n\mu_M^2/RT_M$, $n=3,4,5$; значения $\bar{\omega}_n$ вычислены в [9].

Таким образом, эти слагаемые $P_{ij}^{(2)}$ также даются формулами для соответствующего простого газа.

Решение уравнения Больцмана (2.10) для легкого компонента строим аналогичным способом, однако не будем учитывать в уравнении для $f^{(1)}$ третий член левой части (2.10) в силу его малости; в противном случае получается неоправданное переусложнение решения [6]. Тогда получаем следующий алгоритм, обозначая $f^{(m)}=f^{(0)}\varphi^{(m)}$ для $m\geqslant1$:

$$c_i\frac{\partial f^{(m)}}{\partial x_i}-\frac{\partial V_i}{\partial x_j}c_j\frac{\partial f^{(m)}}{\partial c_i}+\sum_{r=0}^{m}\left\{\frac{D_rf^{(m-r)}}{Dt}-\frac{D_rV_i}{Dt}\frac{\partial f^{(m-r)}}{\partial c_i}-\right. \tag{3.11}$$

$$\left.-\sigma(f^{(m-r)}F^{(r)})\right\}-\sum_{r=1}^{m\geqslant1}J(f^{(r)}f^{(m-r+1)})=L(\varphi^{(m+1)})$$

$$L(\varphi^{(m+1)})\equiv J(f^{(0)}f^{(m+1)}+f^{(m+1)}f^{(0)})+J_0(f^{(m+1)})$$

$$\frac{D_0n}{Dt}=-n\nabla\mathbf{V},\quad\frac{D_0\mathbf{V}}{Dt}=0,\quad\frac{3}{2}kn\frac{D_0T_m}{Dt}=-p\nabla\mathbf{V}-E[F^{(0)}f^{(0)}]$$

$$\frac{D_{m\geqslant1}n}{Dt}=-\nabla(n\mathbf{v}^{(m)}),\quad R\frac{D_1\mathbf{V}}{Dt}=-\nabla P+\Phi[F^{(0)}f^{(1)}+F^{(1)}f^{(0)}]$$

$$R\frac{D_{m\geqslant2}V_i}{Dt}=-\frac{\partial P_{ij}^{(m-1)}}{\partial x_j}+\sum_{r=0}^{m}\Phi_i[F^{(r)}f^{(m-r)}]$$

$$\frac{3}{2}nk\frac{D_{m\geqslant1}T_m}{Dt}=-p_{ij}^{(m)}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}-\frac{\partial q_i^{(m)}}{\partial x_i}+\frac{3}{2}kT_m\frac{\partial}{\partial x_i}(nv_i^{(m)})-$$

$$-\sum_{r=0}^{m}\left\{\rho v_i^{(m-r)}\frac{D_r V_i}{Dt}+E[F^{(r)}f^{(m-r)}]\right\}$$

Из-за специфики интеграла Лоренца J_0 уравнения (3.11) имеют только две собственные функции $(1, c^2)$. Поэтому по $f^{(0)}$ определяются n, T_m; функции $f^{(k)}$ не дают вклада в эти величины $(k\geqslant 1)$. Нетрудно проверить выполнение условий разрешимости для (3.11) (интеграл J_0 не ортогонален к $\mathbf{c}$).

Важно иметь в виду, что формулы для $D_0 n/Dt$, $D_0 T_m/Dt$ и т. д. носят формальный характер: из дальнейшего [см. (3.21)] следует, что в общем случае они не являются газодинамическими уравнениями.

Для $\varphi^{(1)}$ получаем уравнение [5]

$$c_i\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_i}+2f^{(0)}\langle w_i w_j\rangle\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\left\{\frac{f^{(0)}}{p}\left(1-\frac{2}{3}w^2\right)E[F^{(0)}f^{(0)}]-\sigma(f^{(0)}F^{(0)})\right\}=L(\varphi^{(1)}) \tag{3.12}$$

Для каждого из трех слагаемых левой части имеют место отдельные уравнения, удовлетворяющие условиям разрешимости. В случае максвелловских молекул их решения [5] записываются соответственно в виде

$$\varphi^{(1)}=\frac{2}{c_m}w_i\left\{v_i^{(1)}-\left(\frac{5}{2}-w^2\right)\left[\frac{2}{5p}q_i^{(1)}-v_i^{(1)}\right]\right\}-2\mu_m p^{-1}\langle w_i w_j\rangle\partial V_i/\partial x_j+K(w^2) \tag{3.13}$$

$$\mathbf{v}^{(1)}=-D_{12}\nabla\ln p,\quad \mathbf{q}^{(1)}={}^5/_2 p\mathbf{v}^{(1)}-\lambda_m\nabla T_m \tag{3.14}$$

