

**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 1 · 1981**

УДК 533.6.011.5

**МАЛЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ГАЗОВОГО ТЕЧЕНИЯ
В КАНАЛЕ СО СВЕРХЗВУКОВЫМ СОПЛОМ**

Д. А. МЕЛЬНИКОВ, А. С. ТУТУШКИН

(Москва)

Во многих задачах необходимы характеристики малых нестационарных возмущений газодинамических параметров, наложенных на стационарное течение. Впервые задача распространения малых продольных возмущений в дозвуковой части сопла была решена в работах [¹, ²] и трехмерных возмущений — в [³]. В указанных работах линеаризация уравнений проводилась относительно одномерного основного течения. При умеренных частотах эффекты нелинейности и двумерности для продольных возмущений невелики [⁴]. Экспериментальное исследование акустического импеданса в начале дозвуковой части сопла для трехмерных возмущений [⁵] подтверждает результаты расчетов [³], хотя для трехмерных возмущений описание основного течения одномерным является приближенным [⁶]. В работе [⁷] линеаризация уравнений в конической дозвуковой части производится относительно течения в источнике. Приведенные выше исследования были направлены в основном на получение значений акустического импеданса изоэнтропических безвихревых возмущений в начале дозвуковой части сопла — характеристики, необходимой для исследования устойчивости таких течений. В настоящей работе проведено изучение механизма распространения возмущений в дозвуковой и сверхзвуковой частях сопла, выявление характерных режимов с учетом влияния энтропии и завихренности возмущенного потока.

1. Представим, следуя [³, ⁸], все параметры в системе уравнений газовой динамики невязкого и нетеплопроводного газа с показателем адиабаты γ в виде суммы стационарного одномерного значения и трехмерного, зависящего от времени, возмущения. Используем систему координат, в которой в качестве продольной координаты примем потенциал скорости стационарного течения ψ , радиальной — функцию тока стационарного течения ϕ и θ — угол в азимутальном направлении. Эта система (ϕ, ψ, θ) однозначно связана с цилиндрической системой (x, r, θ) .

Введем обозначения: p , ρ , U , a , s , T , M — стационарные одномерные значения давления, плотности, скоростей газа и звука, энтропии, температуры и числа Маха; t , ω — время и круговая частота колебаний; u' , v' , w' , ρ' , p' , T' , s' — возмущения продольной, радиальной, тангенциальной компонент скорости, плотности, давления, температуры, энтропии. Все параметры удобно считать безразмерными: линейные размеры отнесены к r_* — радиусу критического сечения канала, скорости — к a_0 , плотности — к ρ_0 , давления — к p_0 , энтропии — к s_p , температуры — к T_0 , времени — к r_*/a_0 , частоты — к a_0/r_* . Здесь величины с нижним индексом нуль — соответствующие параметры торможения стационарного течения. Кроме того, возмущения компонент скорости отнесены еще и к U , $\rho U r$, $1/r$ соответственно, давления — к p , плотности — к ρ , температуры — к T . Исследуется распространение периодических пространственных волн фиксированной частоты. Воспользуемся комплексными переменными и представим зависимость возмущений от времени в виде экспоненциальной.

Решение системы линеаризированных уравнений газовой динамики, полученное методом разделения переменных, имеет вид

$$(1.1) \quad u' = \frac{d\Phi}{d\phi} K(\psi) N(\theta) \exp(i\omega t)$$

$$(1.2) \quad v' = [\Phi(\varphi) - S_* \zeta_2(\varphi) + (c_1 - \Phi_*) \zeta_0(\varphi)] \frac{dK}{d\varphi} N(\theta) \exp(i\omega t)$$

$$(1.3) \quad w' = [\Phi(\varphi) - S_* \zeta_2(\varphi) + (c_1 - \Phi_*) \zeta_0(\varphi)] K(\psi) \frac{dN}{d\theta} \exp(i\omega t)$$

$$(1.4) \quad p' = \frac{\chi^2}{a^2} \left[S_* \zeta_1(\varphi) - U^2 \frac{d\Phi}{d\varphi} - i\omega \Phi(\varphi) \right] K(\psi) N(\theta) \exp(i\omega t)$$

$$(1.5) \quad s' = S_* \zeta_0(\varphi) K(\psi) N(\theta) \exp(i\omega t)$$

$$\zeta_0(\varphi) = \exp \left(- \int_0^\varphi \frac{i\omega}{U} d\xi \right), \quad \zeta_1(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^\varphi \zeta_0(\xi) \frac{dU^2}{d\xi} d\xi$$

$$\zeta_2(\varphi) = \zeta_0(\varphi) \int_0^\varphi \frac{\zeta_1(\xi)}{U^2 \zeta_0(\xi)} d\xi, \quad \zeta_3(\varphi) = \frac{\zeta_1(\varphi)}{a^2 \zeta_0(\varphi)}$$

где $K(\psi) = J_v[\alpha_{vl}(\psi/\psi_w)^{1/2}]$ — функция Бесселя 1-го рода v -го порядка, α_{vl} — l -й корень уравнения $dJ_v(x)/dx=0$, нижний индекс w — соответствует стенке; $N(\theta) = \exp(iv\theta)$ — для бегущей волны, $N(\theta) = \cos(v\theta)$ или $\sin(v\theta)$ — для стоячей.

