

**КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ В АЭРОДИНАМИКЕ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА**

**А. К. АРТАМОНОВ, В. Н. АРХИПОВ, В. Г. ФАРАФОНОВ**

(Москва)

При обработке экспериментальных и теоретических данных по аэродинамике и теплообмену в разреженном газе разные авторы используют различные критерии подобия. Эти критерии получены в основном при анализе упрощенных уравнений Навье — Стокса. В работе [1] из уравнения Больцмана в качестве критерия подобия получено число Рейнольдса  $Re_0$ , в котором коэффициент вязкости определен при температуре торможения. В настоящей работе также из уравнения Больцмана при выборе иных, чем в [1], характерных параметров получен критерий подобия, введенный впервые в работе Ченга [2], посвященной анализу уравнений тонкого вязкого ударного слоя. Показано, что при определенных значениях характерной температуры и зависимостях коэффициента вязкости от температуры могут быть получены практически все критерии подобия, используемые при обработке результатов исследований по аэродинамике и теплообмену в разреженном газе.

1. Рассматриваются течения совершенного газа. При степенном законе взаимодействия молекул  $\varphi = K/r^{s-1}$ , где  $\varphi$  — потенциал взаимодействия,  $r$  — межмолекулярное расстояние, уравнение Больцмана можно записать в виде [3]

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left[ \frac{4(s-1)K}{m} \right]^{2\alpha} \times \\ \times \int (f' f'_i - f f_i) g^{\alpha(s-5)} \rho^* d\rho^* d\varepsilon^* d\xi_1, \quad \alpha = \frac{1}{s-1}$$

Здесь  $f$  — функция распределения;  $x_1, x_2, x_3$  — пространственные координаты;  $\xi$  ( $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ) — абсолютная скорость молекулы;  $m$  — масса молекулы;  $g$  — относительная скорость сталкивающихся молекул;  $\rho^*$  — безразмерный параметр, связанный с прицельным расстоянием  $b$ ;  $\varepsilon^*$  — угол в цилиндрической системе координат, применяемой при выводе уравнения Больцмана.

В уравнении (1.1) перейдем к безразмерным величинам, полагая

$$(1.2) \quad x = x^* L, \quad \xi = \xi^* U_\infty, \quad g = g^* a_*, \quad f = f^* \frac{n_\infty}{a_*^3}, \quad d\xi_1 = a_*^3 d\xi_1^*$$

Здесь  $L$  — характерная длина;  $n_\infty, U_\infty$  — число частиц в единице объема и скорость набегающего потока;  $a_*$  — скорость звука, соответствующая некоторой характерной температуре  $T_*$ . Подставляя (1.2) в (1.1) и воспользовавшись выражением, связывающим коэффициент вязкости газа  $\mu$  с температурой  $T$  при степенном законе взаимодействия (см., например, [4]), получим

$$(1.3) \quad \sum_{i=1}^3 \xi_i^* \frac{\partial f^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{Kn} \int (f'^* f'_i{}^* - f^* f_i^*) g^{*\alpha(s-5)} \rho^* d\rho^* d\varepsilon^* d\xi_1^*$$

$$(1.4) \quad \frac{1}{\text{Кп}} = \frac{5\sqrt{k}m(4k/m)^{2\alpha}n_{\infty}a_*^{\alpha(s-5)}LT_*^{1/2\alpha(s+3)}}{8\sqrt{\pi}\Gamma(4-2\alpha)A^{(2)}(s-1)\mu_*U_{\infty}}$$

Здесь  $k$  — постоянная Больцмана,  $\Gamma$  — гамма-функция,  $A^{(2)}$  — функция, затабулированная в [5],  $\mu_* = \mu(T_*)$ .