$$D_{12}\sim kT_m[\Omega_{12}^{(1)}(1)\rho]^{-1}\sim\mu_m/\rho \tag{3.15}$$

В (3.15) указаны порядки величин коэффициентов диффузии D_{12} и вязкости μ_m, выражения для всех коэффициентов даны в [5]. Если выполняется условие двухтемпературности (3.6), то в силу $MV^2/kT_m=O(1)$, $d\nabla\ln p=O(1)$ из (3.14), (3.15) имеем

$$\mathbf{v}^{(1)}=O(\mathbf{V}),\qquad \mathbf{q}^{(1)}=O(p\mathbf{V}),\qquad p_{ij}^{(1)}=O(\varepsilon^2 p) \tag{3.16}$$

Таким образом, относительная разность скоростей компонентов порядка единицы, члены уравнений (1.3), (3.4) с $\mathbf{v}$ и $\mathbf{q}$ — основного порядка величины, соответствующие слагаемые $\varphi^{(1)}$ — порядка $V/c_m=O(\varepsilon)$. В то же время сдвиговая вязкость оказывается эффектом более высокого («барнеттовского») приближения. Чтобы вычислить остальные слагаемые p_{ij} того же порядка, обратимся к уравнению для $f^{(2)}$. Используя тот же прием, что и для вычисления (3.10), в главном приближении по полиномам Сонина найдем

$$p_{ij}^{(2)}=-\frac{2\mu_m}{n}\int\langle w_i w_j\rangle\left[c_k\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_k}-J(f^{(1)}f^{(1)})\right]d\mathbf{c} \tag{3.17}$$

Используя (3.13), получим выражение, совпадающее с соответствующим результатом из [1], если в нем перейти к данным переменным

$$p_{ij}^{(1)}+p_{ij}^{(2)}=-2\mu_m\left\langle\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right\rangle-\frac{4}{5}\frac{\mu_m}{p}\left\langle\frac{\partial q_i^{(1)}}{\partial x_j}\right\rangle+\frac{\rho\mu_m}{\mu_m(N=0)}\langle v_i^{(1)}v_j^{(1)}\rangle \tag{3.18}$$

Отметим, что $(p_{ij}^{(1)}+p_{ij}^{(2)})/P_{ij}^{(1)}\sim\mu_m/\mu_M\sim\varepsilon$. В случае медленных [11] движений в соответствии с (3.10), (3.18) $P_{ij}^{(2)}/p_{ij}^{(2)}\sim\mu_M\nabla Q/\mu_m\nabla\mathbf{q}\sim\lambda_M/(\lambda_m\varepsilon)\sim$ ~ 1, так как коэффициент теплопроводности тяжелого газа $\lambda_M=\lambda_m O(\varepsilon)$. Для этих оценок достаточно воспользоваться результатами для лоренцова газа [9].

При построении алгоритма (3.11) специально оставлены внепорядковые слагаемые, с тем чтобы сопоставить результаты с результатами «правильного» разложения. Снова обратимся к (2.10), полагая $\varepsilon=O(K)$ и обозначая члены ряда через $f^{(0)}\psi^{(n)}$, $n=1, 2,\ldots$. Для $\psi^{(1)}$, $\psi^{(2)}$ получаются уравнения

$$c_i\partial f^{(0)}/\partial x_i=L(\psi^{(1)}) \tag{3.19}$$

$$\begin{gathered}2f^{(0)}\langle w_iw_j\rangle\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\left\{\frac{1}{p}f^{(0)}\left(1-\frac{2}{3}w^2\right)E[F^{(0)}f^{(0)}]-\sigma(f^{(0)}F^{(0)})\right\}-\\-J(f^{(0)}\psi^{(1)}f^{(0)}\psi^{(1)})+c_i\frac{\partial f^{(0)}\psi^{(1)}}{\partial x_i}-\frac{f^{(0)}}{n}\left\{\nabla(n\mathbf{v}^{(1)})+\right.\\\left.+\left(1-\frac{2}{3}w^2\right)\left[-\frac{\nabla\mathbf{q}^{(1)}}{kT_m}+\frac{3}{2}\nabla(n\mathbf{v}^{(1)})\right]\right\}=L(\psi^{(2)})\end{gathered} \tag{3.20}$$

В (3.20) операторы D/Dt исключены при помощи соотношений, получающихся при данном построении решения [см. также оценки (3.16)]

$$\begin{gathered}Dn/Dt=-n\nabla\mathbf{V}-\nabla(n\mathbf{v}^{(1)})\\\frac{3}{2}kn\frac{DT_m}{Dt}=-p\nabla\mathbf{V}-\nabla\mathbf{q}^{(1)}+\frac{3}{2}kT_m\nabla(n\mathbf{v}^{(1)})-E[F^{(0)}f^{(0)}]\end{gathered} \tag{3.21}$$

Именно эти уравнения необходимо применять для описания движения двухтемпературной смеси газов в асимптотически главном приближении по $K\to0$ (вместо уравнений Эйлера).