Постоянные c_1 , c_2 , S_* , Φ_* определяются из граничных условий, которые заданы в критическом сечении, т. е. при $\varphi=0$. Функция $\Phi(\varphi)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & U^2 (1-M^2) \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - M^2 \left(2i\omega + \frac{1}{a^2} \frac{dU^2}{d\varphi} \right) \frac{d\Phi}{d\varphi} + \\ & + \frac{1}{a^2} \left(\omega^2 - i\omega M \frac{\chi-1}{2} \frac{dU^2}{d\varphi} - \frac{\alpha_{vl}^2 a^2}{r^2} \right) \Phi(\varphi) = \\ & = -S_* \left[U^2 \zeta_0(\varphi) \frac{d\zeta_3}{d\varphi} + \frac{\alpha_{vl}^2}{r^2} \zeta_2(\varphi) \right] + W_* \zeta_0(\varphi) \frac{\alpha_{vl}^2}{r^2} \\ & W_* = -\Phi_* + c_1 \left(1 - \frac{v^2}{\alpha_{vl}^2} \right) + c_2 \frac{v^2}{\alpha_{vl}^2} \end{aligned}$$

Член с S_* в правой части уравнения (1.6) учитывает неизоэнтропичность возмущенного потока, а с W_* — его завихренность.

В рассматриваемом нестационарном течении при наличии возмущений энтропии в потоке газа происходит возникновение и уничтожение вихрей [8]. Общий вид решения для пространственного возмущения представляется собой ряд с двойной суммой. В частности, для возмущения давления имеем

$$(1.7) \quad p'(\varphi, \psi, \theta, t) = \frac{\chi^2}{a^2} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[S_* \zeta_1(\varphi) - \right. \\ \left. - U^2 \frac{d\Phi_{vl}}{d\varphi} - i\omega \Phi_{vl} \right] J_v \left(\alpha_{vl} \sqrt{\frac{\psi}{\psi_w}} \right) \exp(i\omega t + iv\theta)$$

В дальнейшем будем именовать возмущенные течения, характеризуемые числами v , l , — модой vl . Продольные возмущения будут модой 00 и т. д.

В данной задаче имеется пять искомых комплексных функций: u' , v' , w' , p' , s' . Уравнение (1.6) в критическом сечении имеет особенность, вы-

ражающуюся в равенстве нулю коэффициента при старшей производной. Условие регулярности решения в критическом сечении дает дополнительную связь между искомыми функциями [2, 10]

$$(1.8) \quad U_*^2 \left[2i\omega + \frac{1}{a_*^2} \left(\frac{dU^2}{d\varphi} \right)_* \right] \left(\frac{d\Phi}{d\varphi} \right)_* + \\ + \left[\omega^2 - M_*^2 \frac{\kappa-1}{2} i\omega \left(\frac{dU^2}{d\varphi} \right)_* - \frac{\alpha_{vl}^2 a_*^2}{r_*^2} \right] \Phi_* = W_* = W_* \frac{\alpha_{vl}^2 a_*^2}{r_*^2}$$

В связи с этим граничные условия должны быть заданы только для четырех комплексных функций.

В случае цилиндрической трубы постоянного радиуса решение (1.7) преобразуется к следующему виду:

$$(1.9) \quad p'(\varphi, \psi, \theta, t) = - \frac{\kappa^2}{a^2} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(U^2 \frac{d\Phi_{vl}}{d\varphi} + \right. \\ \left. + i\omega \Phi_{vl} \right) J_v \left(\alpha_{vl} \sqrt{\frac{\psi}{\psi_w}} \right) \exp(i\omega t + iv\theta) \\ \Phi_{vl} = b_1 \exp(k_1 \varphi) + b_2 \exp(k_2 \varphi) \\ k_{1,2} = i \left[\frac{\omega}{a^2(1-M^2)} \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{vl}^2}}{a^2 M (1-M^2)} \right], \quad \omega_{vl} = \frac{\alpha_{vl} a}{r} \sqrt{1-M^2}$$