Так как  $a^2 = \gamma k T / m$  ( $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей), то

$$(1.5) \quad \frac{1}{\text{Кп}} = \frac{5k^2\gamma^{1/2\alpha(s-5)}4^{2\alpha}Ln_{\infty}T_*}{\sqrt{\pi}\mu_*U_{\infty}\Gamma(4-2\alpha)A^{(2)}(s-1)}$$

Умножаем и делим правую часть (1.5) на произведение  $U_{\infty}a_{\infty}^2\mu_{\infty}m$ , где  $a_{\infty}$  — скорость звука в набегающем потоке,  $\mu_{\infty} = \mu(T_{\infty})$ ,  $T_{\infty}$  — температура в набегающем потоке. Тогда

$$(1.6) \quad \frac{1}{\text{Кп}} = \frac{5k\gamma^{1/2\alpha(s-5)}4^{2\alpha}Ln_{\infty}T_*}{8\sqrt{\pi}\Gamma(4-2\alpha)A^{(2)}(s-1)}$$

$$(1.7) \quad k^2 = \frac{\text{Re}_{\infty}}{\gamma M_{\infty}^2} \frac{\mu_{\infty}T_*}{\mu_*T_{\infty}}, \quad \text{Re}_{\infty} = \frac{\rho_{\infty}U_{\infty}L}{\mu_{\infty}}, \quad M_{\infty} = \frac{U_{\infty}}{a_{\infty}}$$

Критерий подобия (1.7) был получен в [2]; он дает хорошую корреляцию данных по теплообмену в пограничном слое и в критической точке затупленных тел, обтекаемых разреженным газом (см., например, [6]).

Течения газов при одинаковых значениях  $s$  и  $\gamma$  подобны, если числа Кнудсена  $\text{Кп}$ , определенные соотношением (1.6), будут также одинаковы. При этом, конечно, необходимо выполнение геометрического подобия и подобия граничных условий.

Если исследовать обычные краевые условия [3] для уравнения Больцмана — максвелловскую функцию распределения в набегающем потоке и граничные условия на поверхности обтекаемого тела, то при выбранных выше характерных параметрах  $n_{\infty}$ ,  $U_{\infty}$ ,  $T_*$  к числу критериев подобия добавятся  $M_{\infty}^2$ ,  $T_*/T_{\infty}$  и  $T_w/T_{\infty}$ , где  $T_w$  — температура поверхности.

Следует отметить, что множитель при  $k^2$  в (1.6) для максвелловских молекул ( $s=5$ ) не зависит от отношения удельных теплоемкостей. Это характерно для газов при низких температурах. Для газов при высоких температурах  $s=12.73$  ( $\mu \sim T^{0.67}$ ) и упомянутый множитель пропорционален  $\gamma^{1/2}$ , т. е. слабо зависит от  $\gamma$ . Вследствие этого можно предположить, что при использовании  $k^2$  в качестве критерия подобия будут хорошо коррелировать между собой данные, получаемые при разных  $\gamma$ .

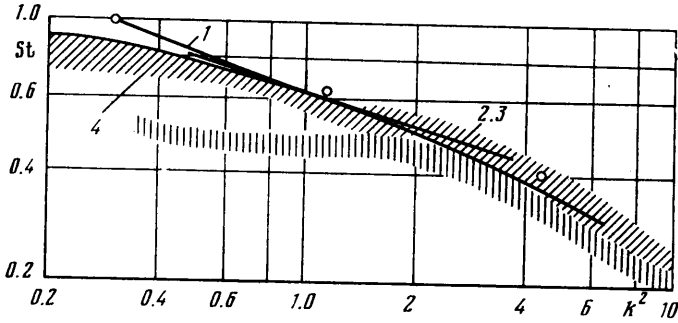
2. Приведенный вывод формулы (1.6) не налагает никаких условий на выбор характерной температуры  $T_*$ . Эта величина может быть определена из каких-либо других соображений, например из условия наилучшей корреляции теоретических и (или) экспериментальных данных. Вообще говоря, характерная температура  $T_*$  в разных задачах должна быть различной. В качестве  $T_*$  в разных работах применялись величины  $1/2(T_0+T_w)$  и  $1/6(T_0+3T_w)$ , где  $T_0$  — температура торможения.