Уравнение (3.19) совпадает с уравнением для первого члена левой части (3.12) и имеет то же решение. Уравнения для первого и второго (в фигурных скобках) членов левой части (3.20) решаются отдельно и совпадают с соответствующими уравнениями из (3.12). Иначе говоря, имеет место сдвиг «внепорядковых» уравнений в уравнения более высоких приближений. Решив уравнение для первого слагаемого левой части (3.20), для остальных членов p_{ij} снова получаем (3.17) (заменяя $f^{(1)}$ на $f^{(0)}\psi^{(1)}$) и (3.18). Нетрудно продолжить (3.19), (3.20), дав общий алгоритм, включающий разложение σ, E и т. д. по $\varepsilon=O(K)$, как было сделано применительно к уравнениям (3.7).

В заключение подчеркнем некоторые качественные особенности течений смеси газов с сильно различающимися массами. Как известно, процесс установления равновесного состояния в такой смеси разделяется на несколько этапов: сначала максвеллизуется легкий компонент, затем тяжелый, после чего происходит выравнивание температур. На последнем этапе относительная разность скоростей компонентов $v/V\ll1$, ибо ее время релаксации много меньше времени релаксации разности температур τ_T. Однако такая простая картина имеет место в пространственно однородном случае. В неоднородном потоке разность скоростей компонентов $\mathbf{v}$ на гидродинамическом масштабе выражается через производные от гидродинамических переменных, однако $v/V\sim1$, если $\tau_T\sim d/V$. Таким образом, двухтемпературная газодинамика описывает течения с относительной разностью скоростей компонентов смеси порядка единицы, что имеет важное практическое значение. В то же время это описание является односкоростным, так как «независима» только одна скорость $\mathbf{V}$.

В условиях реализации двухтемпературности ($\tau_T \sim d/V$) обычные уравнения Эйлера несправедливы: нужно учитывать не только релаксационные члены в уравнениях для температур, но и теплопроводность и диффузию легкого газа, т. е. применять уравнения (3.21). При расчете двухтемпературных течений остальными диссипативными эффектами (особенно p_{ij}, Q_i) обычно пренебрегают [12]. Качественно такие течения близки к течениям полностью ионизованной плазмы, однако здесь концентрации могут значительно различаться.

Автор благодарен Н. К. Макашеву и В. А. Жарову за плодотворные обсуждения.

Поступила 16 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *Goebel C. J., Harris S. M., Johnson E. A.* Two-temperature disparatemass gas mixtures: a thirteen moment description. Phys. Fluids, 1976, vol. 19, No. 5.
2. *Johnson E. A.* Effect of cross-sectional mass dependence in the theory of disparate-mass gas mixtures. Phys. Fluids, 1978, vol. 21, No. 7.
3. *Petit J.-P., Darrozes J.-S.* Une nouvelle formulation des équations du mouvement d'un gas ionisé dans un régime dominé par les collisions. J. Méc., 1975, vol. 14, No. 4.
4. *Жаров В. А.* Функция распределения электронов в переменном внешнем электрическом поле в слабоионизованной движущейся молекулярной плазме. Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1954.
5. *Галкин В. С.* Применение метода Чепмена – Энскога к случаю двухтемпературной бинарной смеси газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 6.
6. *Chmieleski R. M., Ferziger J. H.* Transport properties of a nonequilibrium partially ionized gas. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2.
7. *Митчнер М., Кругер Ч.* Частично ионизованные газы, § 5, гл. 7. М., «Мир», 1976.
8. *Lo Surdo C.* Collision integral between particles of disparate mass. J. Plasma Phys., 1971, vol. 6, No. 1.
9. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
10. *Брагинский С. И.* Явления переноса в плазме. В сб.: Вопросы теории плазмы, вып. 1. М., Госатомиздат, 1963.
11. *Коган М. Н., Галкин В. С., Фридлендер О. Г.* О напряжениях, возникающих в газах вследствие неоднородности температуры и концентраций. Новые типы свободной конвекции. Усп. физ. наук, 1976, т. 119, вып. 1.
12. *Цендин Л. Д.* О двухтемпературной гидродинамике для газовых смесей с большой разницей в массах компонент. ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 3.