Здесь b_1 и b_2 — произвольные комплексные постоянные, определяемые из граничных и начальных условий; $k_{1,2}$ — волновые числа (нижний индекс 1 соответствует знаку плюс, 2 — знаку минус); ω_{vl} — собственная частота пространственных колебаний в цилиндрической трубе при наличии потока движущегося газа. Из формулы (1.7) выпал член, связанный с возмущением энтропии. Точно так же выпадают члены с энтропией из уравнений (1.1)–(1.3). Это означает, что в цилиндрической трубе возмущения давления и скорости распространяются независимо от возмущений энтропии. При исследовании возмущений на частотах $\omega < \omega_{vl}$ в решении (1.7) появляется множитель, экспоненциально изменяющийся при увеличении φ . Этот факт показывает [11, 12], что в конце цилиндрической трубы достаточной длины при $\omega < \omega_{vl}$ возмущения моды vl отсутствуют.

Введем характерное для сопла Лаваля число Струхала $Sh = fd_*/U_*$, где $f = \omega/2\pi$ — частота распространения возмущения; d_* — диаметр критического сечения, U_* — критическая скорость. Ниже представлены для различных мод возмущенного течения величины $A = Sh_{vl} M_1 q(\lambda_1)^{-1}/\lambda_1$, где λ_1 и M_1 — коэффициент скорости и число Маха стационарного течения в цилиндрической трубе, $q(\lambda)$ — газодинамическая функция; числа Sh_{vl} для цилиндрической трубы с относительным диаметром $n = d_1/d_*$, где d_1 — диаметр трубы:

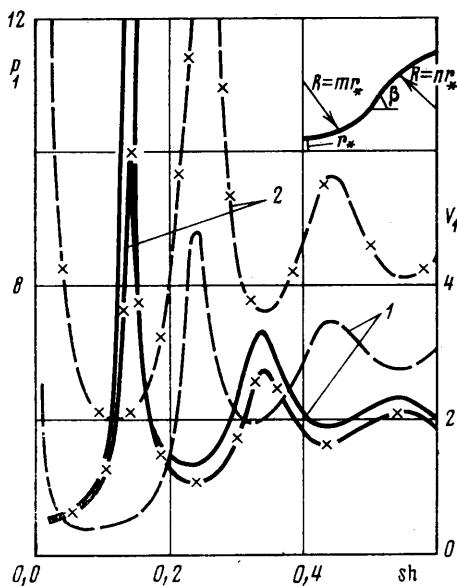
vl	A	$Sh_{vl} (n = 3)$
00	0	0
10	0.586	0.21
20	0.971	0.35
01	1.219	0.44
30	1.337	0.47
11	1.696	0.67

Отметим, что в цилиндрическом канале, заканчивающимся соплом Лаваля с фиксированным относительным диаметром n , при небольших числах Sh во входном сечении сопла могут существовать возмущения огра-

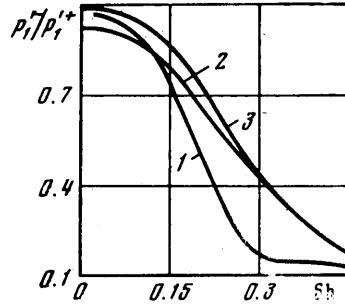
ниченного числа мод. Для $n=3$ при числах $Sh < 0.35$ могут существовать лишь моды 00 и 10. При возрастании числа Sh последовательно появляются более высокие моды (20, 01 и т. д.).

2. В задаче распространения малых продольных возмущений моды 00 компоненты возмущенной скорости $v' = w' = 0$. При численном анализе в качестве граничных условий считаем известными в критическом сечении сопла действительную и мнимую части амплитуды стоячей волны давления $\operatorname{Re} p_*'$ и $\operatorname{Im} p_*'$, энтропии $\operatorname{Re} s_*'$ и $\operatorname{Im} s_*'$. Выбором начала координат по времени обеспечим $\operatorname{Im} p_*' = 0$.

Результаты численного исследования изменения амплитуды продольных стоячих волн давления при прохождении через дозвуковую часть сверхзвукового осесимметричного сопла рассмотрим на примере дозвуковой части с параметрами (обозначения см. фиг. 1) $m=2$, $n=5$, $\beta_1=50^\circ$. На фиг. 1 приведены зависимости от числа Sh относительных амплитуд стоячих волн давления и скорости при $\phi=0$ (далее со звездочкой), отнесенных к амплитуде волны в начале дозвуковой части (с индексом 1): $P_1 = p_*'/p_1'$ — сплошная линия, $V_1 = u_*'/(u_1'\lambda_1)$ — штриховая линия. Отметим, что при изоэнтропическом рассмотрении продольных волн ($s_*'=0$) приведенные относительные амплитуды (кривые 1) не зависят от граничных условий. В кривой $P_1(Sh)$ при $s_*'=0$ имеется значительный первый максимум при $Sh \approx 0.14$ и второй — при $Sh \approx 0.34$, а в кривой $V_1(Sh)$ — первый минимум при $Sh \approx 0.08-0.12$ и второй — при $Sh \approx 0.32-0.34$. Для выяснения механизма образования этих экстремумов определим собственное время τ^+ и соответствующее ему число Sh^{+-} прохождения возмущений по дозвуковой части от ее начала по направлению потока со скоростью $a+U$ до