Покажем, что из (1.7) при различных характерных температурах могут быть получены другие критерии подобия течений разреженного газа. Отметим, что

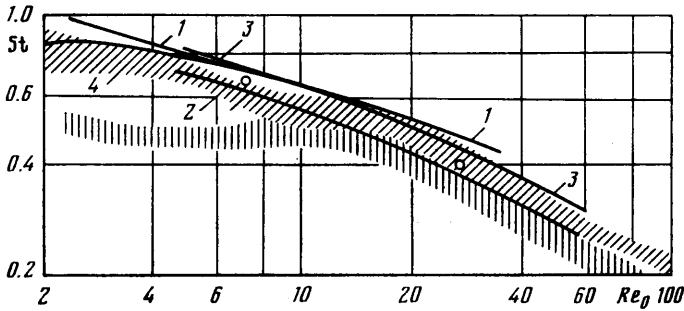
$$k^2 = \frac{\text{Re}_0}{\gamma M_{\infty}^2} \frac{\mu_0 T_*}{\mu_* T_{\infty}}, \quad \text{Re}_0 = \frac{\rho_{\infty} U_{\infty} L}{\mu_0}, \quad \mu_0 = \mu(T_0)$$

Если  $T_* = T_0$ , то при  $M_{\infty}^2 \gg 1$

$$k^2 = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \text{Re}_0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Критерий подобия  $Re_0$  используется авторами работы [1] при представлении экспериментальных данных по аэродинамике и теплообмену в разреженном газе.

При  $\mu \sim \sqrt{T}$  и  $T_* = T_0$  в качестве критерия подобия из (1.7) получаем критерий Кнудсена  $k^2 \sim Re_\infty / M_\infty \sim Kn_\infty^{-1}$ . Таким образом, для молекул-твердых сфер критерии  $Re_0$  и  $Kn_\infty$  эквивалентны.

Если  $T_* = \frac{1}{2}(T_0 + T_w)$  и  $M_\infty^2 \gg 1$ , то

$$k^2 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} Re_0 (T_w \sim T_0), \quad k^2 = \frac{\gamma - 1}{4\gamma} 2^n Re_0 (T_w \ll T_0)$$

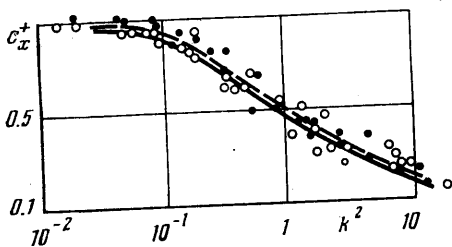
Здесь  $n$  — показатель степени в зависимости коэффициента вязкости от температуры. Отсюда видно, что если рассматривать по отдельности данные, соответствующие  $T_w \sim T_0$ , и данные, соответствующие  $T_w \ll T_0$ , то переход от критерия  $k^2$  к критерию  $Re_0$  сводится только к изменению масштаба; если же рассматривать обе эти группы данных одновременно, то переход от одного критерия к другому сопровождается смещением одной группы данных относительно другой группы.

При  $M_\infty^2 \gg 1$  и  $T_* = T_2$

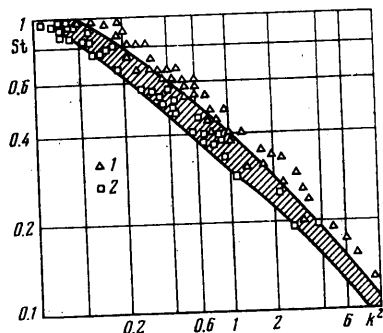
$$k^2 \sim Re_2 = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_2}, \quad \mu_2 = \mu(T_2)$$

Здесь  $T_2$  — температура за прямым скачком уплотнения.

$$T_* = T_w: k^2 \sim Re \frac{T_w}{T_\infty}, \quad Re_w = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_w}, \quad \mu_w = \mu(T_w) \quad T_* = T_\infty: k^2 \sim Re_\infty / M_\infty^2.$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Эквивалентный критерий подобия  $M_\infty/\sqrt{Re_\infty}$  использован в ряде работ. Например, в [7] при анализе данных по продольному обтеканию пластин разреженным газом обнаруживается неплохая корреляция экспериментальных данных в широком диапазоне изменения этого критерия. Этот же критерий подобия может быть получен из (1.7) для максвелловских молекул ( $\mu \sim T$ ) независимо от выбора характерной температуры  $T_*$ .

Таким образом, критерий подобия (1.7) является более общим по сравнению с другими широко применяемыми критериями подобия течений разреженного газа.

Отметим, что при приведенных выше характерных температурах критерии подобия в крайних условиях  $T_*/T_\infty$  и  $T_w/T_\infty$  можно выразить через критерии подобия  $M_\infty$  и  $T_w/T_0$ .

