МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 • 1981

УДК 533.7

# КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГАЗОВЗВЕСИ

Ю. П. ЛУНЬКИН, В. Ф. МЫМРИН

*(Ленинград)*

Предложена кинетическая модель описания мелкодисперсной газовзвеси. Влияние твердых частиц на несущий газ учитывается путем введения в кинетическое уравнение столкновительного оператора специального вида. Для решения полученного кинетического уравнения развита модификация метода Чепмена – Энскога, которая позволяет найти решение, не используя предположения о малости влияния твердых частиц на газ. В результате получены в конечном виде выражения для эффективных коэффициентов переноса мелкодисперсных газовзвесей. Исследовано влияние примеси заряженного аэрозоля на свойства переноса ионизованного газа. Полученные результаты использованы для нахождения полей газодинамических параметров при сверхзвуковом обтекании затупленного тела газом с частицами.

1. Чтобы получить замкнутую систему уравнений, в которой с единой точки зрения учтено взаимодействие фаз при совместном движении, необходимо обратиться к теории, описывающей движение газа и частиц на микроскопическом уровне [1].

Будем для простоты рассматривать газовзвесь как смесь газовых молекул одного сорта и монодисперсных твердых частиц. Введем обычным образом функцию распределения газовых молекул по скоростям $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Уравнение, описывающее изменение этой функции, имеет следующий вид:

$$Df=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{F}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right)f=I_{gg}+I_{gp} \tag{1.1}$$

$$I_{gg}=\int\int(f'f_1'-ff_1)gb\,db\,d\psi\,d\mathbf{v}_1 \tag{1.2}$$

Интеграл столкновений $I_{gp}$, описывающий изменение $f$ за счет столкновений молекул с поверхностью твердых частиц, представим в явном виде на основании следующих предположений: 1) считается, что режим обтекания частиц взвеси является свободномолекулярным, 2) процесс взаимодействия молекул с поверхностью частиц описывается моделью диффузного отражения, 3) хаотическим движением твердых частиц пренебрегаем. Тогда

$$I_{gp}=n_pr_p^2\left\{\int\limits_{\mathbf{gk}<0}(\mathbf{gk})f\,d\mathbf{k}-\right. \left.-\int\limits_{\mathbf{gk}>0}\int\limits_{\mathbf{g'k}<0}(\mathbf{g'k})f'\frac{(\mathbf{gk})}{2\pi}\left(\frac{m}{\varkappa T_w}\right)^2e^{-mg^2/2\varkappa T_w}\,d\mathbf{k}\,d\mathbf{g}'\right\} \tag{1.3}$$

Здесь $n_p$ – числовая плотность частиц взвеси, $\mathbf{g}=\mathbf{v}-\mathbf{u}_p$, $\mathbf{u}_p$ – средняя скорость частиц в данной точке потока, $\mathbf{k}$ – локальный вектор к поверхности частицы, $T_w$ – температура поверхности частицы.

Третье предположение позволяет ограничиться при рассмотрении фазы твердых частиц газодинамическими уравнениями для низших моментов функции распределения, которые получаются осреднением по скоростям уравнения для функции распределения частиц

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_p\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}+\mathbf{F}_p\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_p}\right)f_p=I_{pg} \tag{1.4}$$

с учетом соотношений

$$\begin{gathered}\int m\mathbf{v}I_{gp}\,d\mathbf{v}=-\int m_p\mathbf{v}_pI_{pg}\,d\mathbf{v}_p\\ \int m\frac{v^2}{2}I_{gp}\,d\mathbf{v}=-\int m_p\left(\frac{v_p^2}{2}+c_pT_w\right)I_{pg}\,d\mathbf{v}_p\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь $m$, $m_p$ — массы молекул и частиц соответственно; $c_p$ — удельная теплоемкость вещества частиц.

Однако для получения замыкающих соотношений в несущем газе необходимо решить кинетическое уравнение (1.1), которое в безразмерной форме имеет вид

$$\varepsilon Df=I_{gg}+\alpha I_{gp} \tag{1.6}$$

Здесь $\varepsilon=l/L$ — число Кнудсена, $\alpha=Gl\varphi/Ur_p$ — параметр, характеризующий влияние газовзвеси, $\varphi$ — объемная доля частиц, $G$ — средняя относительная скорость фаз, $U$ — масштаб гидродинамической скорости.

В рассматриваемом случае $l/r_p=\mathrm{Kn}_p>1$, $\varphi\leqslant1$, $G/U\geqslant0$. Последнее отношение может изменяться в довольно широких пределах. Следовательно, уравнение (1.6) содержит два независимых параметра и нельзя, вообще говоря, утверждать, что эффект воздействия частиц на молекулы газа носит характер возмущения.