Фиг. 1



Фиг. 2

критического сечения и обратно к началу дозвуковой части со скоростью $a-U$. Для рассматриваемой геометрии дозвуковой части сопла $Sh^{+-}=0.094$. Формирование отраженных волн происходит по всей дозвуковой части, а не в критическом сечении. Поэтому совпадение чисел Sh , при которых имеет место первый экстремум $P_1(Sh)$ и $V_1(Sh)$, и Sh^{+-} является удовлетворительным. На фиг. 1 приведены относительные амплитуды стоячих волн при наличии энтропийных волн $\operatorname{Re} s_*'/p_*'=2.14$ (кривые 2).

Наличие энтропийных волн слабо влияет на характер кривых $P_1(\text{Sh})$ и $V_1(\text{Sh})$ (см. фиг. 1), практически не изменяет экстремальное число Sh, а величины относительных амплитуд давления и скорости заметно зависят от амплитуды энтропийных волн. Характер прохождения волны давления, скорости и энтропии через дозвуковую часть сопла остается неизменным и при других геометрических параметрах дозвуковой части.

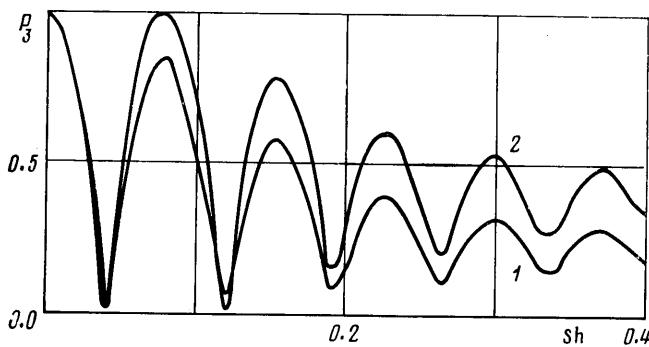
Результаты расчетов при различной геометрии дозвуковой части приведены в табл. 1.

На фиг. 2 приведены отношения амплитуд бегущих волн давления: отраженной к падающей p_1'/p_1^+ в начале дозвуковой части различной

Таблица 1

n	m	Sh^{+-}	$\text{Sh}(P_{1\max})$	$P_{1\max}$	$\text{Sh}(V_{1\min})$	$V_{1\min}$	Res_*/p_*
$\beta_1=50^\circ$							
5	2	0.094	0.14	21.0	0.08	0.01	0.00
5	2	0.094	0.14	12.0	0.43	0.05	2.14
$\beta_1=30^\circ$							
3	2	0.10	0.18	6.0	0.10	0.04	0.00
2	1	0.19	0.35	4.0	0.20	0.08	0.00

формы. Кривая 1 соответствует $n=3$, $\beta_1=30^\circ$, $s_*/p_*'=0$; кривая 2 — $n=5$, $\beta_1=50^\circ$, $s_*/p_*'=2.14$; кривая 3 — $n=5$, $\beta_1=50^\circ$, $s_*/p_*'=0$. Из результатов расчета следует, что при числах Sh > 0.4—0.5 амплитудой отраженной волны можно пренебречь и возмущенное течение в цилиндрическом канале фор-



Фиг. 3

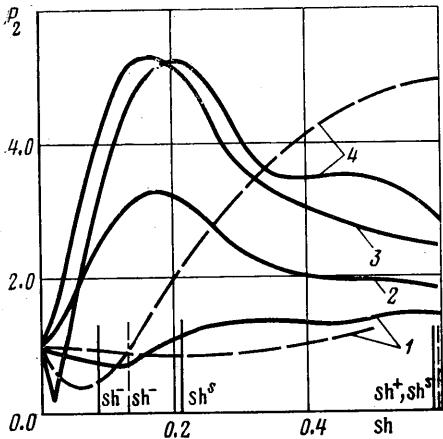
мируется только падающими бегущими волнами. Этот результат не зависит от наличия волн энтропии.