3. В результате проведенного анализа следует ожидать, что данные по аэродинамике и теплообмену в переходной области течений разреженного газа, полученные в широком диапазоне изменения параметров, определяющих обтекание тел, должны достаточно хорошо коррелировать между собой при использовании комплекса  $k^2$  в качестве критерия подобия. Ниже приводятся некоторые примеры. Рассматривается обтекание затупленных тел гиперзвуковым потоком разреженного газа. Диапазон возможного изменения температуры в таких задачах — от  $T_0$  до  $T_w$ . Поэтому в качестве характерной температуры в  $k^2$  выбрана величина  $1/2(T_0 + T_w)$ .

На фиг. 1 и 2 приведены результаты расчетов числа Стантона  $St$  в критической точке сферы на основании уравнений Навье — Стокса (кривые 1–3) и уравнений теории «пучок — сплошная среда» [8] (кривая 4) как функции критериев подобия  $k^2$  и  $Re_0$ . Кривые 1 и 4 соответствуют условиям  $M_\infty=10$ ,  $n=1/2$ ,  $t_w=T_w/T_0=0.05$ ; кривая 2 —  $M_\infty=6.5$ ,  $n=1$ ,  $t_w=0.43$ ; кривая 3 —  $M_\infty=20$ ,  $n=1/2$ ,  $t_w=0.1$ ;  $\gamma=7/5$  для всех упомянутых случаев. Кроме того, приведены результаты расчетов на основании уравнений Навье — Стокса при  $\gamma=5/3$ ,  $M_\infty=10$ ,  $n=1/2$ ,  $t_w=0.05$ , представленные кружками. Видно, что критерий  $k^2$  хорошо коррелирует все расчетные данные, тогда как при обработке по критерию  $Re_0$  данные распадаются на группы. Для сравнения с результатами расчетов на фиг. 1 и 2 приведены экспериментальные данные (заимствовано из [9]). Прямая штриховка соответствует  $M_\infty=6-8$ ,  $t_w=0.43$ ; косая —  $M_\infty^2 \gg 1$ ,  $t_w=0.1$ .

На фиг. 3 приведен коэффициент сопротивления сферы  $c_x$ , полученный пересчетом данных работы [10]:  $c_x^+ = (c_x - c_{xc}) / (c_{xjm} - c_{xc})$ . Здесь  $c_{xc}$  — значение  $c_x$  в континуальной области,  $c_{xjm}$  — свободномолекулярное значение  $c_x$ . Светлые кружки соответствуют  $t_w \sim 1$ , темные —  $t_w \ll 1$ ;  $\gamma=7/5$ . Сплошная и

пунктирные кривые соответствуют приведенной в [10] эмпирической формуле при  $t_w=1$  и 0.2 соответственно.

Экспериментальные данные по теплообмену на плоском торце цилиндра, полученные при обтекании газами с различными отношениями удельных теплоемкостей [6], приведены на фиг. 4. Обозначения 1 соответствуют аргону, 2 — гелию, заштрихованная область — азоту.

Поступила 4 VII 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев В. Н., Коган М. Н., Перепухов В. А. О подобии и изменении аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях потока. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
2. Cheng H. K. Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds number. Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1961.
3. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
4. Гиршфельдер Дж., Кергисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Coleman G. T., Metcalf S. C., Berry C. J. Heat transfer to hemisphere cylinders and bluff cylinders between continuum and free molecular flow limits. In: Rarefied Gas Dynamics, Progress in astronautics and aeronautics, vol. 51, pt 1. Princeton, Princeton Univ. Press, 1977.
7. Boettcher R. D., Koppenwallner G., Legge H. Flat plate skin friction in the range between hypersonic continuum and free molecular flow. In: Rarefied Gas Dynamics. Progress in astronautics and aeronautics, vol. 51, Pt 1. Princeton, Princeton Univ. Press, 1977.
8. Артамонов А. К., Архипов В. Н. Обтекание сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа. Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6.
9. Гусев В. Н., Никольский Ю. В. Экспериментальное исследование теплопередачи в критической точке сферы в гиперзвуковом потоке разреженного газа. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 1.
10. Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А. Прикладная динамика разреженного газа. М., «Машиностроение», 1977.