Решение уравнения (1.6) ищем в виде ряда по степеням малого параметра

$$f=f_0+\varepsilon f_1+\ldots \tag{1.7}$$

Если $\alpha$ есть величина порядка $\varepsilon$, то нулевой член разложения (1.7) есть функция Максвелла

$$f_0=n\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m}{2\varkappa T}(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2\right\} \tag{1.8}$$

Выясним вопрос, будет ли выражение (1.8) равномерно пригодным для всякого $\alpha$ из интервала $\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant1$, т. е. в том случае, когда равновесие внутри газа устанавливается быстрее или по крайней мере одновременно с равновесием газа и частиц.

Для этой цели воспользуемся уравнениями переноса нулевого порядка. В частности, из уравнения неразрывности для молекул, модуль скорости которых не превышает некоторой произвольной величины $g_0$, можно найти связь между характерными величинами эмиссионной и адсорбционной составляющими интеграла столкновений $I_{gp}(f_0)$, т. е. из уравнения

$$\frac{dn(g_0)}{dt}+n(g_0)(\nabla\mathbf{u})=n_pr_p^2\{ng_0a_--nGa_+\} \tag{1.9}$$

$$a_-=\int\limits_{\mathbf{g}_0\mathbf{k}<0}\frac{(\mathbf{gk})}{ng_0}f_0\,dg\,d\mathbf{k},\qquad a_+=\int\limits_{\mathbf{g}_0\mathbf{k}>0}f_w(\mathbf{gk})\,dg\,d\mathbf{k} \tag{1.10}$$

$$nG=\int\limits_{\mathbf{gk}<0}(\mathbf{gk})f_0\,d\mathbf{k} \tag{1.11}$$

следует соотношение $\varepsilon \sim \alpha(g_0 a_- - a_+)$ или в размерном виде

$$ng_0 = nG[1+O(\varepsilon/\alpha)] \tag{1.12}$$

Подставляя в $I_{gp}(f_0)$ выражение для $f_2$ и учитывая соотношение между нормирующими множителями (1.12), находим что для любого $\alpha \leqslant 1$ $\alpha I_{gp}(f_0) \sim O(\varepsilon)$. Таким образом, (1.8) представляет собой равномерно пригодное нулевое приближение с погрешностью порядка $O(\varepsilon)$ для любого $\alpha \leqslant 1$. Теперь на основании сделанных оценок нетрудно получить уравнение для функции распределения в первом приближении

$$Df_0 - I_{gp}(f_0) = I_{gg}(f_0 f_1) + I_{gg}(f_1 f_0) + I_{gp}(f_1) \tag{1.13}$$

Решая уравнение (1.13) в соответствии с модифицированным методом Чепмена — Энскога [2], найдем выражение для $f_1$, а зная явный вид $f_1$, можно получить выражения тензора напряжений $\mathbf{P}$ и вектора теплового потока $\mathbf{q}$, входящие в уравнение Навье — Стокса для несущего газа

$$\mathbf{P} = m\int f_1 \mathbf{CC}\, d\mathbf{v} = -2\mu^*(\nabla\mathbf{u} - \mathbf{L}_2)$$

$$\mathbf{q} = \frac{m}{2}\int f_1 C^2 \mathbf{C}\, d\mathbf{v} = -\lambda^*(\nabla T - \mathbf{L}_3)$$

$$\mu^* = \mu\left\{1 + \frac{n_p}{n} r_p^2 \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{-1/2} \frac{[8e^{-s^2} + (8s^2 + 8 - 2\gamma^{-1})s^{-1}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\, s]}{12\,\Omega_1^{(2)}(2)}\right\}^{-1}$$

$$\lambda^* = \lambda\left\{1 + \frac{n_p}{n} r_p^2 \left(\frac{m}{2\pi\varkappa T}\right)^{-1/2} \frac{[e^{-s^2}(s^2 - 3 + 2\gamma^{-1}) - (4s^2 + 5 + \gamma^{-1})s^{-1}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\, s]}{4\Omega_1^{(2)}(2)}\right\}^{-1}$$

$$s^2 = \frac{m}{2\varkappa T}(u - u_p), \qquad \gamma = \frac{T}{T_w} \tag{1.14}$$

Здесь $\lambda$, $\mu$ — коэффициенты теплопроводности и вязкости чистого газа, $\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{L}_3$ — коэффициенты разложения $I_{gp}(f_0)$ по неприводимым тензорам [1].

Результаты, приведенные в этом разделе, получены в предположении о монодисперсности газовзвеси, однако это ограничение не является принципиальным. Аналогично могут быть получены коэффициенты переноса газовзвеси, в которой дисперсная фаза состоит из нескольких различающихся по размерам фракций.