Стоячая волна давления в цилиндрическом канале формируется бегущими волнами с постоянными амплитудами $p_3'^+$ и $p_3'^-$, где индекс 3 относится к цилиндру.

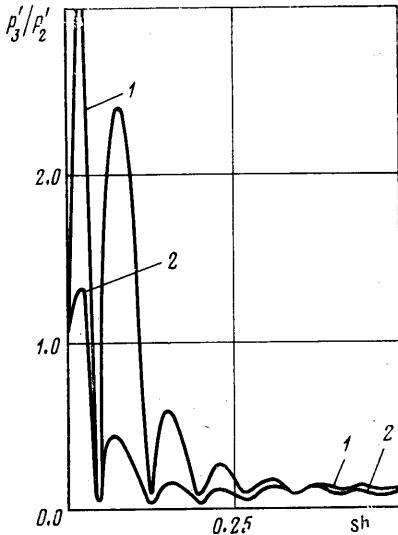
На фиг. 3 для сечения цилиндрического канала, отстоящего от начала дозвуковой части $m=2$, $n=5$, $\beta_1=50^\circ$ на величину $x_3=10$, приведены отношения амплитуды стоячей волны давления к амплитуде в критическом сечении. Кривая 1 соответствует $\text{Im } s_*/p_*'=0$, кривая 2 — $\text{Im } s_*/p_*'=2.14$. Минимумы и максимумы кривой $P_3(\text{Sh})=p_3'/p_*$ имеют приблизительно кратные частоты, слабо зависящие от характеристик волн энтропии. С увеличением длины цилиндрического канала экстремальные частоты Sh уменьшаются. Причины образования экстремумов безразмерной ампли-

туды стоячей волны давления P_3 в зависимости от числа Sh в сечении цилиндрического канала и в начале дозвуковой части (см. фиг. 1) общие.

Распространение малых продольных волн в сверхзвуковой части сопла описывается системой линеаризованных уравнений гиперболического типа, для которой при заданной форме сверхзвуковой части должны быть известны граничные условия в критическом сечении. Проведенное численное исследование показывает, что распространение продольных волн в сверхзвуковой части сопла сильнее зависит от волны энтропии, чем в до-



Фиг. 4



Фиг. 5

звуковой части. На фиг. 4 представлены в зависимости от числа Sh относительные амплитуды стоячей волны давления в конической сверхзвуковой части сопла с углами $\beta_2=10^\circ$ — сплошные линии и $\beta_2=30^\circ$ — штриховые линии в сечении, характеризуемом числом $M_2=4.56$ стационарного течения. Кривые 1 соответствуют $s^*/p_*'=0$, кривая 2 — $\text{Re } s^*/p_*'=1.15$, кривая 3 — $\text{Re } s^*/p_*'=2.14$, кривые 4 — $\text{Im } s^*/p_*'=2.14$. Для изоэнтропических возмущений основного потока относительная амплитуда волн давления $P_2=p_2'/p_*'$ изменяется слабо — от 0.7 до 1.5. При наличии волны энтропии $\text{Im } s^*/p_*'=2.14$ для конической сверхзвуковой части с углом $\beta_2=10^\circ$ имеется максимум в относительной амплитуде P_2 , превышающий величину 5 при числе $Sh \approx 0.2$.

Для выяснения механизма образования максимума определим характерные времена прохождения возмущений от критического сечения вниз по потоку до заданного сечения конической сверхзвуковой части со скоростями: $U+a$, $U-a$, U . Числа Струхала, соответствующие этим возмущениям, обозначим Sh^+ , Sh^- , Sh^* . Числа Sh^+ , Sh^- , Sh^* для углов $\beta_2=10$ и 30° показаны на фиг. 4 вертикальными отрезками сплошных и штриховых линий соответственно. В рассматриваемом случае при $\beta_2=10^\circ$ число $Sh^*=0.21$ и приблизительно соответствует экстремальному числу $Sh \approx 0.20$. При изменении амплитуды волны энтропии (см. на фиг. 4 кривые 2, 3) экстремальное число Sh не изменилось. При изменении угла конической сверхзвуковой части экстремальное число Sh изменяется, но остается близким к числу Sh^* (см. на фиг. 4 кривую 4 для $\beta_2=30^\circ$). Следовательно, наличие максимума в кривой $P_2(Sh)$ определяется резонансными явлениями

ми при совпадении периода вынужденных колебаний с характерным временем распространения волны энтропии. Заметим, что величина фазового угла волны энтропии практически не изменяет амплитуду стоячей волны давления в максимуме кривой $P_2(\text{Sh})$, но влияет на появление минимума при малых числах Sh (см. на фиг. 4 кривые 3, 4).

При прохождении продольных волн давления и других газодинамических параметров через цилиндрический канал и сопло Лаваля происходит существенное изменение амплитуды стоячих волн, особенно на экстремальных частотах. На фиг. 5 приведена для примера зависимость от числа Sh отношения амплитуд стоячих волн давления в сечениях: цилиндрического канала, отстоящего от входа в сопло на $x_s=10$, и в сверхзвуковой части сопла с числом $M_2=4.56$ стационарного течения. Кривая 1 соответствует $\beta_2=10^\circ$, кривая 2 — $\beta_2=30^\circ$, $\text{Re } s^*/p^*=2.14$. В приведенной зависимости имеется много экстремальных частот, определяемых особенностями распространения продольных волн в цилиндрической, дозвуковой и сверхзвуковой частях канала. При малых частотах безразмерная амплитуда стоячей волны давления при распространении возмущений от цилиндрического канала к сверхзвуковой части сопла может заметно уменьшаться лишь при некоторых фазовых углах волн энтропии. Во всех других случаях и при больших числах Sh безразмерная амплитуда волны давления в сверхзвуковом сопле, как правило, существенно больше, особенно при наличии волны энтропии, чем в цилиндрическом канале, а на резонансных частотах увеличение происходит на порядки (см. фиг. 5).

Из уравнений (1.1)–(1.5) при $\omega \rightarrow 0$ следует, что безразмерные амплитуды r' , ρ' , u' и их фазовые углы остаются постоянными. Для дозвуковой и сверхзвуковой частей различной геометрии были численно исследованы изменения амплитуды r' , u' и их фазовых углов при малых числах $\text{Sh}=10^{-6}–10^{-1}$; $\beta_1=30^\circ$, 50° ; $m=2$; $n=3$, 5 ; $s^*/p^*=0$, 2.14 ; $\beta_2=10^\circ$, 30° . С ростом числа Sh от нуля при $\text{Sh} \approx 10^{-4}$ и соответствующей длине волны начинает изменяться амплитуда и фазовый угол стоячей волны скорости, а затем при числах $\text{Sh} \approx 10^{-2}$ амплитуда и фазовый угол стоячей волны давления. Квазистационарный режим в дозвуковой части по всем параметрам наступает при числе $\text{Sh} \leq 10^{-4}$, практически не зависящем от ее геометрической формы. За период одного вынужденного колебания при квазистационарном числе $\text{Sh} \approx 10^{-4}$ по дозвуковой части от ее начала до критического сечения и обратно проходит 10^3 последовательных звуковых волн, характеризуемых собственным временем τ^{+-} или числом Sh^{+-} .

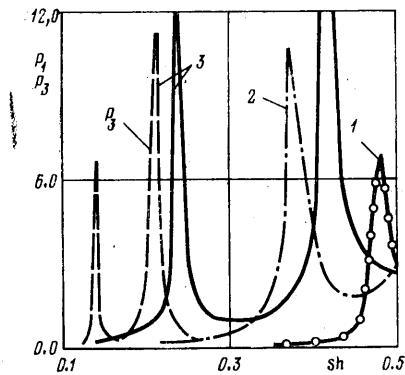
Для стоячих волн давления квазистационарный режим осуществляется при числах $\text{Sh} \leq 10^{-2}$, т. е. при прохождении 10 звуковых волн. Наличие волны энтропии слабо изменяет количественные характеристики. В сверхзвуковой части сопла при числах $\text{Sh} \leq 10^{-2}$ амплитуды стоячих волн давления и скорости и их фазовые углы очень изменяются и соответствуют квазистационарному режиму. При максимальном квазистационарном числе $\text{Sh} \leq 10^{-2}$ от критического сечения до сечения с числами $M_2=2.42$ и

Таблица 2

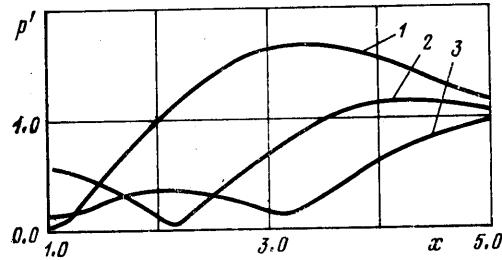
№ п.п.	n	β_1	Sh_{10}	τ_{\max}		τ_{\min}	
				Sh	Sh_0	Sh	Sh_0
1	1.72	9	0.373	0.48	0.482	0.53	0.543
2	3.0	30	0.214	0.38	0.381	0.45	0.454
3	5.0	50	0.128	0.24	0.243	0.32	0.341

4.56 проходит со скоростью $U+a$ также 10 звуковых волн, характеризуемых числом Sh^+ , за один период квазистационарного колебания.