**2.** Изложенный выше подход может быть обобщен и на тот случай, когда несущая фаза — ионизованный газ [3]. При этом частицы аэрозоля, как показывают эксперименты [4], приобретают значительный отрицательный заряд. Таким образом, есть основания полагать, что присутствие даже сравнительно небольшого количества частиц может существенно повлиять на процессы переноса.

Явный вид интеграла столкновений заряженных компонент газовой фазы с частицами, несущими заряд $Ze$ $(Z<0)$, найдем, вводя предположения, аналогичные использованным выше. Кроме того, считаем, что: а) упругое отражение электронов и ионов от поверхности частиц отсутствует, б) расстояние между частицами аэрозоля существенно больше дебаевского радиуса экранирования. При этих предположениях интеграл взаимодействия электронов с частицами имеет вид

$$I_{ep} = n_p r_p^2 \left\{\int\limits_{\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}>0} 2(\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}) f_w\, d\mathbf{k} + \int\limits_{\substack{\mathbf{g}\cdot\mathbf{k}<0 \\ g^2 \geqslant -\frac{2ze^2}{m_e r_p}}} (\mathbf{g}\cdot\mathbf{k})\left(1 + \frac{2ze^2}{m_e r_p g^2}\right) f_e\, d\mathbf{k}\right\} +$$

(2.1)

$$+n_p\left\{\int\limits_{\substack{0\\ g^2<-\frac{2ze^2}{m_e r_p}}}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}(f_e'-f_e)\,gb\,dbd\psi+\int\limits_{\substack{b_{\max}\\ g^2\geqslant-\frac{2ze^2}{m_e r_p}}}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi}(f_e'-f_e)\,gb\,dbd\psi\right\}$$

Здесь $b$, $b_{\max}$ — прицельный параметр и максимальный прицельный параметр, при котором электрон еще может попасть на поверхность аэрозольной части; первый интеграл в (2.1) описывает термоэлектронную эмиссию нагретой частицы.

Для конкретных вычислений потенциал взаимодействия электронов с частицами аппроксимируем потенциалом кулоновского типа. При вычислении коэффициентов переноса ионизованных газов необходимо иметь в виду еще и тот факт, что обмен энергией между электронной и ион-атомной компонентами затруднен вследствие большого различия масс. Поэтому электронная компонента может обладать температурой, существенно отличающейся от температуры тяжелых компонент газовой фазы.

Необходимая модификация метода Чепмена — Энскога, позволяющая учесть указанное различие температур, предложена в работе [5]. В соответствии с этим подходом уравнения Больцмана для тяжелых компонент можно рассматривать независимо от уравнения Больцмана для электронов и, следовательно, свойства переноса ион-атомной компоненты плазмы с примесью частиц вычисляются совершенно таким же образом, как и свойства переноса нейтрального газа с частицами. Что же касается функции распределения электронов $f_e$, то для двух первых коэффициентов разложения $f_e$ в ряд по $\varepsilon$ ($\varepsilon=l/L$ — малый параметр теории Чепмена — Энскога) получается следующая система интегральных уравнений:

$$I_{ee}(f_{e0}f_{e0})+\sum_{j\in i,a}n_j I_{ej}(f_{e0}\delta(\mathbf{g}))=0 \tag{2.2}$$

$$I_{ee}(f_{e0}f_{e1})+I_{ee}(f_{e1}f_{e0})+\sum_{j\in i,a}n_j I_{ej}(f_{e1}\delta(\mathbf{g}))+I_{ep}(f_{e1})= \tag{2.3}$$

$$=Df_{e0}-\sum_{j\in i,a}I_{ej}(f_{e0}f_{0j})-I_{ep}(f_{e0})$$

где $\delta(\mathbf{g})=\delta_1(\mathbf{g})/4\pi g^2$, $\delta_1(\mathbf{g})$ — дельта-функция Дирака.

Решением уравнения (2.2) является функция

$$f_{e0}=n_e\left(\frac{m_e}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m_e(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2\varkappa T_e}\right\} \tag{2.4}$$

где $\mathbf{u}$ — гидродинамическая скорость ион-атомной компоненты, а $T_e$ — независимый параметр, который можно отождествить с температурой электронной компоненты.

Уравнение (2.3) решается обычным образом — разложением решения в ряды по полиномам Сонина.