3. Характеристики распространения в сопле Лаваля пространственного возмущения моды 10 представлены на фиг. 6 в виде зависимости отношения амплитуд стоячей волны давления в критическом сечении p_* и в начале дозвуковой части p_1 от числа Sh . Нумерация кривых соответствует нумерации в табл. 2. Все кривые начинаются с частот Sh_{10} , затем



Фиг. 6



Фиг. 7

следуют резко выраженные экстремумы. Числа Sh , соответствующие этим экстремумам, приведены в табл. 2.

Число Sh_{10} является собственной частотой пространственных колебаний в цилиндрической камере. Чередующиеся экстремумы кривых можно объяснить наличием узлов и пучностей пространственной волны давления. Если узел этой волны при некоторой частоте располагается в сечении 1, то кривая $P_1(Sh)=p_*/p_1$ будет иметь максимум на этой частоте. Если же в сечении 1 располагается пучность волны давления, то кривая будет иметь минимум на соответствующей частоте.

Фигура 7, на которой представлены распределения амплитуд волны давления по длине сопла с геометрией $n=3$, $m=2$, $\beta_1=30^\circ$ дозвуковой части для экстремальных значений $Sh=0.38; 0.45; 0.56$ (соответственно кривые 1, 2, 3), иллюстрирует этот факт. Отсюда же видно, что амплитуды волны давления имеют максимум в некоторых сечениях $r=r_0$. Ниже будет показано, что частота радиально-окружной составляющей пространственной волны давления в сечении при $r=r_0$ приближенно совпадает с собственной радиально-окружной частотой для цилиндрической трубы той же площади сечения. Распределения амплитуд вдоль дозвуковой части сопла, приведенные на фиг. 7, показывают, что от начала дозвуковой части (сечение 1) до сечения $r=r_0$ располагается четверть продольной составляющей волны на экстремальной частоте $Sh=0.38$, при которой имеет место максимум $P_1(Sh)$, и половина продольной составляющей волны при числе $Sh=0.45$, при котором достигается минимум $P_1(Sh)$.

Представим приближенную формулу для вычисления числа Sh_0 , соответствующего экстремуму кривой $P_1(Sh)$, в следующем виде:

$$(3.1) \quad Sh_0 = \left\{ \left[\frac{d_* \sqrt{1-M^2}}{l(\Delta x)} \right]^2 + \left[\frac{\alpha_{t0}}{\pi r_0(\Delta x)} \right]^2 \right\}^{1/2} \left[\frac{x+1}{2} (1-M^2) \right]^{1/2}$$

где $l(\Delta x)=4\Delta x/k$, $k=1, 2, 3$; Δx – расстояние от сечения $r=r_0$ до сечения 1, $r_0(\Delta x)$ – совпадает с уравнением контура дозвуковой части. Формула (3.1) построена в предположении, что экстремальная частота трехмерной волны давления в дозвуковой ча-

сти сопла равна корню из суммы квадратов собственных частот продольной составляющей волны длиной $4\Delta x/k$ (первое слагаемое) и радиально-окружной составляющей в цилиндрической трубе при $r=r_0$ (второе слагаемое) [12]. Результаты расчета по формуле (3.1) для исходных данных, соответствующих фиг. 7, дают экстремальные числа Sh : 0.358 — для первого максимума и 0.478 — для первого минимума, что удовлетворительно совпадает с данными фиг. 6. Если не известно, где располагается сечение $r=r_0$, то по формуле (3.1) нельзя определить экстремальные числа Sh_0 . Будем предполагать, что из всего спектра частот, определяющихся непрерывным изменением Δx , реализуется лишь минимальное число Sh_0 , которое можно вычислить из следующего условия:

$$(3.2) \quad (d Sh_0)/d(\Delta x) = 0$$

Результаты расчета по формулам (3.1) и (3.2) представлены в табл. 2

Таблица 3

Sh	Res*/p*'		
	0.0	3.0	5.0
0.1	0.55	0.60	0.75
0.2	0.80	1.10	1.35
0.3	1.05	1.55	1.95
0.4	1.30	1.95	2.45
0.5	1.50	2.20	2.60

При исследовании неизоэнтропических течений результаты расчета показывают, что энтропия не влияет на значения экстремальных частот; ее влияние на отношение амплитуд волны давления незначительно, за исключением области экстремальных частот. Здесь наличие энтропийных волн приводит к уменьшению значения отношения $P_1(Sh)$.

В сверхзвуковой части присутствие энтропийных волн несколько изменяет картину возмущенного течения. Энтропия увеличивает отношение амплитуд волны давления. Результаты численного расчета в сверхзвуковой области представлены в табл. 3, где показана зависимость отношения амплитуды стоячей волны давления в конической сверхзвуковой части сопла с углом $\beta_2=10^\circ$ в сечении, характеризуемом числом $M_2=2.42$, — p_2' к p_*' от числа Sh , т. е. $P_2(Sh)=p_2'/p_*'$ при различных значениях $Re s_*'/p_*'$.

Учет завихренности возмущенного потока показал, что ее влияние на исследуемые характеристики мало и проявляется в третьем-четвертом знаках при вычислении соответствующих величин.

Результаты расчета зависимости отношения $P_3(Sh)=p_3'/p_*'$ от числа Sh для дозвуковой части сопла с геометрией $h=5$, $m=2$, $\beta_1=50^\circ$ (штриховая линия) представлены на фиг. 6, причем величина p_3' вычислялась в сечении цилиндрической трубы, предшествующей дозвуковой части, на расстоянии $x_3=10$ от сечения 1. Хорошо видно смещение экстремальных частот влево. С достаточной степенью точности это смещение можно вычислить по формулам (3.1) и (3.2), которые дают следующие величины смещенных экстремальных частот: 1-й максимум — $Sh=0.139$; 1-й минимум — $Sh=0.165$; 2-й максимум — $Sh=0.2$. Следует отметить уменьшение величин P_3 по сравнению с P_1 на соответствующих экстремальных частотах.

4. Газодинамические возмущения, прошедшие через сверхзвуковое сопло, могут вызвать усиление возмущений в струе. Для осесимметричной струи наибольший интерес представляет возбуждение дискретных составляющих в спектре ее акустического шума. В работе [13] показано, что дискретные составляющие в струе представляют собой пространственные возмущения с коэффициентом корреляции стоячей волны давления в двух противоположных точках одного диаметра, равным минус единице.

нице, а их частота определяется экспериментальной зависимостью числа Sh_j от числа Маха струи — M_j .

Естественно предположить, что возбуждение дискретной составляющей в струе возможно лишь пространственными возмущениями из сопла модой с $v \geq 1$. При этом другие возможные причины возбуждения дискретной составляющей в спектре акустического шума струи (пульсации давления, сплошного спектра в камере перед соплом, продольные волны и др.) выходят за рамки настоящего исследования и здесь не рассматриваются. Если перед осесимметричным сверхзвуковым соплом имеется цилиндрический канал достаточной длины, то могут иметь место пространственные возмущения с частотами, большими собственных ω_{v1} (см. (1.9)).

Для этого случая ниже приведен минимальный диаметр цилиндрической трубы, при котором собственная частота ω_{v1} совпадает с частотами дискретной составляющей в струе [13] при $\kappa = 1.2$:

M_j	2	3	4
$(d_1/d_*)_{\min}$	6.7	20.0	5.6

При $(d_1/d_*) \leq (d_1/d_*)_{\min}$ и наличии достаточно длинного цилиндрического канала перед сверхзвуковым соплом возбуждение дискретной составляющей в струе пространственными возмущениями течения перед соплом не должно происходить.

Поступила 6 II 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Tsien H. S. Transfer functions of rocket nozzles. ARS Journal, 1952, v. 22, № 3, p. 139.
2. Крокко Л., Чжен Синь И. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. М.: Изд-во иностр. лит., 1958, 351 с.
3. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961.
4. Zinn B. T., Crocco L. Periodic finite-amplitude oscillations in slowly converging nozzles. Astronat. Acta, 1968, v. 13, № 5, 6, p. 481.
5. Zinn B. T., Bell W. A., Daniel B. R., Smith A. J. The experimental determination of three-dimensional liquid rocket nozzle admittances. AIAA Journal, 1973, vol. 11, № 3, p. 267.
6. Крайко А. Н., Осипов А. А. Исследование отражения возмущений от дозвуковой части сопла Лаваля. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 1, с. 84.
7. Kochin Н. Е., Кильель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963, 583 с.
8. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960, 336 с.
9. Скучик Е. Основы акустики. Т. 1, 2. М.: Мир, 1959.
10. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания кругового цилиндра с отошедшей ударной волной.— В кн.: Вычисл. математика, 1958, № 3, с. 149.
11. Кокушкин Н. В. Об отражении акустических волн докритической части сопл Лаваля. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1974, № 4, с. 118.
12. Ануфриев В. М., Комаров В. В., Купцов В. М., Мельников Д. А., Сергиенко А. А. Дискретная составляющая в спектре шума сверхзвуковых струй.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 5, с. 162.
13. Осипов А. А. Распространение трехмерных акустических возмущений в осесимметричных каналах медленно изменяющегося поперечного сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 5, с. 125.