Если оставить в упомянутых разложениях по одному члену, получаются следующие выражения для коэффциентов электронной теплопроводности $\lambda_e^*$ и электропроводности $\vartheta_e^*$:

$$\lambda_e^*=\lambda\left\{1-\frac{n_p}{n_e}r_p^2\left(\frac{m_e}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{-1/2}\left[4\Omega_e^{(2)}(2)+n_e^{-1}\sum_{j\in i,a}n_j N(\Omega_{ej})\right]^{-1}\times\right.$$

$$\times[P_0(x)+P_1(x)\ln\Lambda_1-3.25x^2\ln\Lambda_2]\Big\}^{-1}$$

$$P_0(x)=e^x(2x^3-2x^2+8.5x-13)$$

$$P_1(x)=e^x(x^4+3x^3+3.25x^2)$$

$$N(\Omega_{ej})=50\Omega_{ej}^{(1)}(1)-40\Omega_{ej}^{(1)}(2)+8\Omega_{ej}^{(1)}(3)$$

$$\vartheta_e{}^*=\vartheta_e\left\{1-\frac{n_p}{n_e}r_p{}^2\left(\frac{m_e}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{-1/2}\left[8n_e{}^{-1}\sum_{j\in i,a}n_j\Omega_{ej}^{(1)}(1)\right]^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times[e^x(x^2\ln\Lambda_1+2x-4)-x^2\ln\Lambda_2]\right\}^{-1}$$

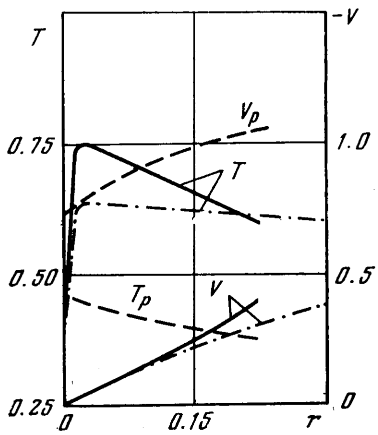
где $\lambda_e$, $\vartheta_e$ — соответствующие коэффициенты, вычисленные для ионизованного газа без примеси частиц,

$$x=\frac{Ze^2}{\varkappa r_pT_e},\qquad \Lambda_1=1+\left(\frac{2\varkappa T_e}{Ze^2}\right)^2\frac{\varkappa T_e}{4\pi n_e e^2},$$

$$\Lambda_2=1+\left(\frac{2\varkappa T_e}{Ze^2}\right)^2 r_p{}^2\left(1+\frac{Ze^2}{r_p\varkappa T_e}\right)$$

3. Проиллюстрируем развитую выше теорию на примере течения дисперсной смеси в ударном слое, образующемся у поверхности затупленных тел при сверхзвуковом обтекании [6].

Для несущего газа на ударной волне используем условие Ренкина — Гюгонио. Градиент касательной к поверхности тела компоненты скорости заимствуем из расчета обтекания затупленных тел чистым газом. На поверхности тела используем условия прилипания и непроницаемости, температуру поверхности задаем постоянной. Параметры частиц за отошедшей ударной волной примем равными их значениям в набегающем потоке. На фигуре представлены характерные результаты расчетов. Индексом $p$ отмечены параметры частиц, штрихпунктиром показаны результаты расчета для чистого газа.




Повышение температуры и давления газа при наличии частиц объясняется процессами межфазного обмена импульсом и энергией. Отметим заметное уменьшение толщины ударного слоя в запыленном газе. В приведенном варианте величины теплового потока к поверхности тела за счет теплопроводности газа $q/\rho_\infty v_\infty{}^3$, коэффициента трения $\tau/\rho_\infty v_\infty{}^2$ и отхода ударной волны $d/R$ ($R$ — радиус затупления) имеют следующие значения: 0.0294, 0.0268, 0.251. Эти же величины, найденные для чистого газа, равны соответственно 0.0131, 0.0180 и 0.301 ($M_\infty=2$, $\mathrm{Re}_\infty=11\,830$, $\varphi=10^{-6}$, $r_p=10^{-6}$ *м*).

Таким образом, приведенные результаты указывают на существенное влияние наличия в потоке твердых частиц на распределение газодинамических функций и теплообмен.

Поступила 28 VII 1980

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Луньким Ю. П., Мымрин В. Ф.* Применение кинетической теории для получения замкнутой системы уравнений динамики газовзвеси. Письма в ж. техн. физ., 1979, т. 5, вып. 3.
2. *Мацук В. А., Рыков В. А.* Распространение метода Чепмена – Энскога на смеси реагирующих газов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т. 18, № 1.
3. *Луньким Ю. П., Мымрин В. Ф.* Влияние аэрозольных частиц на процессы переноса в ионизованном газе. Ж. техн. физ., 1979, т. 49, вып. 4.
4. *Соу С.* Динамика заряженных суспензий. В сб.: Реология суспензий, М., «Мир», 1975.
5. *Chmieleski R. M., Ferziger J. H.* Transport properties of a nonequilibrium partially ionized gas. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2.
6. *Golovachov Ju P., Lunkin Ju. P., Mymrin V. F., Schmidt A. A.* Supersonic motion of bodies in dusty gas. Acta Astronautica, 1980, vol. 7, No. 3.